

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.2 : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ: ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Λύσεις των Ασκήσεων

Άσκηση 1

Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια και καταγράφουμε το αποτέλεσμα των ρίψεων. Ποιες είναι οι πιθανότητες των ενδεχομένων:

- α) Το άθροισμα των ρίψεων είναι ίσο με 4.
- β) Το άθροισμα των ρίψεων είναι μεγαλύτερο του 4.
- γ) Το άθροισμα των ρίψεων είναι περιττός αριθμός.

Λύση

Ως δ.χ. του πειράματος τύχης θεωρούμε τον Ω που παριστάνεται με τον παρακάτω πίνακα:

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Είναι $N(\Omega) = 36$.

α) Έστω A το ενδεχόμενο «το άθροισμα των ρίψεων είναι ίσο με 4».

Είναι $A = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}$, άρα $P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

β) Έστω B το ενδεχόμενο «το άθροισμα των ρίψεων είναι μεγαλύτερο του 4».

Το πλήθος των στοιχείων του B είναι $N(B) = 30$.

Άρα $P(B) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$.

γ) Έστω Γ το ενδεχόμενο «το άθροισμα των ρίψεων είναι περιττός αριθμός».

Π.χ. ένα στοιχείο του Γ είναι το (2,1) καθώς $2+1=3$, περιττός.

Είναι $N(\Gamma) = 18$ και $P(\Gamma) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι ο απλός προσθετικός νόμος προκύπτει ως συνέπεια του κλασικού ορισμού.

Λύση

Έστω δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω , τα οποία είναι ασυμβίβαστα.

Επίσης υποθέτουμε ότι $N(\Omega) = n$, $N(A) = \alpha$ και $N(B) = \beta$.

Τότε, όλα τα στοιχεία των A και B αποτελούν την ένωση $A \cup B$. Επίσης, κανένα στοιχείο των A και B δεν είναι κοινό, καθώς είναι ασυμβίβαστα. Επομένως, το πλήθος των στοιχείων της ένωσης είναι $\alpha + \beta$, δηλαδή $N(A \cup B) = \alpha + \beta$.

$$\text{Άρα, } P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{\alpha + \beta}{v} = \frac{\alpha}{v} + \frac{\beta}{v} = P(A) + P(B).$$

Άσκηση 3

Ένα κέρμα είναι κατασκευασμένο έτσι ώστε κατά τη ρίψη του η πιθανότητα του ενδεχομένου «εμφανίζεται κεφαλή» είναι 0,95. Θεωρείτε ότι το πείραμα αυτό είναι πείραμα τύχης;

Λύση

Ναι, είναι πείραμα τύχης, καθώς δεν μπορούμε να προβλέψουμε την έκβασή του. Αν και η πιθανότητα του ενδεχομένου «εμφανίζεται κεφαλή» είναι αρκετά μεγάλη, δηλαδή 0,95, ωστόσο η πιθανότητα του ενδεχομένου «εμφανίζονται γράμματα» είναι $1 - 0,95 = 0,05$, δηλαδή υπάρχει. Άρα δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα την έκβαση της ρίψης του κέρματος.

Με απλά λόγια, σε μια ρίψη του κέρματος είναι πιθανές και οι δύο εκβάσεις και δεν μπορούμε να προβλέψουμε ποιο θα είναι το αποτέλεσμα. Το γεγονός ότι αναμένουμε ως πιο πιθανή έκβαση την εμφάνιση κεφαλής, δεν αίρει την αδυναμία μας να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμα.

Άσκηση 4

Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια και καταγράφουμε το αποτέλεσμα των ρίψεων. Να αντιστοιχίσετε τα ενδεχόμενα της 1ης στήλης με τις πιθανότητες της 2ης στήλης:

1 ^η στήλη	2 ^η στήλη
— Έρχεται διπλή ζαριά (το ίδιο αποτέλεσμα και στα δύο ζάρια.)	$\frac{1}{6}$
— Το αποτέλεσμα του ενός μόνο ζαριού είναι περιττός αριθμός.	$\frac{1}{4}$
— Το αποτέλεσμα του ενός μόνο ζαριού είναι άρτιος αριθμός.	$\frac{3}{4}$
— Τουλάχιστον ένα από τα δύο ζάρια φέρνει άρτιο αποτέλεσμα.	0,5
— Το αποτέλεσμα και των δύο ζαριών είναι άρτιος αριθμός.	
— Το άθροισμα των αποτελεσμάτων των δύο ζαριών είναι άρτιος αριθμός.	

Λύση

Με τη βοήθεια του δειγματικού χώρου του πειράματος τύχης (βλέπε λύση άσκησης 1), βρίσκουμε τα εξής:

Έρχεται διπλή ζαριά: πιθανότητα $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Το αποτέλεσμα του ενός μόνο ζαριού είναι περιττός: πιθανότητα $\frac{18}{36} = \frac{1}{2} = 0,5$.

Το αποτέλεσμα του ενός μόνο ζαριού είναι άρτιος: πιθανότητα, ομοίως 0,5.

Τουλάχιστον ένα από τα δύο ζάρια φέρνει άρτιο αποτέλεσμα: πιθανότητα $\frac{27}{36} = \frac{3}{4}$.

Το αποτέλεσμα και των δύο ζαριών είναι άρτιος αριθμός: πιθανότητα $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

Το άθροισμα των αποτελεσμάτων των δύο ζαριών είναι άρτιος αριθμός: πιθανότητα 0,5.

Άσκηση 5

Να μοντελοποιήσετε το πείραμα τύχης της εφαρμογής 2, χρησιμοποιώντας το μέτρο του κάθε τόξου σε rad αντί σε μοίρες, για να ορίσετε τις πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων ω_i . Να συγκρίνετε τους δύο τρόπους μοντελοποίησης. Τι παρατηρείτε;

Λύση

Μετατρέπουμε τις μοίρες σε ακτίνια (rad) για κάθε ένα από τα τόξα.

Όλος ο κύκλος αντιστοιχεί σε 2π ακτίνια (rad).

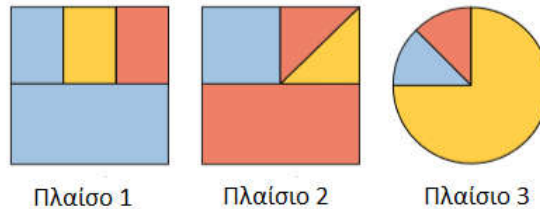
Επίσης για να υπολογίσουμε μια γωνία (ή ένα τόξο) σε ακτίνια βρίσκουμε τον λόγο της γωνίας (ή του τόξου) προς τις 360° (κύκλος) και πολλαπλασιάζουμε επί 2π , δηλαδή επί τον κύκλο σε ακτίνια.

Χρώμα	Μοίρες	Ακτίνια (rad)	Πιθανότητα αντίστοιχου ενδεχομένου
Πράσινο	60°	$\frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi = \frac{1}{6} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3}$	$p_1 = \frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{2\pi}{1}} = \frac{1 \cdot \pi}{3 \cdot 2\pi} = \frac{1}{6}$
Γαλάζιο	100°	$\frac{100^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi = \frac{5\pi}{9}$	$p_2 = \frac{\frac{5\pi}{9}}{2\pi} = \frac{5\pi}{9 \cdot 2\pi} = \frac{5}{18}$
Κίτρινο	40°	$\frac{40^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{9}$	$p_3 = \frac{\frac{2\pi}{9}}{2\pi} = \frac{2\pi}{9 \cdot 2\pi} = \frac{1}{9}$
Γκρι	110°	$\frac{110^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi = \frac{11\pi}{18}$	$p_4 = \frac{\frac{11\pi}{18}}{2\pi} = \frac{11\pi}{18 \cdot 2\pi} = \frac{11}{36}$
Κόκκινο	50°	$\frac{50^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi = \frac{5\pi}{18}$	$p_5 = \frac{\frac{5\pi}{18}}{2\pi} = \frac{5\pi}{18 \cdot 2\pi} = \frac{5}{36}$

Παρατηρούμε ότι οι πιθανότητες των ενδεχομένων p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 είναι ίδιες, ανεξάρτητα αν η μοντελοποίηση θα γίνει χρησιμοποιώντας μοίρες ή ακτίνια (rad).

Άσκηση 6

Κάθε ένα από τα παρακάτω τρία σχήματα (δύο τετράγωνα και ένα κυκλικό) εμφανίζεται στην οθόνη ενός από τρεις ίδιους ηλεκτρονικούς υπολογιστές.



Ένα πρόγραμμα στον υπολογιστή επιλέγει τυχαία και χρωματίζει με μαύρο χρώμα ένα pixel μέσα στο σχήμα. Σε κάθε πλαίσιο ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου, το pixel που θα χρωματιστεί:

- α) Να ήταν κόκκινο;
- β) Να ήταν γαλάζιο ή κίτρινο;
- γ) Να μην ήταν κόκκινο;

Λύση

Μοντελοποιούμε το πείραμα τύχης ως εξής, σε κάθε πλαίσιο:

Ω : δειγματικός χώρος το σύνολο των pixel στο σχήμα

A_X : το ενδεχόμενο «το pixel που γίνεται μαύρο ήταν χρώματος X »

$$P(A_X) = \frac{\text{εμβαδόν μέρους σχήματος με χρώμα } X}{\text{συνολικό εμβαδόν σχήματος}} = \text{μέρος του συνολικού εμβαδού με χρώμα } X$$

Για το πλαίσιο 1

Προσεγγιστικά, μπορούμε να υποθέσουμε (όπως στο παρακάτω σχήμα) ότι το πλαίσιο 1 αποτελείται από 6 ίσα ορθογώνια, από τα οποία τα 4 είναι γαλάζια, το ένα κόκκινο και το ένα κίτρινο.

Οπότε, η επιφάνεια κόκκινου χρώματος είναι το $\frac{1}{6}$ του πλαισίου 1,

η επιφάνεια κίτρινου χρώματος είναι το $\frac{1}{6}$ του πλαισίου 1, και

η επιφάνεια γαλάζιου χρώματος είναι τα $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ του πλαισίου 1.

Έτσι έχουμε:



α) $P(A_{\text{ΚΟΚΚΙΝΟ}}) = \frac{1}{6}$.

β) $P(A_{\text{ΚΙΤΡΙΝΟ}}) = \frac{1}{6}$ και $P(A_{\text{ΓΑΛΑΖΙΟ}}) = \frac{2}{3}$. Άρα, από τον απλό προσθετικό νόμο είναι:

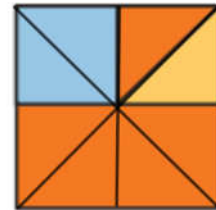
$$P(A_{\text{ΓΑΛΑΖΙΟ}} \cup A_{\text{ΚΙΤΡΙΝΟ}}) = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

γ) Το ενδεχόμενο «το ρικελ που γίνεται μαύρο δεν ήταν κόκκινο» είναι ίδιο με το ενδεχόμενο «το ρικελ που γίνεται μαύρο ήταν γαλάζιο ή κίτρινο», του οποίου η πιθανότητα έχει υπολογιστεί στο β) και είναι ίση με $\frac{5}{6}$.

Για το πλαίσιο 2

Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι:

Η επιφάνεια γαλάζιου χρώματος είναι το $\frac{1}{4}$ του πλαισίου 2, του



κίτρινου χρώματος είναι το $\frac{1}{8}$ του πλαισίου 2 και του κόκκινου χρώματος είναι τα $\frac{5}{8}$ του πλαισίου 2. Άρα, οι απαντήσεις στα ερωτήματα της άσκησης είναι:

α) $\frac{5}{8}$, β) $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$, γ) $\frac{3}{8}$.

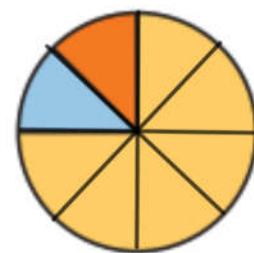
Για το πλαίσιο 3

Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε:

Η επιφάνεια γαλάζιου χρώματος είναι το $\frac{1}{8}$ του πλαισίου 3.,

του κόκκινου χρώματος είναι το $\frac{1}{8}$ του πλαισίου 3 και του

κίτρινου χρώματος είναι τα $\frac{3}{4}$ του πλαισίου 3.



Άρα, οι απαντήσεις στα ερωτήματα της άσκησης είναι:

α) $\frac{1}{8}$, β) $\frac{1}{8} + \frac{3}{4} = \frac{7}{8}$, γ) $\frac{7}{8}$.

Άσκηση 7

Ο βοτανολόγος Γκρέγκορ Μέντελ, στα μέσα του 19^{ου} αιώνα, πειραματίστηκε με την εμφάνιση των κληρονομικών χαρακτηριστικών των μωσχομπίζελων, διατυπώνοντας τους νόμους της Μενδελικής κληρονομικότητας. Από τα πειράματά του συμπέρανε τον νόμο της ομοιομορφίας, σύμφωνα με τον οποίο το χρώμα του άνθους μωσχομπίζελου είναι αποτέλεσμα του συνδυασμού δύο «κληρονομικών παραγόντων» που σήμερα

		♂	
		B	b
♀	B	BB	Bb
	b	Bb	bb

ονομάζονται αλληλόμορφα γονίδια. Για το χρώμα υπάρχουν δύο γονίδια: το επικρατές B, που αντιστοιχεί στο ιώδες και το υπολειπόμενο b που αντιστοιχεί στο λευκό χρώμα.

Σε ένα φυτό, το χρώμα του άνθους του οφείλεται σε ένα αλληλόμορφο γονίδιο που κληρονομεί από το πατρικό μωσχομπίζελο κι ένα αλληλόμορφο γονίδιο που κληρονομεί από το μητρικό. Όπως φαίνεται στον πίνακα για να προκύψει μωσχομπίζελο με λευκό άνθος, πρέπει και τα δύο αλληλόμορφα γονίδια να είναι τύπου b. Σε κάθε άλλη περίπτωση προκύπτει μωσχομπίζελο με ιώδες άνθος.

Διασταυρώνουμε δύο μωσχομπίζελα: ένα τύπου BB και ένα με λευκό άνθος. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να προκύψει μωσχομπίζελο με λευκό άνθος:

α) στην 1η (θυγατρική) γενιά.

β) στην 2η (θυγατρική) γενιά.

Λύση

α) Το λευκό μωσχομπίζελο της πατρικής γενιάς έχει κληρονομήσει δύο γονίδια b. Άρα είναι τύπου bb. Διασταυρώνουμε τα μωσχομπίζελα και στα αχρωμάτιστα κελιά του πίνακα φαίνονται οι πιθανοί τύποι των μωσχομπίζελων 1ης θυγατρικής γενιάς:

	B	B
b	Bb	Bb
b	Bb	Bb

Ας θεωρήσουμε το πείραμα τύχης «διασταυρώνουμε τα δύο μωσχομπίζελα τύπων BB και bb και γράφουμε τον τύπο ενός μωσχομπίζελου που μπορεί να προκύψει στην 1η θυγατρική γενιά». Ο δ.χ. του πειράματος τύχης είναι:

$$\Omega = \{Bb, Bb, Bb, Bb\}$$

Άρα η πιθανότητα του ενδεχομένου το μωσχομπίζελο να είναι bb (δηλαδή λευκό) είναι 0. Το ενδεχόμενο είναι αδύνατο.

β) Συνεχίζοντας στη 2η θυγατρική γενιά (που προκύπτει από διασταυρώσεις της 1ης), έχουμε:

	B	b
B	BB	Bb
B	Bb	bb

Για το πείραμα τύχης «διασταυρώνουμε τα δύο μοσχομπίζελα τύπων Bb και Bb (1ης γενιάς) και γράφουμε τον τύπο ενός μοσχομπίζελου που μπορεί να προκύψει στην 2η θυγατρική γενιά». Ο δ.χ. του πειράματος τύχης είναι:

$$\Omega = \{BB, Bb, Bb, bb\}$$

Άρα, η πιθανότητα του ενδεχομένου το μοσχομπίζελο να είναι bb (δηλ. λευκό) είναι $\frac{1}{4}$.

Άσκηση 8

Σε ένα μαιευτήριο τον προηγούμενο μήνα από τα παιδιά που γεννήθηκαν το 30% ήταν αγόρια και το 70% ήταν κορίτσια. Με ποιες από τις παρακάτω προτάσεις συμφωνείτε;

α) Σε αυτό το μαιευτήριο τον προηγούμενο μήνα γεννήθηκαν περισσότερα κορίτσια.

β) Αν ένα ζευγάρι που περιμένει παιδί επιλέξει αυτό το μαιευτήριο για τον τοκετό, τότε η πιθανότητα να γεννηθεί κορίτσι είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να γεννηθεί αγόρι.

γ) Αν επιλέξουμε τυχαία ένα παιδί από τον κατάλογο των νεογέννητων του προηγούμενου μήνα σε αυτό το μαιευτήριο, τότε η πιθανότητα να είναι αγόρι είναι ίση με 0,3.

δ) Αν επιλέξουμε ένα παιδί στην τύχη από την λίστα των παιδιών που έχουν γεννηθεί σε αυτό το μαιευτήριο, τότε η πιθανότητα να είναι κορίτσι είναι 0,7.

Λύση

α) Σωστό,

β) Λάθος (δεν προκύπτει από τα δεδομένα τρόπος να τεκμηριώσουμε ότι η γέννηση αγοριού ή κοριτσιού είναι πιθανότερη),

γ) Σωστό,

δ) Λάθος (δεν αναφέρεται στον προηγούμενο μήνα).

Άσκηση 9

Σε μία κλειστή κάλπη τοποθετούνται 5 κόκκινα και 6 πράσινα σφαιρίδια. Από την κάλπη βγάζουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο. Αφού βγάλουμε το σφαιρίδιο, ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου να υπάρχει στην κάλπη ίδιος αριθμός σφαιριδίων από τα δύο χρώματα; Αν στην κάλπη αρχικά υπήρχαν περισσότερα σφαιρίδια, αλλά πάλι τα πράσινα ήταν περισσότερα από τα κόκκινα κατά 1, να διερευνήσετε αν και πόσο θα άλλαζε η πιθανότητα του ίδιου ενδεχομένου.

Λύση

Στην κάλπη υπάρχουν συνολικά 11 σφαιρίδια. Η πιθανότητα να βγάλουμε κόκκινο σφαιρίδιο είναι $\frac{5}{11}$, ενώ η πιθανότητα να βγάλουμε πράσινο σφαιρίδιο είναι $\frac{6}{11}$.

Βγάζουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο από την κάλπη. Το ενδεχόμενο «στην κάλπη απομένει ίδιος αριθμός σφαιριδίων από τα δύο χρώματα» είναι ίδιο με το ενδεχόμενο «το σφαιρίδιο που βγάλαμε είναι πράσινο».

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{6}{11}$.

Για το δεύτερο μέρος της άσκησης, ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν n κόκκινα σφαιρίδια, με $n > 5$ (εφόσον τα σφαιρίδια είναι περισσότερα από πνιν). Τότε τα πράσινα σφαιρίδια είναι $n+1$. Το σύνολο των σφαιριδίων είναι $2n+1$.

Άρα η πιθανότητα να εξάγουμε τυχαία ένα πράσινο σφαιρίδιο από την κάλπη είναι $\frac{n+1}{2n+1}$.

Επομένως η πιθανότητα του ενδεχομένου «στην κάλπη απομένει ίδιος αριθμός σφαιριδίων από τα δύο χρώματα» είναι $\frac{n+1}{2n+1}$.

Η πιθανότητα του ενδεχομένου σε αυτή την περίπτωση θα άλλαζε κατά $\frac{n+1}{2n+1} - \frac{6}{11} = \frac{11(n+1) - 6(2n+1)}{11(2n+1)} = \frac{11n+11-12n-6}{11(2n+1)} = \frac{5-n}{11(2n+1)}$.

Εφόσον $n > 5 \Leftrightarrow n-5 > 0 \Leftrightarrow 5-n < 0$. Άρα $\frac{5-n}{11(2n+1)} < 0$.

Επομένως, σε αυτό το πείραμα τύχης, η πιθανότητα του ενδεχομένου «στην κάλπη απομένει ίδιος αριθμός σφαιριδίων από τα δύο χρώματα» θα μειωνόταν, αν αυξανόταν ο αριθμός των σφαιρών.

Άσκηση 10

Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο κέρμα δύο φορές και καταγράφουμε το αποτέλεσμα. Ορίζουμε τα παρακάτω ενδεχόμενα:

A: έρχεται το πολύ μία φορά Κεφαλή.

B: έρχεται τουλάχιστον μία φορά Κεφαλή.

Γ: το αποτέλεσμα των δύο ρίψεων είναι διαφορετικό.

Δ: το αποτέλεσμα των δύο ρίψεων είναι το ίδιο.

α) Να αποδείξετε ότι $P(A)=P(B)$ και ότι $P(\Gamma)=P(\Delta)$.

β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$.

γ) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων Γ' , $\Gamma \cap \Delta$, $\Gamma \cup \Delta$, $B \cup \Gamma'$.

Λύση

Ένας δ.χ. του πειράματος τύχης είναι $\Omega = \{KK, ΓΚ, ΚΓ, ΓΓ\}$.

Είναι $A = \{ΓΚ, ΚΓ, ΓΓ\}$, $B = \{KK, ΓΚ, ΚΓ\}$, $\Gamma = \{ΓΚ, ΚΓ\}$, $\Delta = \{KK, ΓΓ\}$.

α) Τα A και B έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων, άρα ισχύει $P(A) = P(B)$. Ομοίως, για τα ενδεχόμενα Γ και Δ .

β) $A \cup B = \{KK, ΓΚ, ΚΓ, ΓΓ\} = \Omega$, $A \cap B = \{ΓΚ, ΚΓ\}$, $A - B = \{ΓΓ\}$.

Άρα $P(A \cup B) = P(\Omega) = 1$, $P(A \cap B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $P(A - B) = \frac{1}{4}$.

γ) $\Gamma' = \{\text{ΚΚ}, \text{ΓΓ}\}$, $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$, $\Gamma \cup \Delta = \Omega$, $B \cup \Gamma' = \{\text{ΚΚ}, \text{ΓΚ}, \text{ΚΓ}, \text{ΓΓ}\} = \Omega$.

Άρα $P(\Gamma') = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $P(\Gamma \cap \Delta) = P(\emptyset) = 0$, $P(\Gamma \cup \Delta) = P(\Omega) = 1$, $P(B \cup \Gamma') = 1$.

Πρόσθετο υλικό

Άσκηση 1

Από τον ορισμό της πιθανότητας (κλασικό και αξιωματικό) γνωρίζετε ότι $A = \emptyset \Rightarrow P(A) = 0$. Ισχύει το αντίστροφο; Μπορεί να υπάρχει ενδεχόμενο A ενός δ.χ., που να μην είναι κενό και να ισχύει $P(A) = 0$;

Λύση

Καταρχάς, ο αξιωματικός ορισμός δεν αποκλείει να αποδώσουμε σε κάποιο/α ενδεχόμενο/α πιθανότητα 0. Έτσι, θα μπορούσε να είναι $P(A) = 0$, χωρίς το A να είναι το κενό σύνολο.

Ως παράδειγμα, ας φανταστούμε το πείραμα με τον δίσκο της εφαρμογής 2. Μοντελοποιούμε το πείραμα ως εξής:

Ως δειγματικό χώρο θεωρούμε το σύνολο όλων των δυνατών θέσεων του βέλους. Υποσύνολα του δ.χ. είναι τα ενδεχόμενα

A: "το βέλος σταματάει στο πράσινο"

B: "το βέλος σταματάει στο γαλάζιο"

Γ: "το βέλος σταματάει στο κίτρινο"

Δ: "το βέλος σταματάει στο γκρι"

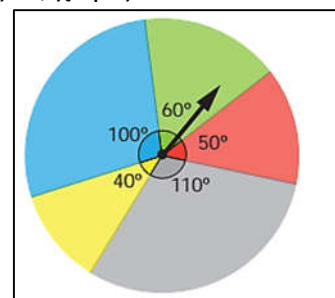
Ε: "το βέλος σταματάει στο κόκκινο"

Αποδίδουμε ως πιθανότητα καθενός από αυτά τα ενδεχόμενα το κλάσμα που δείχνει το μέρος του κύκλου που καλύπτεται με το συγκεκριμένο χρώμα:

$$P(A) = \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{100^\circ}{360^\circ} = \frac{5}{18}, \quad P(\Gamma) = \frac{40^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{9}, \quad P(\Delta) = \frac{110^\circ}{360^\circ} = \frac{11}{36}, \quad P(E) = \frac{50^\circ}{360^\circ} = \frac{5}{36}$$

Η μοντελοποίηση αυτή ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις του αξιωματικού ορισμού.

Σε αυτό το παράδειγμα, το ενδεχόμενο "το βέλος σταματάει στη διαχωριστική γραμμή μεταξύ του κόκκινου και του πράσινου" δεν είναι κενό, αλλά η πιθανότητα να συμβεί είναι 0.



Άσκηση 2

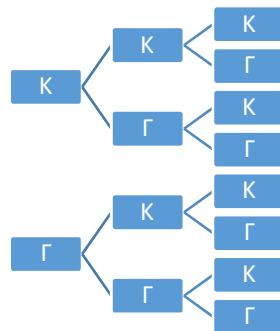
α) Παρακάτω περιγράφεται ένα παιχνίδι (πείραμα τύχης) με αμερόληπτο κέρμα, για δύο παίκτες, την Άννα και τον Βασίλη.

Η Άννα κάνει 2 ρίψεις του κέρματος, στη συνέχεια κάνει 1 ρίψη ο Βασίλης και καταγράφεται το αποτέλεσμα των ρίψεων. Η Άννα κερδίζει αν φέρνει περισσότερες κεφαλές (Κ) από τον Βασίλη. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις κερδίζει ο Βασίλης. Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει η Άννα; Είναι δίκαιο το παιχνίδι;

β) Τι θεωρείτε ότι θα συνέβαινε στην πιθανότητα να κερδίσει η Άννα στο προηγούμενο παιχνίδι, αν γίνονταν περισσότερες ρίψεις του νομίσματος (η Άννα κάνει $n+1$ ρίψεις και ο Βασίλης n ρίψεις);

Λύση

α) Στο παρακάτω δεντροδιάγραμμα οι δύο πρώτες ρίψεις είναι εκείνες που κάνει η Άννα και η τρίτη είναι του Βασίλη.



Ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ\}$

Το ενδεχόμενο "κερδίζει η Άννα" είναι $A = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΓ, ΓΚΓ\}$

Άρα, $P(A)=0,5$. Οπότε, το παιχνίδι είναι δίκαιο.

β) Στην περίπτωση που η Άννα κάνει $n+1$ ρίψεις και ο Βασίλης n ρίψεις, θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A: "η Άννα φέρνει περισσότερα Κ από τον Βασίλη", και

B: "η Άννα φέρνει περισσότερα Γ από τον Βασίλη".

Στο τέλος του παιχνιδιού, εφόσον η Άννα κάνει περισσότερες ρίψεις από τον Βασίλη, σίγουρα ένα από τα A ή B θα έχει συμβεί (δεν μπορεί η Άννα να μην ξεπέρασε ούτε τα Κ ούτε τα Γ του Βασίλη). Οπότε $A \cup B = \Omega$.

Επιπλέον, δεν μπορεί να συμβούν και τα δύο, εφόσον η Άννα κάνει μόνο μία περισσότερη ρίψη. Άρα, τα A και B είναι ασυμβίβαστα: $A \cap B = \emptyset$.

Προφανώς, τα A και B έχουν ίσες πιθανότητες να συμβούν (λόγω συμμετρίας).

Οπότε τελικά $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. Δηλαδή το ενδεχόμενο να κερδίσει η Άννα έχει πιθανότητα

0,5, που σημαίνει ότι το παιχνίδι είναι δίκαιο.