ΕΝΟΤΗΤΑ 1.2. ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ: ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Διερεύνηση

Πόσο πιθανό είναι να συμβει;

Παρακάτω περιγράφονται δύο παιχνίδια για δύο παίκτες.

Παιχνίδι 1: Οι δύο παίκτες ο Α και ο Β στρίβουν ένα κέρμα δύο φορές ο καθένας και καταγράφουν τα αποτελέσματα. Ο παίκτης Α κερδίζει αν έρθει δύο φορές γράμματα. Ο παίκτης Β κερδίζει αν έρθει διαφορετικό αποτέλεσμα σε κάθε ρίψη.

Παιχνίδι 2: Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένας δίσκος χωρισμένος σε τρεις ίσους κυκλικούς τομείς, από τους οποίους καθένας έχει άλλο χρώμα και έναν διαφορετικό αριθμό επάνω του. Το βέλος περιστρέφεται και σταματά. Αν σταμάτησε σε θετικό αριθμό κερδίζει ο παίκτης Α, ενώ αν σταμάτησε σε αρνητικό αριθμό κερδίζει ο παίκτης Β.

- Θεωρείτε ότι τα παραπάνω παιχνίδια είναι δίκαια και για τους δύο παίκτες;
- Πώς το εξηγείτε;
- Αν όχι, τι θα μπορούσε να αλλάξει ώστε να γίνουν;

Βασικές μαθηματικές έννοιες -Ιδέες-Διεργασίες

Εισαγωγικά για την έννοια της πιθανότητας

Τα παιχνίδια που περιγράφονται παραπάνω μπορούν να θεωρηθούν ως πειράματα τύχης, για τα οποία μιλήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, καθώς ένα κύριο χαρακτηριστικό τους είναι πως δεν μπορεί να προβλεφθεί το αποτέλεσμά τους. Δηλαδή υπάρχει αβεβαιότητα σχετικά με το ποιος παίκτης θα κερδίσει σε κάθε παιχνίδι. Η αβεβαιότητα αυτή όμως είναι ίδια και στις δύο περιπτώσεις παιχνιδιών; Δηλαδή, αν θεωρήσουμε το ενδεχόμενο «κερδίζει ο παίκτης Α», η βεβαιότητα για την πραγματοποίηση του είναι η ίδια και στα δύο παιχνίδια; Πώς μπορούμε να «μετρήσουμε» τη βεβαιότητα αυτή;

Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου, όπως το προηγούμενο, είναι ένας αριθμός που εκφράζει το μέτρο της βεβαιότητας που αποδίδουμε στο να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο αυτό.

Στην ειδική περίπτωση που θεωρούμε ότι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης είναι ισοπίθανα, όπως στην ρίψη ενός αμερόληπτου κέρματος ή ζαριού, ισχύει ο παρακάτω ορισμός.

Κλασικός ορισμός πιθανότητας

Σε ένα πείραμα τύχης με ν ισοπίθανα αποτελέσματα, η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α που περιέχει κ τέτοια αποτελέσματα είναι:

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το Α}}{\text{Πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{\kappa}{\nu}$$

Άμεσες συνέπειες του κλασικού ορισμού είναι οι παρακάτω:

— $P(\Omega) = 1$,

— $P(\varnothing) = 0$,

— Για κάθε ενδεχόμενο του δ.χ. Ω ισχύει $0 \le P(A) \le 1$

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το παράδειγμα της ρίψης ενός αμερόληπτου κέρματος με δ.χ.:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

και το ενδεχόμενο Α: το αποτέλεσμα της ρίψης είναι μεγαλύτερο του 4, δηλαδή:

$$A = \{5, 6\}$$

Τότε η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το Α είναι:

$$P(A) = \frac{2}{6}$$

Στην προηγούμενη παράγραφο, θεωρώντας έναν δ.χ. ενός πειράματος τύχης, αυτό που κάναμε είναι ένα μέρος της μοντελοποίησης του πειράματος, λέγοντας τι μπορεί να συμβεί. Τώρα εμπλουτίζουμε το μοντέλο μας, αφού μπορούμε να πούμε και πόσο πιθανά θεωρούμε να συμβούν αυτά που μπορούν να συμβούν.

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια και καταγράφουμε το άθροισμα των ενδείξεών τους. Ποιο άθροισμα έχει μεγαλύτερη πιθανότητα εμφάνισης;

Λύση

Μπορούμε να καταγράψουμε τα πιθανά αποτελέσματα όπως φαίνεται στον πίνακα. Στη συνέχεια θεωρούμε τα 36 διατεταγμένα ζεύγη στα κελιά του πίνακα ως στοιχεία του δ.χ. της ρίψης δύο ζαριών. Για δύο πραγματικά αμερόληπτα ζάρια είναι ρεαλιστικό να υποθέσουμε ότι τα 36 αυτά αποτελέσματα είναι εξίσου πιθανά.

Ο δειγματικός χώρος της ρίψης δύο ζαριών που χρησιμοποιούμε στην εφαρμογή 1

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας, το ενδεχόμενο A_7: το άθροισμα των δύο ρίψεων είναι ίσο με 7, δηλαδή το

$$A_7 = \{(6,1), (5,2), (4,3), (3,4), (2,5), (1,6)\}$$

έχει πιθανότητα να πραγματοποιηθεί:

Χρήση του κλασικού ορισμού

$$P(A_7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Αυτό είναι και το άθροισμα με τη μεγαλύτερη πιθανότητα εμφάνισης. Οποιοδήποτε άλλο άθροισμα έχει μικρότερη πιθανότητα εμφάνισης, καθώς τα ευνοϊκά ενδεχόμενα είναι λιγότερα από 6.
Π.χ. το ενδεχόμενο A_6: το άθροισμα των δύο ρίψεων είναι ίσο με 6

$$A_6 = \{(5,1), (4,2), (3,3), (2,4), (2,5), (1,5)\}$$

έχει πιθανότητα ίση με:

$$P(A_6) = \frac{5}{36} < \frac{1}{6}$$

Διερεύνηση

Παιχνίδι 3: Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένας δίσκος χωρισμένος σε έναν κίτρινο και έναν μπλε τομέα. Ο παίκτης Α περιστρέφει μία φορά το βέλος. Κερδίζει αν το βέλος βρεθεί σε μπλε περιοχή, αλλιώς κερδίζει ο Β. Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει ο παίκτης Α;

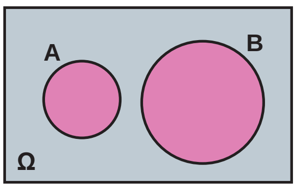
Βασικές μαθηματικές έννοιες -Ιδέες-Διεργασίες

Είναι ιδιαίτερα συνηθισμένο τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης να μην είναι ισοπίθανα. Υπάρχουν απλά παραδείγματα όπως το γνωστό παιχνίδι όπου κάποιος πετάει στον αέρα ένα μπουκάλι μισογεμάτο με νερό και καταγράφει αν θα πέσει όρθιο ή όχι στο έδαφος (bottle flip), αλλά και πιο σύνθετα όπως οι λειτουργίες κυκλωμάτων υπολογιστών και κινητών τηλεφώνων. Σε αυτή την κατηγορία εμπίπτουν τα περισσότερα από τα ενδιαφέροντα προβλήματα που μελετά η Θεωρία των Πιθανοτήτων. Σε τέτοιες περιπτώσεις ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί, μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί ο αξιωματικός ορισμός, που εφαρμόζεται ευρύτερα από τον κλασικό.
Στόχος μας είναι να κατασκευάσουμε μία αντιστοιχία μεταξύ των ενδεχομένων ενός δ.χ. ενός πειράματος τύχης και πραγματικών αριθμών που να ανήκουν στο διάστημα [0, 1], έτσι ώστε κάθε αριθμός να εκφράζει πόσο πιθανό θεωρούμε να πραγματοποιηθεί το αντίστοιχο ενδεχόμενο. Παρακάτω περιγράφεται πώς μπορεί να κατασκευαστεί αυτή η αντιστοιχία.

Η αντιστοιχία που ορίζεται με τον αξιωματικό ορισμό

A→P(A)

Ο απλός προσθετικός νόμος



$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Αξιωματικός ορισμός πιθανότητας

Έστω $\Omega=\{\omega_1, \omega_2,...,\omega_\nu\}$ ένας δ.χ. ενός πειράματος τύχης. Σε κάθε ενδεχόμενο Α του Ω **αποδίδουμε** έναν πραγματικό αριθμό που ονομάζουμε πιθανότητα του Α και συμβολίζουμε με P(A), έτσι ώστε:

— $P(A) \geq 0$, για οποιοδήποτε Α του Ω

— $P(\Omega) = 1$

— Ικανοποιείται ο απλός προσθετικός νόμος:

Αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι οποιαδήποτε ασυμβίβαστα ενδεχόμενα του Ω, τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Θα δούμε στην επόμενη παράγραφο ότι ο αξιωματικός ορισμός έχει τις παρακάτω συνέπειες:

$$P(A) \leq 1, \text{ για οποιοδήποτε ενδεχόμενο Α και } P(\varnothing) = 0.$$

Η πιθανότητα P(A), δηλαδή ο αριθμός που αποδίδουμε στο Α και που ικανοποιεί τα τρία αξιώματα του ορισμού, είναι ένας αριθμός ανάμεσα στο 0 και στο 1 και εκφράζει το πόσο πιθανό θεωρούμε να συμβεί το Α. Στο αδύνατο ενδεχόμενο αποδίδουμε πιθανότητα 0 και στο βέβαιο ενδεχόμενο (το Ω) αποδίδουμε πιθανότητα 1.

Για να μελετήσουμε, με χρήση του αξιωματικού ορισμού, ένα πείραμα τύχης κάνουμε το εξής:

Προσδιορίζουμε τα δυνατά αποτελέσματα $\omega_1, \omega_2,\dots,\omega_\nu$ δηλαδή έναν κατάλληλο δ.χ. για το πείραμα τύχης και αντιστοιχίζουμε στα απλά ενδεχόμενα $\{\omega_1\}, \{\omega_2\},\dots, \{\omega_\nu\}$ τους πραγματικούς αριθμούς $p_1, p_2,\dots,p_\nu$ που εκφράζουν πόσο πιθανό θεωρούμε κάθε δυνατό αποτέλεσμα. Δηλαδή $P(\{\omega_i\})=p_i$ για κάθε $i = 1,2,3,\dots,\nu$.

Αυτό το κάνουμε ώστε να ισχύουν:

— $0 \leq p_i$, για κάθε $i = 1,2,\dots,\nu$ (αφού θέλουμε $P(A)\geq 0$)

— $p_1 + p_2 +\dots+p_\nu = 1$ (αφού θέλουμε $P(\Omega)=1$)

Στη συνέχεια, προκειμένου να αποδώσουμε πιθανότητα σε οποιοδήποτε άλλο ενδεχόμενο χρησιμοποιούμε το 3ο αξίωμα (τον απλό προσθετικό νόμο). Π.χ.

$$P(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + P(\{\omega_3\}) = p_1 + p_2 + p_3$$

Με αυτόν τον τρόπο αποδίδουμε πιθανότητα σε οποιοδήποτε σύνθετο ενδεχόμενο του Ω, εξασφαλίζοντας ότι ο αξιωματικός ορισμός ικανοποιείται.

Ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας είναι υποπερίπτωση του αξιωματικού ορισμού. Στην εφαρμογή 1, για παράδειγμα, θεωρούμε ως απλά ενδεχόμενα του δ.χ. τα $\{\omega_i\}$, για i=1, 2, ..., 36, όπου κάθε ω_i αντιστοιχεί σε ένα κελί του πίνακα που εκφράζει τον δ.χ. της ρίψης των δύο ζαριών.

Θεωρώντας -ρεαλιστικά- τα αποτελέσματα ω_i ισοπίθανα, τότε σε κάθε $\{\omega_i\}$ με i = 1,2,…,36 αποδίδουμε πιθανότητα $p_i = \frac{1}{36} \geq 0$.

Επίσης ισχύει $p_1 + p_2 + \ldots + p_{36} = 36 \cdot \frac{1}{36} = 1$.

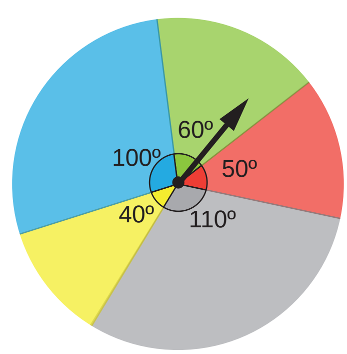
Όπως είδαμε, εφόσον ισχύουν τα παραπάνω, μπορούμε να αποδώσουμε πιθανότητα σε οποιοδήποτε σύνθετο ενδεχόμενο του Ω, εξασφαλίζοντας ότι ικανοποιείται ο αξιωματικός ορισμός.

Έτσι, αν π.χ. Α = { $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\kappa$} τότε $P(A) = p_1 + p_2 + \ldots + p_\kappa = \frac{\kappa}{36}$, που είναι ακριβώς το ίδιο με αυτό που λέει ο κλασικός ορισμός. Άρα οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι στην περίπτωση αυτή.

Εφαρμογές

Εφαρμογή 2

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένας δίσκος, χωρισμένος σε χρωματισμένους κυκλικούς τομείς. Ο δίσκος χρησιμεύει σε ένα παιχνίδι με τους εξής κανόνες. Κάθε παίκτης επιλέγει ένα χρώμα και ένας από όλους περιστρέφει το βέλος με δύναμη. Το βέλος σταματάει την περιστροφή του. Νικητής είναι ο παίκτης που είχε επιλέξει το χρώμα του τομέα που σταμάτησε το βέλος.



Αν το βέλος σταματήσει μεταξύ δύο τομέων, τότε θεωρούμε ότι βρίσκεται στον τομέα που είναι το μεγαλύτερο μέρος του. Αν σταματήσει έτσι ώστε να μην είναι φανερό σε ποιον τομέα βρίσκεται το μεγαλύτερο μέρος του, η περιστροφή του βέλους επαναλαμβάνεται.

α) Η Γιάννα και ο Λεωνίδας προσπάθησαν να μοντελοποιήσουν το πείραμα τύχης ορίζοντας δ.χ. Ω = $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ με τα απλά ενδεχόμενα:

ω_1: «το βέλος σταματάει στο πράσινο»

ω_2: «το βέλος σταματάει στο γαλάζιο»

ω_3: «το βέλος σταματάει στο κίτρινο»

ω_4: «το βέλος σταματάει στο γκρι»

ω_5: «το βέλος σταματάει στο κόκκινο»

Όμως ακολούθησαν δύο διαφορετικούς τρόπους:

Η Γιάννα αντιστοίχισε πιθανότητα $p_i = \frac{1}{5}$, σε κάθε ένα από τα $\{\omega_i\}$.

Ο Λεωνίδας αντιστοίχισε πιθανότητα p_i ίση με τις μοίρες του τομέα του αντίστοιχου χρώματος. Π.χ. $p_1 = 60$.
Να σχολιάσετε τους δύο τρόπους μοντελοποίησης.

β) Να βρείτε τις πιθανότητες να κερδίσει κάθε παίκτης, σε σχέση με το χρώμα που επέλεξε.

<u>Λύση</u>

α) Γιάννα: Σε αυτή την περίπτωση η αντιστοιχία που ορίζεται είναι συνεπής με τα τρία αξιώματα του αξιωματικού ορισμού των πιθανοτήτων.
Όμως, από την άλλη μεριά, αυτή η αντιστοίχιση δεν εκφράζει την αντίληψή μας για τις πιθανότητες έκβασης του συγκεκριμένου πειράματος τύχης. Π.χ.

$$p_1 = p_2 = \frac{1}{5}$$

Ενώ αυτό που περιμένουμε να ισχύει είναι:

$$p_2 > p_1$$

καθώς ο γαλάζιος τομέας αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη επίκεντρη γωνία.
Συνεπώς, δε θα μπορούσε να μοντελοποιηθεί ρεαλιστικά το πείραμα τύχης με τον τρόπο αυτό.
Λεωνίδας: Σε αυτή την περίπτωση η αντιστοιχία που ορίζεται μπορεί να είναι συμβατή με την αντίληψή μας για την έκβαση του πειράματος τύχης, ωστόσο η μοντελοποίηση είναι προβληματική, γιατί:

— Αν μετρούσαμε τη γωνία σε rad, η τιμή της πιθανότητας κάθε απλού ενδεχομένου θα άλλαζε, ενώ η πιθανότητα πρέπει να είναι ανεξάρτητη από μονάδες μέτρησης.

— Δεν είναι συμβατή με την απαίτηση $P(\Omega)=1$ του αξιωματικού ορισμού καθώς προκύπτει $P(\Omega)=360$.

Στην πράξη, ορίζοντας με αυτό τον τρόπο την αντιστοιχία δεν μπορεί να απαντηθεί το εξής ερώτημα:

«Τι είναι πιθανότερο από τα επόμενα; Να σταματήσει το βέλος στο πράσινο χρώμα ή να έρθει άθροισμα 7, μετά από ρίψη δύο ζαριών;»
Συνεπώς, και αυτός ο τρόπος μοντελοποίησης είναι λανθασμένος.

β) Για να απαντήσουμε πρέπει να μοντελοποιήσουμε σωστά το πείραμα τύχης. Αν θεωρήσουμε ότι το βέλος περιστρέφεται χωρίς να «φρενάρει» ξαφνικά πάνω από κάποιο χρώμα, δηλαδή η περιστροφή του γίνεται με «φυσιολογικό» τρόπο (ή αλλιώς αμερόληπτα), τότε αναμένουμε η πιθανότητα του ενδεχομένου «Το βέλος σταματάει στο χρώμα Χ» να είναι ανάλογη της επίκεντρης γωνίας του τομέα χρώματος Χ.

Χρήση του αξιωματικού ορισμού

Έτσι μοντελοποιούμε το πείραμα τύχης με έναν δ.χ.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$$

ώστε κάθε ένα από τα απλά ενδεχόμενα $\{\omega_i\}$ να αντιστοιχεί σε ένα από τα πέντε χρώματα του δίσκου, όπως στην εκφώνηση, και ορίζουμε την πιθανότητα p_i ως εξής:

$$p_i = \frac{\text{οι μοίρες του τομέα που αντιστοιχεί στο } \omega_i}{360^o}$$

Π.χ. Η πιθανότητα του ενδεχομένου «το βέλος σταματάει στον πράσινο τομέα» είναι:

$$p_1 = \frac{60^o}{360^o} = \frac{1}{6}$$

Στη συνέχεια η πιθανότητα οποιουδήποτε ενδεχομένου του πειράματος τύχης μπορεί να υπολογιστεί με βάση τα p_i.
Π.χ. αν Α: «το βέλος σταματάει στο πράσινο ή στο γαλάζιο», τότε:

$$A = \{\omega_1\} \cup \{\omega_2\}$$

Άρα:

$$P(A) = p_1 + p_2 = \frac{1}{6} + \frac{5}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

Ασκήσεις – Προβλήματα – Δραστηριότητες

1) Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια και καταγράφουμε το αποτέλεσμα των ρίψεων. Ποιες είναι οι πιθανότητες των ενδεχομένων:

α) Το άθροισμα των ρίψεων είναι ίσο με 4.

β) Το άθροισμα των ρίψεων είναι μεγαλύτερο του 4.

γ) Το άθροισμα των ρίψεων είναι περιττός αριθμός.

2) Να αποδείξετε ότι ο απλός προσθετικός νόμος προκύπτει ως συνέπεια του κλασικού ορισμού.

3) Ένα κέρμα είναι κατασκευασμένο έτσι ώστε κατά τη ρίψη του η πιθανότητα του ενδεχομένου «εμφανίζεται κεφαλή» είναι 0,95. Θεωρείτε ότι το πείραμα αυτό είναι πείραμα τύχης;

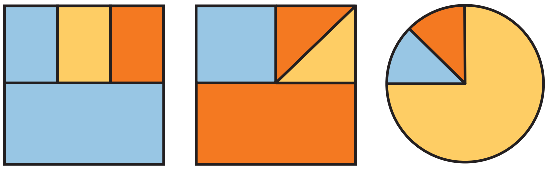
4) Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια και καταγράφουμε το αποτέλεσμα των ρίψεων. Να αντιστοιχίσετε τα ενδεχόμενα της 1ης στήλης με τις πιθανότητες της 2ης στήλης:

1η στήλη
— Έρχεται διπλή ζαριά (το ίδιο αποτέλεσμα και στα δύο ζάρια.)
— Το αποτέλεσμα του ενός μόνο ζαριού είναι περιττός αριθμός.
— Το αποτέλεσμα του ενός μόνο ζαριού είναι άρτιος αριθμός.
— Τουλάχιστον ένα από τα δύο ζάρια φέρνει άρτιο αποτέλεσμα.
— Το αποτέλεσμα και των δύο ζαριών είναι άρτιος αριθμός.
— Το άθροισμα των αποτελεσμάτων των δύο ζαριών είναι άρτιος αριθμός.

2η στήλη
$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{4}$
$\frac{3}{4}$
0,5

5) Να μοντελοποιήσετε το πείραμα τύχης της εφαρμογής 2, χρησιμοποιώντας το μέτρο του κάθε τόξου σε rad αντί σε μοίρες, για να ορίσετε τις πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων ω_i. Να συγκρίνετε τους δύο τρόπους μοντελοποίησης. Τι παρατηρείτε;

6) Κάθε ένα από τα παρακάτω τρία σχήματα (δύο τετράγωνα και ένα κυκλικό) εμφανίζεται στην οθόνη ενός από τρεις ίδιους ηλεκτρονικούς υπολογιστές.



Πλαίσιο 1 Πλαίσιο 2 Πλαίσιο 3

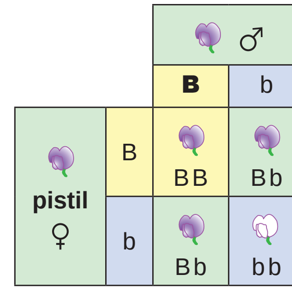
Ένα πρόγραμμα στον υπολογιστή επιλέγει τυχαία και χρωματίζει με μαύρο χρώμα ένα pixel μέσα στο σχήμα. Σε κάθε πλαίσιο ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου το pixel που θα χρωματιστεί:

α) Να ήταν κόκκινο;

β) Να ήταν γαλάζιο ή κίτρινο;

γ) Να μην ήταν κόκκινο;

7) Ο βοτανολόγος Γκρέγκορ Μέντελ, στα μέσα του 19ου αιώνα, πειραματίστηκε με την εμφάνιση των κληρονομικών χαρακτηριστικών των μοσχομπίζελων, διατυπώνοντας τους νόμους της Μενδελικής κληρονομικότητας. Από τα πειράματά του συμπέρανε τον νόμο της ομοιομορφίας, σύμφωνα με τον οποίο το χρώμα του άνθους μοσχομπίζελου είναι αποτέλεσμα του συνδυασμού δύο «κληρονομικών παραγόντων» που σήμερα ονομάζονται αλληλόμορφα γονίδια. Για το χρώμα υπάρχουν δύο γονίδια: το επικρατές B, που αντιστοιχεί στο ιώδες και το υπολειπόμενο b που αντιστοιχεί στο λευκό χρώμα.



Σε ένα φυτό, το χρώμα του άνθους του οφείλεται σε ένα αλληλόμορφο γονίδιο που κληρονομεί από το πατρικό μοσχομπίζελο κι ένα αλληλόμορφο γονίδιο που κληρονομεί από το μητρικό. Όπως φαίνεται στον πίνακα για να προκύψει μοσχομπίζελο με λευκό άνθος, πρέπει και τα δύο αλληλόμορφα γονίδια να είναι τύπου b. Σε κάθε άλλη περίπτωση προκύπτει μοσχομπίζελο με ιώδες άνθος.

Διασταυρώνουμε δύο μοσχομπίζελα: ένα τύπου BB και ένα με λευκό άνθος. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να προκύψει μοσχομπίζελο με λευκό άνθος:

α) στην 1η (θυγατρική) γενιά.

β) στην 2η (θυγατρική) γενιά.

8) Σε ένα μαιευτήριο τον προηγούμενο μήνα από τα παιδιά που γεννήθηκαν το 30% ήταν αγόρια και το 70% ήταν κορίτσια. Με ποιες από τις παρακάτω προτάσεις συμφωνείτε;

α) Σε αυτό το μαιευτήριο τον προηγούμενο μήνα γεννήθηκαν περισσότερα κορίτσια.

β) Αν ένα ζευγάρι που περιμένει παιδί επιλέξει αυτό το μαιευτήριο για τον τοκετό, τότε η πιθανότητα να γεννηθεί κορίτσι είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να γεννηθεί αγόρι.

γ) Αν επιλέξουμε τυχαία ένα παιδί από τον κατάλογο των νεογέννητων του προηγούμενου μήνα σε αυτό το μαιευτήριο, τότε η πιθανότητα να είναι αγόρι είναι ίση με 0,3.

δ) Αν επιλέξουμε ένα παιδί στην τύχη από την λίστα των παιδιών που έχουν γεννηθεί σε αυτό το μαιευτήριο, τότε η πιθανότητα να είναι κορίτσι είναι 0,7.

9) Σε μία κλειστή κάλπη τοποθετούνται 5 κόκκινα και 6 πράσινα σφαιρίδια. Από την κάλπη βγάζουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο. Αφού βγάλουμε το σφαιρίδιο, ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου να υπάρχει στην κάλπη ίδιος αριθμός σφαιριδίων από τα δύο χρώματα; Αν στην κάλπη αρχικά υπήρχαν περισσότερα σφαιρίδια, αλλά πάλι τα πράσινα ήταν περισσότερα από τα κόκκινα κατά 1, να διερευνήσετε αν και πόσο θα άλλαζε η πιθανότητα του ίδιου ενδεχομένου;

10) Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο κέρμα δύο φορές και καταγράφουμε το αποτέλεσμα. Ορίζουμε τα παρακάτω ενδεχόμενα:

Α: έρχεται το πολύ μία φορά Κεφαλή.

Β: έρχεται τουλάχιστον μία φορά Κεφαλή.

Γ: το αποτέλεσμα των δύο ρίψεων είναι διαφορετικό.

Δ: το αποτέλεσμα των δύο ρίψεων είναι το ίδιο.

α) Να αποδείξετε ότι P(A)=P(B) και ότι P(Γ) = P(Δ).

β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$.

γ) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων Γ΄, $Γ \cap Δ$, $Γ \cup Δ$, $B \cup Γ΄$.

Πρόσθετο Υλικό

Ερωτήματα για διερεύνηση

1) Από τον ορισμό της πιθανότητας (κλασικό και αξιωματικό) γνωρίζετε ότι $A = \varnothing \Rightarrow P(A) = 0$. Ισχύει το αντίστροφο; Μπορεί να υπάρχει ενδεχόμενο Α ενός δ.χ., που να μην είναι κενό και να ισχύει P(A) = 0 ;

2) **α)** Παρακάτω περιγράφεται ένα παιχνίδι (πείραμα τύχης) με αμερόληπτο κέρμα, για δύο παίκτες, την Άννα και τον Βασίλη.
Η Άννα κάνει 2 ρίψεις του κέρματος, στη συνέχεια κάνει 1 ρίψη ο Βασίλης και καταγράφεται το αποτέλεσμα των ρίψεων. Η Άννα κερδίζει αν φέρνει περισσότερες κεφαλές (Κ) από τον Βασίλη. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις κερδίζει ο Βασίλης. Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει η Άννα; Είναι δίκαιο το παιχνίδι;
β) Τι θεωρείτε ότι θα συνέβαινε στην πιθανότητα να κερδίσει η Άννα στο προηγούμενο παιχνίδι, αν γίνονταν περισσότερες ρίψεις του νομίσματος (η Άννα κάνει ν+1 ρίψεις και ο Βασίλης ν ρίψεις);

3) Αφού διαβάσετε το παρακάτω απόσπασμα να διερευνήσετε τα ερωτήματα (α) και (β), που ακολουθούν.

Συνθετική εργασία

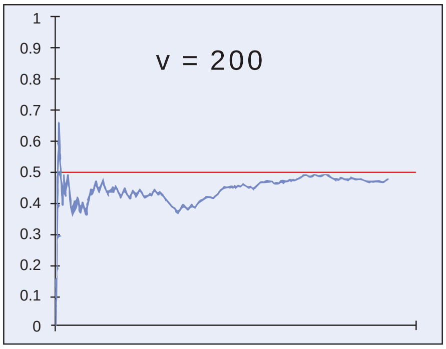
Ο νόμος των μεγάλων αριθμών

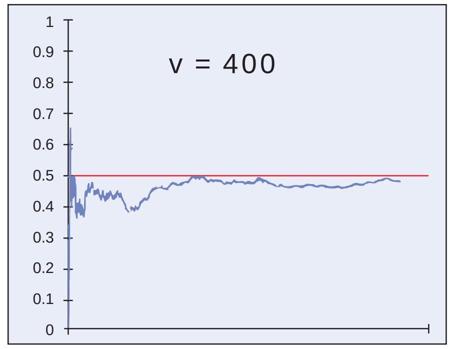
Σε έναν πίνακα καταγράφονται τα αποτελέσματα της εκτέλεσης του ακόλουθου πειράματος:

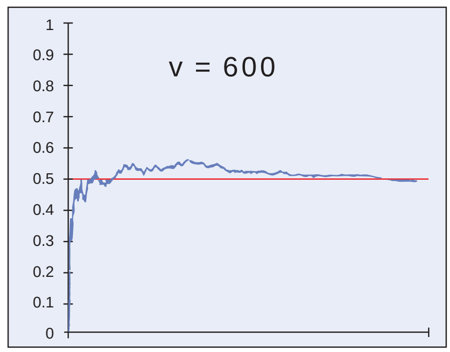
ν	κ	$\frac{κ}{ν}$
10	7	0,7
20	13	0,65
30	16	0,533
40	23	0,575
50	26	0,52
…	…	…
180	89	0,494
190	93	0,489
200	99	0,495

Ρίχνουμε ένα συμμετρικό και ομογενές νόμισμα και σημειώνουμε με Κ το αποτέλεσμα "κεφαλή" και με Γ το αποτέλεσμα "γράμματα". Στο διπλανό απόσπασμα του πίνακα φαίνονται το πλήθος των ρίψεων (ν), το πλήθος εμφάνισης Κ (κ) και ο λόγος $\frac{κ}{ν}$. Παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται ο αριθμός ν των ρίψεων ο λόγος $\frac{κ}{ν}$ σταθεροποιείται γύρω από την τιμή 0,5 ή, όπως λέμε, "τείνει" στον αριθμό 0,5.

Αντίστοιχα, το ίδιο φαίνεται και στα παρακάτω διαγράμματα.



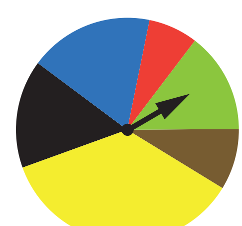




Στον οριζόντιο άξονα παριστάνεται το πλήθος των ρίψεων (ν) και στον κατακόρυφο άξονα η τιμή του λόγου $\frac{\kappa}{\nu}$, *όπου κ είναι το πλήθος εμφάνισης Κ (όπως αναφέρεται και παραπάνω). Το διάγραμμα πάνω αριστερά αντιστοιχεί σε μία αλληλουχία 200 ρίψεων, το πάνω δεξιά σε αλληλουχία 400 ρίψεων και το κάτω διάγραμμα σε αλληλουχία 600 ρίψεων.*

Αυτό επιβεβαιώνει την «αντίληψή» μας για το αποτέλεσμα της ρίψης ενός «αμερόληπτου» νομίσματος. Σε ανάλογα συμπεράσματα οδηγούμαστε και με άλλα παραδείγματα, όπως η ρίψη του ζαριού, που εκεί η συχνότητα εμφάνισης κάθε όψης τείνει στο $\frac{1}{6}$. *Το εμπειρικό αυτό εξαγόμενο, το οποίο αποδεικνύεται και θεωρητικά, ονομάζεται στατιστική ομαλότητα ή νόμος των μεγάλων αριθμών.*

α) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένας δίσκος που λειτουργεί όπως ο δίσκος της εφαρμογής 2 και χρησιμοποιείται για ένα αντίστοιχο παιχνίδι. Τρία παιδιά, η Άννα, η Ντενίζ και ο Κυριάκος πριν παίξουν, θέλουν να έχουν μία «εικόνα» για το πόσο πιθανό είναι το βέλος να σταματήσει σε κάθε χρώμα. Ωστόσο, δε γνωρίζουν αν το βέλος περιστρέφεται αμερόληπτα. Αποφάσισαν, λοιπόν, να κάνουν 100 δοκιμές περιστρέφοντας το βέλος και να καταγράψουν πόσες φορές σταματά πάνω από κάθε χρώμα.



Βρήκαν:

Χρώμα που σταμάτησε το βέλος	Πόσες φορές
Κίτρινο	18
Μαύρο	20
Μπλέ	17
Πράσινο	17
Κόκκινο	15
Καφέ	13

Η Άννα ισχυρίζεται ότι η πιθανότητα να σταματήσει το βέλος στο κίτρινο είναι 0,18. Ο Κυριάκος θεωρεί ότι το βέλος δεν περιστρέφεται αμερόληπτα, γιατί το εμβαδόν του κίτρινου τομέα είναι πολύ μεγαλύτερο του εμβαδού του μαύρου τομέα. Η Ντενίζ προτείνει ότι δεν είναι ασφαλές να βγάλουν συμπέρασμα με 100 στριψίματα και ότι χρειάζεται να στρίψουν το βέλος πολλές φορές ακόμα. Πώς σχολιάζετε τις ενέργειες και τις εικασίες των παιδιών;

β) Μία παρέα παιδιών η Ελένη, ο Χασάν, ο Βαγγέλης και η Γιάννα θέλουν να παίξουν με ένα μισογεμάτο μπουκάλι. Το πετάει κάποιος από όλους στον αέρα, ενώ προηγουμένως έχουν όλοι δηλώσει αν θα σταθεί όρθιο ή όχι. Όποιος «μαντέψει» σωστά, κερδίζει. Για να περιγράψουν πόσο πιθανό είναι να σταθεί το μπουκάλι όρθιο, τα παιδιά σκέφτηκαν το εξής: Θα πετάξουν 100 φορές το μπουκάλι στον αέρα και θα καταγράψουν πόσες φορές θα σταθεί όρθιο. Αν σταθεί ν φορές όρθιο τότε θα ορίσουν την πιθανότητα του ενδεχομένου «το μπουκάλι στέκεται όρθιο» ίση με $\frac{ν}{100}$ και του ενδεχομένου «το μπουκάλι δε στέκεται όρθιο» ίση με $1-\frac{ν}{100}$.

Πώς σχολιάζετε την εικασία των παιδιών;

Συνθετική εργασία

Ο Γκρέγκορ Γιόχαν Μέντελ ήταν Αυστριακός μοναχός και βοτανολόγος. Έκανε τα πειράματά του στο μοναστήρι που ζούσε, στο Μπρυν της Αυστροουγγαρίας. Η δημοσίευση των συμπερασμάτων του δεν έτυχε προσοχής από την επιστημονική κοινότητα της εποχής με αποτέλεσμα ο Μέντελ να επηρεαστεί και να εγκαταλείψει τα πειράματά του για πάντα, ασχολούμενος με τη διοίκηση του μοναστηριού όπου ζούσε.

4) Ανάμεσα στα έτη 1856 και 1863, ο Μέντελ καλλιέργησε και μελέτησε περίπου 28.000 μπιζελιές διατυπώνοντας τους νόμους του για την κληρονομικότητα.

α) Να ερευνήσετε γιατί ο Μέντελ χρησιμοποίησε μοσχομπίζελα στα πειράματά του.

β) Ένας σύγχρονος βοτανολόγος επανέλαβε το πείραμα του Μέντελ ξεκινώντας (πατρική γενιά) από μοσχομπίζελα τύπου ΒΒ και μοσχομπίζελα με λευκό άνθος, ώστε όσα είναι τα μεν να είναι και τα δε. Τελικά, όταν έφτασε στην 2η θυγατρική γενιά μοσχομπίζελων υπήρχαν 433 ιώδη και 170 λευκά μοσχομπίζελα. Να σχολιάσετε τα αποτελέσματα του πειράματος.

Προτεινόμενες ασκήσεις από την παράγραφο 1.2 του βιβλίου «Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων» της Α΄ Λυκείου:
Α΄ ομάδας: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Ερωτήσεις κατανόησης 1^{ου} κεφαλαίου: 1, 2.