

«Τι είναι πιθανότερο από τα επόμενα; Να σταματήσει το βέλος στο πράσινο χρώμα ή να έρθει άθροισμα 7, μετά από ρίψη δύο ζαριών;»

Συνεπώς, και αυτός ο τρόπος μοντελοποίησης είναι λανθασμένος.

β) Για να απαντήσουμε πρέπει να μοντελοποιήσουμε σωστά το πείραμα τύχης. Αν θεωρήσουμε ότι το βέλος περιστρέφεται χωρίς να «φρενάρει» ξαφνικά πάνω από κάποιο χρώμα, δηλαδή η περιστροφή του γίνεται με «φυσιολογικό» τρόπο (ή αλλιώς αμερόληπτα), τότε αναμένουμε η πιθανότητα του ενδεχομένου «Το βέλος σταματάει στο χρώμα Χ» να είναι ανάλογη της επίκεντρης γωνίας του τομέα χρώματος Χ.

Έτσι μοντελοποιούμε το πείραμα τύχης με έναν δ.χ.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$$

ώστε κάθε ένα από τα απλά ενδεχόμενα $\{\omega_i\}$ να αντιστοιχεί σε ένα από τα πέντε χρώματα του δίσκου, όπως στην εκφώνηση, και ορίζουμε την πιθανότητα p_i ως εξής:

$$p_i = \frac{\text{οι μοίρες του τομέα που αντιστοιχεί στο } \omega_i}{360^\circ}$$

Π.χ. Η πιθανότητα του ενδεχομένου «το βέλος σταματάει στον πράσινο τομέα» είναι:

$$p_1 = \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}$$

Στη συνέχεια η πιθανότητα οποιουδήποτε ενδεχομένου του πειράματος τύχης μπορεί να υπολογιστεί με βάση τα p_i .

Π.χ. αν A : «το βέλος σταματάει στο πράσινο ή στο γαλάζιο», τότε:

$$A = \{\omega_1\} \cup \{\omega_2\}$$

Άρα:

$$P(A) = p_1 + p_2 = \frac{1}{6} + \frac{5}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

Χρήση του
αξιωματικού
ορισμού

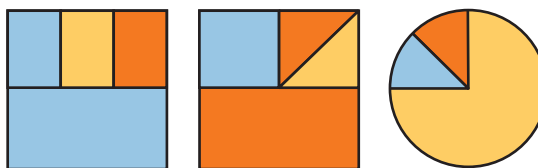
Ασκήσεις – Προβλήματα – Δραστηριότητες

- 1) Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια και καταγράφουμε το αποτέλεσμα των ρίψεων. Ποιες είναι οι πιθανότητες των ενδεχομένων:
 - α) Το άθροισμα των ρίψεων είναι ίσο με 4.
 - β) Το άθροισμα των ρίψεων είναι μεγαλύτερο του 4.
 - γ) Το άθροισμα των ρίψεων είναι περιττός αριθμός.
- 2) Να αποδείξετε ότι ο απλός προσθετικός νόμος προκύπτει ως συνέπεια του κλασικού ορισμού.

- 3) Ένα κέρμα είναι κατασκευασμένο έτσι ώστε κατά τη ρίψη του η πιθανότητα του ενδεχομένου «εμφανίζεται κεφαλή» είναι 0,95. Θεωρείτε ότι το πείραμα αυτό είναι πείραμα τύχης;
- 4) Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια και καταγράφουμε το αποτέλεσμα των ρίψεων. Να αντιστοιχίσετε τα ενδεχόμενα της 1ης στήλης με τις πιθανότητες της 2ης στήλης:

1η στήλη	2η στήλη
— Έρχεται διπλή ζαριά (το ίδιο αποτέλεσμα και στα δύο ζάρια.)	$\frac{1}{6}$
— Το αποτέλεσμα του ενός μόνο ζαριού είναι περιττός αριθμός.	$\frac{1}{4}$
— Το αποτέλεσμα του ενός μόνο ζαριού είναι άρτιος αριθμός.	$\frac{3}{4}$
— Τουλάχιστον ένα από τα δύο ζάρια φέρνει άρτιο αποτέλεσμα.	0,5
— Το αποτέλεσμα και των δύο ζαριών είναι άρτιος αριθμός.	
— Το άθροισμα των αποτελεσμάτων των δύο ζαριών είναι άρτιος αριθμός.	

- 5) Να μοντελοποιήσετε το πείραμα τύχης της εφαρμογής 2, χρησιμοποιώντας το μέτρο του κάθε τόξου σε rad αντί σε μοίρες, για να ορίσετε τις πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων ω_i . Να συγκρίνετε τους δύο τρόπους μοντελοποίησης. Τι παρατηρείτε;
- 6) Κάθε ένα από τα παρακάτω τρία σχήματα (δύο τετράγωνα και ένα κυκλικό) εμφανίζεται στην οθόνη ενός από τρεις ίδιους ηλεκτρονικούς υπολογιστές.



Πλαίσιο 1

Πλαίσιο 2

Πλαίσιο 3

Ένα πρόγραμμα στον υπολογιστή επιλέγει τυχαία και χρωματίζει με μαύρο χρώμα ένα pixel μέσα στο σχήμα. Σε κάθε πλαίσιο ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου το pixel που θα χρωματιστεί:

- α) Να ήταν κόκκινο;
- β) Να ήταν γαλάζιο ή κίτρινο;
- γ) Να μην ήταν κόκκινο;

- 7) Ο βοτανολόγος Γκρέγκορ Μέντελ, στα μέσα του 19^{ου} αιώνα, πειραματίστηκε με την εμφάνιση των κληρονομικών χαρακτηριστικών των μοσχομπίζελων, διατυπώνοντας τους νόμους της Μενδελικής κληρονομικότητας. Από τα πειράματά του συμπίερανε τον νόμο της ομοιομορφίας, σύμφωνα με τον οποίο το χρώμα του άνθους μοσχομπίζελου είναι αποτέλεσμα του συνδυασμού δύο «κληρονομικών παραγόντων» που σήμερα ονομάζονται αλληλόμορφα γονίδια. Για το χρώμα υπάρχουν δύο γονίδια: το επικρατές B, που αντιστοιχεί στο ιώδες και το υπολειπόμενο b που αντιστοιχεί στο λευκό χρώμα.

			 ♂
		B	b
 pistil ♀	B	 BB	 Bb
	b	 Bb	 bb

Σε ένα φυτό, το χρώμα του άνθους του οφείλεται σε ένα αλληλόμορφο γονίδιο που κληρονομεί από το πατρικό μοσχομπίζελο κι ένα αλληλόμορφο γονίδιο που κληρονομεί από το μητρικό. Όπως φαίνεται στον πίνακα για να προκύψει μοσχομπίζελο με λευκό άνθος, πρέπει και τα δύο αλληλόμορφα γονίδια να είναι τύπου b. Σε κάθε άλλη περίπτωση προκύπτει μοσχομπίζελο με ιώδες άνθος.

Διασταυρώνουμε δύο μοσχομπίζελα: ένα τύπου BB και ένα με λευκό άνθος. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να προκύψει μοσχομπίζελο με λευκό άνθος:

- α) στην 1η (θυγατρική) γενιά.
 - β) στην 2η (θυγατρική) γενιά.
- 8) Σε ένα μαιευτήριο τον προηγούμενο μήνα από τα παιδιά που γεννήθηκαν το 30% ήταν αγόρια και το 70% ήταν κορίτσια. Με ποιες από τις παρακάτω προτάσεις συμφωνείτε;
- α) Σε αυτό το μαιευτήριο τον προηγούμενο μήνα γεννήθηκαν περισσότερα κορίτσια.
 - β) Αν ένα ζευγάρι που περιμένει παιδί επιλέξει αυτό το μαιευτήριο για τον τοκετό, τότε η πιθανότητα να γεννηθεί κορίτσι είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να γεννηθεί αγόρι.
 - γ) Αν επιλέξουμε τυχαία ένα παιδί από τον κατάλογο των νεογέννητων του προηγούμενου μήνα σε αυτό το μαιευτήριο, τότε η πιθανότητα να είναι αγόρι είναι ίση με 0,3.
 - δ) Αν επιλέξουμε ένα παιδί στην τύχη από την λίστα των παιδιών που έχουν γεννηθεί σε αυτό το μαιευτήριο, τότε η πιθανότητα να είναι κορίτσι είναι 0,7.
- 9) Σε μία κλειστή κάλπη τοποθετούνται 5 κόκκινα και 6 πράσινα σφαιρίδια. Από την κάλπη βγάζουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο. Αφού βγάλουμε το σφαιρίδιο, ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου να υπάρχει στην κάλπη ίδιος αριθμός σφαιριδίων από τα δύο χρώματα; Αν στην κάλπη αρχικά υπήρχαν περισσότερα σφαιρίδια, αλλά πάλι τα πράσινα ήταν περισσότερα από τα κόκκινα κατά 1, να διερευνήσετε αν και πόσο θα άλλαζε η πιθανότητα του ίδιου ενδεχομένου;
- 10) Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο κέρμα δύο φορές και καταγράφουμε το αποτέλεσμα. Ορίζουμε τα παρακάτω ενδεχόμενα:
- A:** έρχεται το πολύ μία φορά Κεφαλή.
 - B:** έρχεται τουλάχιστον μία φορά Κεφαλή.
 - Γ:** το αποτέλεσμα των δύο ρίψεων είναι διαφορετικό.

Δ: το αποτέλεσμα των δύο ρίψεων είναι το ίδιο.

α) Να αποδείξετε ότι $P(A)=P(B)$ και ότι $P(\Gamma) = P(\Delta)$.

β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$.

γ) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων Γ' , $\Gamma \cap \Delta$, $\Gamma \cup \Delta$, $B \cup \Gamma'$.

Πρόσθετο Υλικό

Ερωτήματα για διερεύνηση

- 1) Από τον ορισμό της πιθανότητας (κλασικό και αξιωματικό) γνωρίζετε ότι $A = \emptyset \Rightarrow P(A) = 0$. Ισχύει το αντίστροφο; Μπορεί να υπάρχει ενδεχόμενο A ενός δ.χ., που να μην είναι κενό και να ισχύει $P(A) = 0$;
- 2) **α)** Παρακάτω περιγράφεται ένα παιχνίδι (πείραμα τύχης) με αμερόληπτο κέρμα, για δύο παίκτες, την Άννα και τον Βασίλη.
Η Άννα κάνει 2 ρίψεις του κέρματος, στη συνέχεια κάνει 1 ρίψη ο Βασίλης και καταγράφεται το αποτέλεσμα των ρίψεων. Η Άννα κερδίζει αν φέρνει περισσότερες κεφαλές (Κ) από τον Βασίλη. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις κερδίζει ο Βασίλης. Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει η Άννα; Είναι δίκαιο το παιχνίδι;
β) Τι θεωρείτε ότι θα συνέβαινε στην πιθανότητα να κερδίσει η Άννα στο προηγούμενο παιχνίδι, αν γίνονταν περισσότερες ρίψεις του νομίσματος (η Άννα κάνει $n+1$ ρίψεις και ο Βασίλης n ρίψεις);
- 3) Αφού διαβάσετε το παρακάτω απόσπασμα να διερευνήσετε τα ερωτήματα (α) και (β), που ακολουθούν.

Συνθετική
εργασία



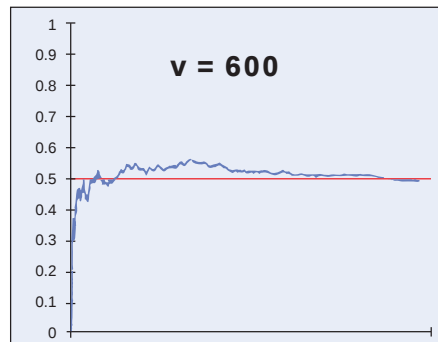
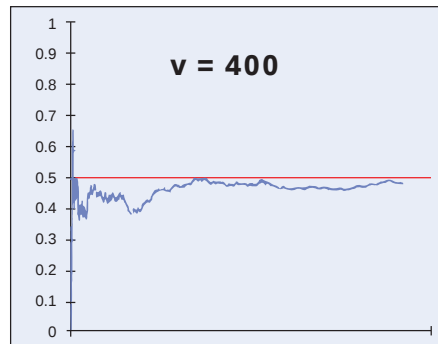
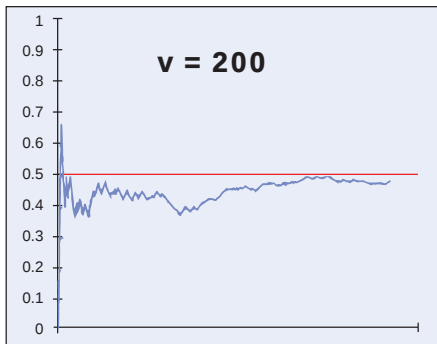
Ο νόμος των μεγάλων
αριθμών

Σε έναν πίνακα καταγράφονται τα αποτελέσματα της εκτέλεσης του ακόλουθου πειράματος:

v	κ	$\frac{\kappa}{v}$
10	7	0,7
20	13	0,65
30	16	0,533
40	23	0,575
50	26	0,52
...	...	...
180	89	0,494
190	93	0,489
200	99	0,495

Ρίχνουμε ένα συμμετρικό και ομογενές νόμισμα και σημειώνουμε με K το αποτέλεσμα “κεφαλή” και με Γ το αποτέλεσμα “γράμματα”. Στο διπλανό απόσπασμα του πίνακα φαίνονται το πλήθος των ρίψεων (v), το πλήθος εμφάνισης K (κ) και ο λόγος $\frac{\kappa}{v}$. Παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται ο αριθμός v των ρίψεων ο λόγος $\frac{\kappa}{v}$ σταθεροποιείται γύρω από την τιμή 0,5 ή, όπως λέμε, “τείνει” στον αριθμό 0,5.

Αντίστοιχα, το ίδιο φαίνεται και στα παρακάτω διαγράμματα.

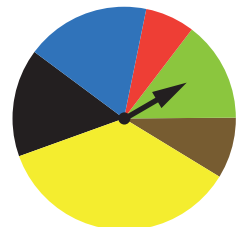


Στον οριζόντιο άξονα παριστάνεται το πλήθος των ρίψεων (ν) και στον κατακόρυφο άξονα η τιμή του λόγου $\frac{\kappa}{\nu}$, όπου κ είναι το πλήθος εμφάνισης K (όπως αναφέρεται και παραπάνω). Το διάγραμμα πάνω αριστερά αντιστοιχεί σε μία αλληλουχία 200 ρίψεων, το πάνω δεξιά σε αλληλουχία 400 ρίψεων και το κάτω διάγραμμα σε αλληλουχία 600 ρίψεων.

Αυτό επιβεβαιώνει την «αντίληψή» μας για το αποτέλεσμα της ρίψης ενός «αμερόληπτου» νομίσματος. Σε ανάλογα συμπεράσματα οδηγούμαστε και με άλλα παραδείγματα, όπως η ρίψη του ζαριού, που εκεί η συχνότητα εμφάνισης κάθε όψης τείνει στο $\frac{1}{6}$. Το εμπειρικό αυτό εξαγόμενο, το οποίο αποδεικνύεται και θεωρητικά, ονομάζεται στατιστική ομαλότητα ή νόμος των μεγάλων αριθμών.

- α) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένας δίσκος που λειτουργεί όπως ο δίσκος της εφαρμογής 2 και χρησιμοποιείται για ένα αντίστοιχο παιχνίδι. Τρία παιδιά, η Άννα, η Ντενίζ και ο Κυριάκος πριν παίξουν, θέλουν να έχουν μία «εικόνα» για το πόσο πιθανό είναι το βέλος να σταματήσει σε κάθε χρώμα. Ωστόσο, δε γνωρίζουν αν το βέλος περιστρέφεται αμερόληπτα. Αποφάσισαν, λοιπόν, να κάνουν 100 δοκιμές περιστρέφοντας το βέλος και να καταγράψουν πόσες φορές σταματά πάνω από κάθε χρώμα.

Βρήκαν:



Χρώμα που σταμάτησε το βέλος	Πόσες φορές
Κίτρινο	18
Μαύρο	20
Μπλέ	17
Πράσινο	17
Κόκκινο	15
Καφέ	13

Η Άννα ισχυρίζεται ότι η πιθανότητα να σταματήσει το βέλος στο κίτρινο είναι 0,18. Ο Κυριάκος θεωρεί ότι το βέλος δεν περιστρέφεται αμερόληπτα, γιατί το εμβαδόν του κίτρινου τομέα είναι πολύ μεγαλύτερο του εμβαδού του μαύρου τομέα. Η Ντενίζ προτείνει ότι δεν είναι ασφαλές να βγάλουν συμπέρασμα με 100 στριψίματα και ότι χρειάζεται να στρίψουν το βέλος πολλές φορές ακόμα. Πώς σχολιάζετε τις ενέργειες και τις εικασίες των παιδιών;



- β) Μία παρέα παιδιών η Ελένη, ο Χασάν, ο Βαγγέλης και η Γιάννα θέλουν να παίξουν με ένα μισογεμάτο μπουκάλι. Το πετάει κάποιος από όλους στον αέρα, ενώ προηγουμένως έχουν όλοι δηλώσει αν θα σταθεί όρθιο ή όχι. Όποιος «μαντέψει» σωστά, κερδίζει. Για να περιγράψουν πόσο πιθανό είναι να σταθεί το μπουκάλι όρθιο, τα παιδιά σκέφτηκαν το εξής: Θα πετάξουν 100 φορές το μπουκάλι στον αέρα και θα καταγράψουν πόσες φορές θα σταθεί όρθιο. Αν σταθεί n φορές όρθιο τότε θα ορίσουν την πιθανότητα του ενδεχομένου «το μπουκάλι στέκεται όρθιο» ίση με $\frac{n}{100}$ και του ενδεχομένου «το μπουκάλι δε

στέκεται όρθιο» ίση με $1 - \frac{n}{100}$.

Πώς σχολιάζετε την εικασία των παιδιών;

**Συνθετική
εργασία**



Ο Γκρέγκορ Γκόχαν Μέντελ ήταν Αυστριακός μοναχός και βοτανολόγος. Έκανε τα πειράματά του στο μοναστήρι που ζούσε, στο Μπρυν της Αυστροουγγαρίας. Η δημοσίευση των συμπερασμάτων του δεν έτυχε προσοχής από την επιστημονική κοινότητα της εποχής με αποτέλεσμα ο Μέντελ να επηρεαστεί και να εγκαταλείψει τα πειράματά του για πάντα, ασχολούμενος με τη διοίκηση του μοναστηριού όπου ζούσε.

- 4) Ανάμεσα στα έτη 1856 και 1863, ο Μέντελ καλλιέργησε και μελέτησε περίπου 28.000 μπιζελιές διατυπώνοντας τους νόμους του για την κληρονομικότητα.
- α) Να ερευνήσετε γιατί ο Μέντελ χρησιμοποίησε μοσχομπίζελα στα πειράματά του.
- β) Ένας σύγχρονος βοτανολόγος επανέλαβε το πείραμα του Μέντελ ξεκινώντας (πατρική γενιά) από μοσχομπίζελα τύπου BB και μοσχομπίζελα με λευκό άνθος, ώστε όσα είναι τα μεν να είναι και τα δε. Τελικά, όταν έφτασε στην 2η θυγατρική γενιά μοσχομπίζελων υπήρχαν 433 ιώδη και 170 λευκά μοσχομπίζελα. Να σχολιάσετε τα αποτελέσματα του πειράματος.

Προτεινόμενες ασκήσεις από την παράγραφο 1.2 του βιβλίου «Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων» της Α' Λυκείου:

Α' ομάδας: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Ερωτήσεις κατανόησης 1^{ου} κεφαλαίου: 1, 2.