ΕΝΟΤΗΤΑ 1.3 : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Λύσεις των Ασκήσεων

Άσκηση 1

Το 50% των δωματίων ενός ξενοδοχείου έχουν τζάκι, το 20% έχουν καλοριφέρ και το 10% και τζάκι και καλοριφέρ. Επιλέγουμε τυχαία ένα δωμάτιο του ξενοδοχείου.
Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου το δωμάτιο που επιλέξαμε:

α) να μην έχει τζάκι,

β) να μην έχει ούτε τζάκι ούτε καλοριφέρ,

γ) να έχει μόνο τζάκι;

Λύση

Επιλέγουμε τυχαία ένα δωμάτιο. Ονομάζουμε τα εξής ενδεχόμενα:
Α: «Το δωμάτιο που επιλέξαμε έχει τζάκι».
Β: «Το δωμάτιο που επιλέξαμε έχει καλοριφέρ».
Τότε P(A) = 0,5 και P(B) = 0,2.
Το ενδεχόμενο «το δωμάτιο που επιλέξαμε έχει τζάκι και ούτε καλοριφέρ» γράφεται ως $A \cap B$ και είναι $P(A \cap B) = 0{,}1$.

α) Το ενδεχόμενο «το δωμάτιο που επιλέξαμε δεν έχει τζάκι» γράφεται ως A' και $P(A') = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$ (από Π1).

β) Το ενδεχόμενο «το δωμάτιο που επιλέξαμε δεν έχει ούτε τζάκι, ούτε καλοριφέρ» γράφεται ως $(A \cup B)'$ και $P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B)$ (από Π1).
Πρέπει να βρούμε την $P(A \cup B)$ από Π4:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, άρα $P(A \cup B) = 0{,}5 + 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}6$.
Έτσι, θα έχουμε $P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B)$ =1—0,6=0,4.

γ) Το ενδεχόμενο «το δωμάτιο που επιλέξαμε έχει μόνο τζάκι» γράφεται ως $A - B$.
Από Π2: $P(A) = P(A \cap B) + P(A - B)$, άρα $0{,}5 = 0{,}1 + P(A - B) \Leftrightarrow P(A - B) = 0{,}4$.

Άσκηση 2

Ας υποθέσουμε ότι Α και Β είναι ενδεχόμενα ενός δ.χ. Ω. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή ή λάθος, αιτιολογώντας την απάντησή σας:

α) Αν ισχύει ότι $P(A) = 0{,}8$ και $P(B) = 0{,}1$. Ισχύει ότι $B \subseteq A$, γιατί $P(B) \leq P(A)$.

β) Αν $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}4$ και $P(A \cup B) = 0{,}6$, τότε τα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

γ) Αν $P(A)=0{,}4$ και $P(B)=0{,}6$, τότε το συμπληρωματικό του A είναι το B.

δ) Ισχύει πάντα ότι $P(A)+P(B)\leq 1$.

ε) Ισχύει πάντα ότι $P(A)+P(B)-P(A\cap B)\leq 1$.

στ) Αν ισχύει $P(A)+P(B)=1{,}5$, τότε τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.

ζ) Αν ισχύει $P(A)+P(B)<1$, τότε τα A και B είναι ασυμβίβαστα.

η) Ισχύει ότι $P(A\cap B)\leq P(A)$.

Λύση

α) Λάθος. Δεν είναι απαραίτητα το $B\subseteq A$. Π.χ. θα μπορούσαν τα A και B να είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα.

Ας φανταστούμε το πείραμα τύχης "επιλέγομε τυχαία έναν φυσικό αριθμό από τους 1, 2, 3, ..., 10". Είναι Ω={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. Αν ονομάσουμε A={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} και B={9}, είναι P(A) = 0,8 και P(B) = 0,1, χωρίς να είναι $B\subseteq A$.

β) Σωστή.

Από Π4 έχουμε ότι $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, άρα $0{,}6=0{,}3+0{,}4-P(A\cap B)\Leftrightarrow$ $P(A\cap B)=0{,}1$, επομένως τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.

γ) Λάθος. Θα μπορούσε να είναι σωστή μόνο στην περίπτωση που τα A και B ήταν ασυμβίβαστα. Για παράδειγμα, στο πείραμα του (α), αν ονομάσουμε Γ={1, 2, 3, 4} και Δ={1, 2, 5, 6, 9, 10}, είναι $P(\Gamma)=0{,}4$ και $P(\Delta)=0{,}6$ χωρίς τα Γ και Δ να είναι συμπληρωματικά.

δ) Λάθος. Στην περίπτωση που τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα μπορεί να ισχύει $P(A)+P(B)>1$. Π.χ. αν $P(A)=0{,}6$, $P(B)=0{,}7$ και $P(A\cap B)=0{,}5$, τότε από Π4 έχουμε:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A\cup B)=0{,}6+0{,}7-0{,}5=0{,}8$.

Σε αυτή την περίπτωση $P(A)+P(B)=1{,}3$.

ε) Σωστή. Από Π4 ισχύει $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ και $P(A\cup B)\leq 1$ (από τον ορισμό της πιθανότητας). Άρα $P(A)+P(B)-P(A\cap B)\leq 1$.

στ) Σωστή. Στην περίπτωση αυτή τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα. Γενικότερα, αν $P(A)+P(B)>1$, τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα, εφόσον αν ήταν ασυμβίβαστα θα ήταν $P(A\cup B)=P(A)+P(B)>1$, που είναι άτοπο.

ζ) Λάθος. Δεν είναι απαραίτητο να είναι ασυμβίβαστα. Π.χ. βλέπε β), όπου P(A)+P(B)=0,7, ωστόσο τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.

η) Σωστή, λόγω της Π3 καθώς $A\cap B\subseteq A$.

Άσκηση 3

Να απαντήσετε στα ίδια ερωτήματα με την εφαρμογή 2, αν αντί για τα ποσοστά που δίνονται, γνωρίζετε αυτή τη φορά ότι το Λύκειο έχει συνολικά 120 μαθητές/τριες, από τους/τις οποίους/ες οι 32 συμμετέχουν στη θεατρική ομάδα, οι 28 στην ομάδα στίβου και 16 μαθητές/τριες συμμετέχουν και στις δύο ομάδες.

Λύση

Αν Α είναι το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει στην θεατρική ομάδα» και Β «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει στην ομάδα στίβου», τότε, $P(A)=\frac{32}{120}=\frac{4}{15}$ και $P(B)=\frac{28}{120}=\frac{7}{30}$.

Το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει και στις δύο ομάδες» είναι το $A\cap B$ και από τα δεδομένα του προβλήματος $P(A\cap B)=\frac{16}{120}=\frac{2}{15}$.

α) Από το Π4, η πιθανότητα του ενδεχομένου $A\cup B$, είναι $P(A\cup B)=\frac{4}{15}+\frac{7}{30}-\frac{2}{15}=$ $=\frac{8}{30}+\frac{7}{30}-\frac{4}{30}=\frac{11}{30}$.

β) Από Π2 η πιθανότητα του ενδεχομένου $A-B$ είναι $\frac{4}{15}=\frac{2}{15}+P(A-B)\Leftrightarrow$ $P(A-B)=\frac{4}{15}-\frac{2}{15}=\frac{2}{15}$.

γ) Πρώτα θα βρούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει μόνο στην ομάδα στίβου», δηλαδή του $B-A$, από Π2:

$$P(B)=P(A\cap B)+P(B-A)\Leftrightarrow \frac{7}{30}=\frac{2}{15}+P(B-A)\Leftrightarrow P(B-A)=\frac{3}{30}=0{,}1$$

Το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει σε μία μόνο από τις δύο ομάδες» είναι η ένωση των ασυμβίβαστων ενδεχομένων $A-B$ και $B-A$.

Σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο $P((A-B)\cup(B-A))=P(A-B)+P(B-A)\Leftrightarrow$

$$P((A-B)\cup(B-A))=\frac{2}{15}+0{,}1=\frac{4}{30}+\frac{3}{30}=\frac{7}{30}.$$

δ) Το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια δε συμμετέχει σε καμία ομάδα» είναι το $(A\cup B)'$ και από Π1, $P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)=1-\frac{11}{30}=\frac{19}{30}$.

Άσκηση 4

Από τους/τις μαθητές/τριες της Β΄ τάξης ενός Λυκείου το 55% είναι μαθήτριες, το 40% παίζουν μπάσκετ και το 10% είναι μαθήτριες που παίζουν μπάσκετ. Επιλέγουμε τυχαία έναν/μία μαθητή/τρια.

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες να είναι:

α) μαθήτρια ή να παίζει μπάσκετ,

β) μαθήτρια και να μην παίζει μπάσκετ,

γ) μαθητής και να παίζει μπάσκετ,

δ) μαθητής ή να παίζει μπάσκετ.

<u>Λύση</u>

Επιλέγουμε τυχαία ένα/μια μαθητή/τρια. Θεωρούμε τα εξής ενδεχόμενα:

K: «μαθήτρια» με P(K)=0,55.

M: «ο/η μαθητής/τρια παίζει μπάσκετ» με P(M)=0,4.

«μαθήτρια που παίζει μπάσκετ»: $K \cap M$ με $P(K \cap M) = 0,1$.

α) Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $K \cup M$. Από Π4 έχουμε:

$P(K \cup M) = P(K) + P(M) - P(K \cap M) \Leftrightarrow P(K \cup M) = 0,55 + 0,4 - 0,1 = 0,85$.

β) Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $K - M$. Από Π2 έχουμε:

$P(K) = P(K \cap M) + P(K - M) \Leftrightarrow 0,55 = 0,1 + P(K - M) \Leftrightarrow P(K - M) = 0,45$.

γ) Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου «μαθητής και να παίζει μπάσκετ», το οποίο είναι το ίδιο με το ενδεχόμενο «να μην είναι κορίτσι και να παίζει μπάσκετ», άρα $K - M$.

Από Π2: $P(M) = P(M \cap K) + P(M - K) \Leftrightarrow 0,4 = 0,1 + P(M - K) \Leftrightarrow P(M - K) = 0,3$.

Ένας άλλος τρόπος να εκφράσουμε το ενδεχόμενο «μαθητής και να παίζει μπάσκετ» είναι ο εξής: $K' \cap M$. Άρα $P(K' \cap M) = 0,3$.

δ) Θα βρούμε πρώτα την πιθανότητα να είναι μαθητής, δηλαδή K', με τη βοήθεια του Π1: $P(K') = 1 - P(K) = 1 - 0,55 = 0,45$.

Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου «μαθητής ή να παίζει μπάσκετ», δηλαδή του ενδεχομένου $K' \cup M$. Άρα, $P(K' \cup M) = P(K') + P(M) - P(K' \cap M)$.

Με αντικατάσταση έχουμε $P(K' \cup M) = 0,45 + 0,4 - 0,3 = 0,55$.

Άσκηση 5

Όλοι οι κάτοικοι μιας μικρής επαρχιακής πόλης έχουν συμβόλαιο κινητού τηλεφώνου. Το 47% των κατοίκων έχει συμβόλαιο με την εταιρεία FONATEL, το 35% των κατοίκων έχει συμβόλαιο με την TELEVIBE. Παίρνουμε τυχαία τηλέφωνο έναν κάτοικο της πόλης. Γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου «ο κάτοικος που πήραμε τηλέφωνο δεν έχει συμβόλαιο με καμία από τις FONATEL και TELEVIBE» είναι 23%.

Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου, ο κάτοικος που πήραμε τηλέφωνο:

α) να έχει συμβόλαιο με την FONATEL ή με την TELEVIBE,

β) να έχει συμβόλαιο και με τις δύο εταιρείες.

<u>Λύση</u>

Για το πείραμα τύχης που περιγράφεται στην άσκηση έχουμε τα εξής ενδεχόμενα:

F: «ο κάτοικος που πήραμε έχει συμβόλαιο με την FONATEL»

T: «ο κάτοικος που πήραμε έχει συμβόλαιο με την TELEVIBE»

«ο κάτοικος που πήραμε δεν έχει συμβόλαιο με καμιά από τις FONATEL και TELEVIBE»: $(F \cup T)'$.

Άρα $P(F) = 0,47$, $P(T) = 0,35$ και $P((F \cup T)') = 0,23$.

α) Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $F \cup T$.

Από Π1: $P(F \cup T) = 1 - P((F \cup T)') = 1 - 0,23 = 0,77$.

β) Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $F \cap T$.

Από Π4, $P(F \cap T) = P(F) + P(T) - P(F \cup T)$ με αντικατάσταση έχουμε:

$P(F \cap T) = 0,47 + 0,35 - 0,77 = 0,05$.

Άσκηση 6

Από τον πληθυσμό μιας πόλης το 42% δεν έχουν κάνει ποτέ σκι το 58% δεν έχουν ταξιδέψει ποτέ με αεροπλάνο, αλλά το 29% έχουν ήδη κάνει σκι και έχουν ταξιδέψει με αεροπλάνο. Αν πάρουμε τυχαία έναν κάτοικο της πόλης ποια είναι η πιθανότητα να μην έχει κάνει ποτέ σκι και να μην έχει ταξιδέψει ποτέ με αεροπλάνο;

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

S: «ο κάτοικος έχει κάνει σκι»

A: «ο κάτοικος έχει ταξιδέψει με αεροπλάνο»

«ο κάτοικος έχει κάνει σκι και έχει ταξιδέψει με αεροπλάνο»: $S \cap A$

Από τα δεδομένα έχουμε $P(S') = 0,42$, $P(A') = 0,58$ και $P(S \cap A) = 0,29$.

Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο κάτοικος δεν έχει κάνει σκι, ούτε έχει ταξιδέψει με αεροπλάνο», δηλαδή $(S \cup A)'$.

Αρχικά βρίσκουμε τις πιθανότητες $P(S) = 1 - P(S') = 1 - 0,42 = 0,58$ και $P(A) =$

$= 1 - P(A') = 1 - 0,58 = 0,42$.

Άρα $P(S \cup A) = P(A) + P(S) - P(S \cap A) = 0,42 + 0,58 - 0,29 = 0,71$.

Επομένως $P((S \cup A)') = 1 - P(S \cup A) = 1 - 0,71 = 0,29$.