ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

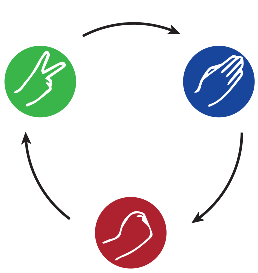
Εισαγωγή

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων είναι ένας σύγχρονος κλάδος των Μαθηματικών που ξεκίνησε να αναπτύσσεται κυρίως μετά τον 16ο αιώνα, αλλά ακόμα περισσότερο τον 18ο αιώνα με τις εργασίες των διάσημων μαθηματικών Bernoulli, de Moivre, Laplace και Gauss. Είναι διαδεδομένη η άποψη ότι η Θεωρία Πιθανοτήτων έχει κυρίως ως εφαρμογή την μοντελοποίηση παιχνιδιών. Στην πραγματικότητα είναι πολύ περισσότερες οι εφαρμογές της στην Πληροφορική, τις Τηλεπικοινωνίες, την Ιατρική, τη Φυσική, σε Θετικές, Κοινωνικές και άλλες επιστήμες. Ήδη από τον 18ο αιώνα ο Laplace δεν περιορίζεται μόνο στη μαθηματική ανάλυση παιχνιδιών, αλλά εφαρμόζει τα συμπεράσματά του και σε ένα πλήθος από επιστημονικά και πρακτικά προβλήματα. Στις μέρες μας η Θεωρία των Πιθανοτήτων με εργασίες διάσημων μαθηματικών όπως οι Chebyshev, Markov, Von Mises και ιδιαίτερα με την αξιωματική θεμελίωση των Πιθανοτήτων από τον Kolmogorov 1933, έχει σημειώσει αλματώδη πρόοδο, παρέχοντας χρήσιμα μοντέλα και μεθόδους ανάλυσης για πολύπλοκα προβλήματα.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τα θεμελιώδη στοιχεία της Θεωρίας Πιθανοτήτων και θα εμπλακούμε στη μοντελοποίηση πολύπλοκων φαινομένων, στα οποία υπάρχει αβεβαιότητα ως προς την έκβασή τους.

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.1. ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΤΥΧΗΣ, ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ ΚΑΙ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Διερεύνηση



Η Άννα και ο Βασίλης παίζουν το γνωστό παιχνίδι «πέτρα, ψαλίδι, χαρτί».

α) Ο Βασίλης σκέφτηκε να διαλέγει συνέχεια «πέτρα». Πιστεύετε ότι αυτή η στρατηγική του δίνει πλεονέκτημα έναντι της Άννας;

β) Η Άννα πρότεινε να αλλάξουν το παιχνίδι και να παίξουν «πέτρα, ψαλίδι, μολύβι, χαρτί». Αν ο Βασίλης διατηρήσει την ίδια στρατηγική τότε ευνοείται από την αλλαγή του παιχνιδιού ή όχι, κατά τη γνώμη σας;

Βασικές μαθηματικές έννοιες-Ιδέες-Διεργασίες

Πειράματα τύχης

Στο περιβάλλον μας υπάρχουν φαινόμενα που μπορούμε να προβλέψουμε την εξέλιξή τους, αν γνωρίζουμε τις συνθήκες υπό τις οποίες συμβαίνουν. Για παράδειγμα, αν έχουμε ένα δοχείο με αποσταγμένο νερό σε θερμοκρασία 32^o Κελσίου και το θερμάνουμε μέχρι η θερμοκρασία του να φτάσει τους 100^o Κελσίου, τότε το νερό θα βράσει. Κάθε τέτοιο πείραμα, που η γνώση των συνθηκών κάτω από τις οποίες εκτελείται μας επιτρέπει να προκαθορίσουμε πλήρως το αποτέλεσμά του, λέγεται αιτιοκρατικό (deterministic) πείραμα.

Από την άλλη μεριά, δεν μπορούμε να προβλέψουμε την εξέλιξη φαινομένων, όπως το πλήθος των κλήσεων ή των δεδομένων που θα δεχτεί ένα τηλεπικοινωνιακό κέντρο μέσα σε μία ώρα ή τη διάρκεια ζωής μιας λάμπας κτλ. Τέτοια πειράματα, το αποτέλεσμα των οποίων δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε και υπάρχει αβεβαιότητα ως προς την έκβασή τους, μολονότι επαναλαμβάνονται (φαινομενικά τουλάχιστον) κάτω από τις ίδιες συνθήκες, ονομάζονται πειράματα τύχης (random experiments) και μελετώνται από τη Θεωρία των Πιθανοτήτων.

Υπάρχουν πειράματα που έχουν «φύση» αιτιοκρατικού πειράματος, αλλά η αβεβαιότητα της έκβασής τους είναι πολύ μεγάλη, λόγω της πολυπλοκότητας του αιτιοκρατικού μοντέλου που τα περιγράφει. Ένα παράδειγμα είναι το στρίψιμο ενός αμερόληπτου (τίμιου) κέρματος: Αν κανείς γνωρίζει με ακρίβεια τις συνθήκες του στριψίματος, θεωρητικά είναι σε θέση να προβλέψει την έκβαση του πειράματος (δηλ. κεφαλή ή γράμματα) με βάση τους νόμους της κλασικής Φυσικής. Ωστόσο, το αποτέλεσμα του στριψίματος είναι εξαιρετικά «ευαίσθητο» σε πολύ μικρές αλλαγές των αρχικών συνθηκών και έτσι η εξαγωγή ενός τύπου που θα προέβλεπε την έκβαση του στριψίματος από τις αρχικές συνθήκες του πειράματος θα ήταν όχι μόνο εξαιρετικά δύσκολη στην πράξη αλλά και μη λειτουργική, λόγω της πολύπλοκης εξάρτησης του αποτελέσματος από τις αρχικές συνθήκες. Σε αυτή την περίπτωση, είναι πιο αποτελεσματικό να χρησιμοποιηθεί η Θεωρία Πιθανοτήτων, ώστε να μοντελοποιηθεί το στρίψιμο του κέρματος βάσει των πιθανών εκβάσεών του, δηλαδή ως πείραμα τύχης. Με άλλα λόγια, θα λέγαμε ότι «η τυχαιότητα μοντελοποιεί την πολυπλοκότητα».

Παιχνίδια όπως το στρίψιμο ενός κέρματος, η ρίψη ενός ζαριού, το παιχνίδι «πέτρα, ψαλίδι, χαρτί» ή το τάβλι είναι χαρακτηριστικά παραδείγματα πειραμάτων τύχης. Ωστόσο, η Θεωρία των Πιθανοτήτων, εκτός από διασκεδαστικά παιχνίδια, χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση και την ανάλυση προβλημάτων από τον χώρο των Φυσικών Επιστημών, των Επιστημών Υγείας, της Οικονομικής Επιστήμης και άλλων, τα οποία είναι αρκετά πολύπλοκα για να διερευνηθούν ως αιτιοκρατικά πειράματα.

Δειγματικός χώρος

Αν ω_1, ω_2,...,ω_κ είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα είναι το σύνολο:

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\kappa\}$.

Όλα τα αποτελέσματα που μπορούν να εμφανιστούν σε μία εκτέλεση ένος πειράματος τύχης λέγονται δυνατά αποτελέσματα ή δυνατές εκβάσεις του πειράματος. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε ως πείραμα τύχης την καταγραφή των επιλογών των δύο παικτών του παιχνιδιού «πέτρα, ψαλίδι, χαρτί», τότε ένα δυνατό αποτέλεσμα είναι το (πέτρα, χαρτί), όπου ο πρώτος παίκτης επιλέγει «πέτρα» και ο δεύτερος «χαρτί». Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων λέγεται δειγματικός χώρος (sample space, εν συντομία δ.χ.) και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα Ω. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο δ.χ. αποτελείται από όλα τα δυνατά διατεταγμένα ζεύγη των λέξεων «πέτρα», «ψαλίδι» και «χαρτί». Δηλαδή είναι:

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (\text{πέτρα}, \text{χαρτί}), (\text{χαρτί}, \text{πέτρα}), (\text{πέτρα}, \text{ψαλίδι}), \\ (\text{ψαλίδι}, \text{πέτρα}), (\text{χαρτί}, \text{ψαλίδι}), (\text{ψαλίδι}, \text{χαρτί}) \end{Bmatrix}$$

Αν θεωρήσουμε ως πείραμα τύχης τη ρίψη ενός ζαριού και μας ενδιαφέρει η ένδειξη της άνω έδρας, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο δ.χ. είναι:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Ενδεχόμενα

Οποιοδήποτε σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος τύχης ονομάζεται ενδεχόμενο (event) ή γεγονός. Για παράδειγμα, στη ρίψη ενός ζαριού κάποια ενδεχόμενα είναι τα παρακάτω Α, Β και Γ:

Α: «Έρχεται άρτιος αριθμός»,

Β: «Έρχεται αριθμός μικρότερος του 5»,

Γ: «Έρχεται 1».

Κάθε ενδεχόμενο αντιστοιχεί σε ένα σύνολο στοιχείων του δ.χ.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

δηλαδή σε ένα υποσύνολο του Ω. Τα παραπάνω ενδεχόμενα γράφονται :

$$A=\{2, 4, 6\},\ B=\{1, 2, 3, 4\} \text{ και } \Gamma=\{1\}$$

Αν το αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης είναι το ω_ν τότε όλα τα ενδεχόμενα που περιέχουν το ω_ν λέμε ότι πραγματοποιούνται, ενώ τα ενδεχόμενα που δεν περιέχουν το ω_ν λέμε ότι δεν πραγματοποιούνται.

Αν γίνει μία ρίψη του ζαριού και το αποτέλεσμα είναι 3, τότε λέμε ότι το Β πραγματοποιείται γιατί περιέχει το 3, ενώ τα Α και Γ δεν πραγματοποιούνται, γιατί δεν περιέχουν το 3. Το 3 είναι ένα ευνοϊκό αποτέλεσμα για το Β. Άλλα ευνοϊκά αποτελέσματα για το Β είναι τα 1, 2 και 4. Αντίστοιχα, ευνοϊκά αποτελέσματα για το Α είναι τα 2, 4 και 6, ενώ για το Γ είναι μόνο το 1.

Η γλώσσα των συνόλων

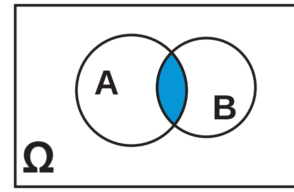
Όπως είδαμε τα ενδεχόμενα είναι υποσύνολα του δ.χ. Ω. Συνεπώς, μπορούν να αναπαρασταθούν με διαγράμματα Venn.

Η τομή των ενδεχομένων Α και Β συμβολίζεται με $A \cap B$ και πραγματοποιείται όταν το Α και το Β πραγματοποιούνται. Για το παραπάνω παράδειγμα είναι:

$$A \cap B = \{ 2, 4 \}$$

Άρα τα στοιχεία της τομής των Α και Β είναι τα κοινά ευνοϊκά αποτελέσματα των δύο ενδεχομένων Α και Β.

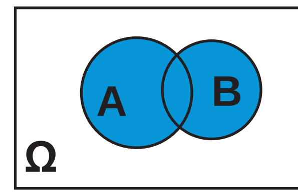
$A \cap B$



Αντίστοιχα, η ένωση των Α και Β συμβολίζεται με $A \cup B$ και πραγματοποιείται όταν ένα τουλάχιστον από τα Α ή Β πραγματοποιείται. Για το παραπάνω παράδειγμα είναι:

$$A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, 6 \}$$

$A \cup B$

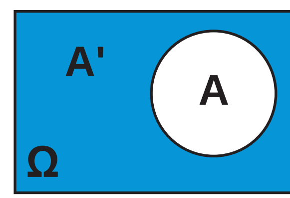


Το συμπληρωματικό ή αντίθετο του ενδεχομένου Α συμβολίζεται με Α΄ και πραγματοποιείται, αν το Α δεν πραγματοποιείται. Για το παραπάνω παράδειγμα είναι:

$$A' = \{ 1, 3, 5 \}$$

Δηλαδή το Α΄ πραγματοποιείται αν έρθει περιττός αριθμός.

Α΄

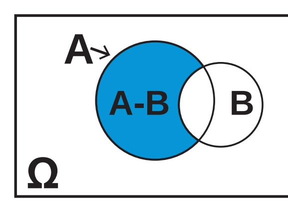


Η διαφορά του Β από το Α συμβολίζεται με Α - Β και πραγματοποιείται όταν το Α πραγματοποιείται αλλά όχι το Β. Η Α – Β αποτελείται από τα ευνοϊκά αποτελέσματα του Α που δεν είναι ευνοϊκά για το Β. Για το παραπάνω παράδειγμα είναι:

$$A - B = \{ 6 \}$$

Δηλαδή, από τα 2, 4 και 6 που είναι ευνοϊκά για το Α «διαγράφουμε» τα 2 και 4 που είναι ευνοϊκά και για το Β. Με άλλα λόγια το Α - Β πραγματοποιείται αν έρθει άρτιος αριθμός που δεν είναι μικρότερος του 5. Ανάλογα, στο παράδειγμά μας $B - A = \{ 1, 3 \}$.

$A - B$



Με αφορμή το παράδειγμα του ζαριού κάνουμε τις παρακάτω γενικές παρατηρήσεις:

— Ένα ενδεχόμενο που περιέχει ένα μόνο στοιχείο του δ.χ., όπως το Γ στο παράδειγμά μας, ονομάζεται απλό ή στοιχειώδες.
— Ενδεχόμενα που περιέχουν περισσότερα από ένα στοιχεία του δ.χ., όπως τα Α και Β στο παράδειγμά μας, ονομάζονται σύνθετα.
— Το ενδεχόμενο $\varnothing$ ονομάζεται αδύνατο ενδεχόμενο.
— Αν δύο ενδεχόμενα δεν έχουν κοινά ευνοϊκά αποτελέσματα ή κοινά στοιχεία ως σύνολα (δηλαδή δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα), όπως τα Α και Γ στο παράδειγμά μας όπου $A \cap \Gamma = \varnothing$, λέμε ότι είναι ασυμβίβαστα. Έτσι, τα Α και Γ είναι ασυμβίβαστα.

Το κενό σύνολο $\{ \quad \}$ συμβολίζεται ως $\varnothing$.

— Το ενδεχόμενο Ω ονομάζεται βέβαιο ενδεχόμενο.

— Αν η ένωση δύο ενδεχομένων είναι όλος ο δ.χ. Ω, όπως η ένωση του Β και του $\Delta = \{ 3, 5, 6 \}$ στο παράδειγμά μας, όποιο κι αν είναι το αποτέλεσμα του πειράματος τύχης, θα πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από αυτά: είτε το Δ είτε το Β, είτε και τα δύο.

— Αν ένα στοιχείο Γ είναι υποσύνολο ενός ενδεχομένου Β, όπως στο παράδειγμά μας, όπου $\Gamma \subseteq B$, αν το Γ πραγματοποιείται, τότε και το Β πραγματοποιείται.

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

Η Αθηνά και ο Κωστής προσπαθούν να γράψουν έναν δ.χ. για το πείραμα τύχης των τριών διαδοχικών ρίψεων ενός νομίσματος.

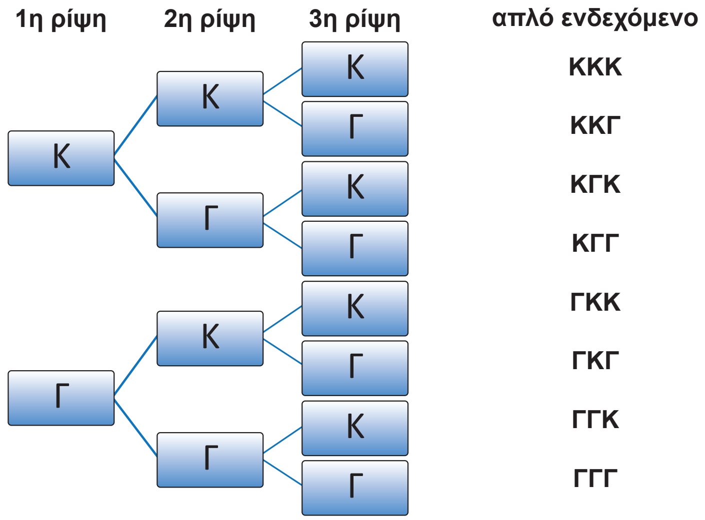
Η Αθηνά γράφει ότι υπάρχουν τα παρακάτω απλά ενδεχόμενα, όπου Κ σημαίνει κεφαλή και Γ σημαίνει γράμματα:

$$\omega_1\text{: 1Κ και 2 Γ,} \quad \omega_2\text{: 1Γ και 2 Κ,} \quad \omega_3\text{: 3Κ} \quad \text{και} \quad \omega_4\text{: 3 Γ.}$$

Άρα ο δ.χ. σύμφωνα με την Αθηνά είναι:

$$\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \}.$$

Ο Κωστής έδωσε άλλη απάντηση κατασκευάζοντας το παρακάτω δενδροδιάγραμμα:



Άρα ο δ.χ. είναι:

$$\Omega = \{ ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ \}$$

Με ποιον από τους δύο συμφωνείτε;

Λύση

Και οι δύο δειγματικοί χώροι είναι σωστοί εφόσον περιέχουν όλες τις πιθανές εκβάσεις του πειράματος τύχης.
Ο δ.χ. του Κωστή περιγράφει με μεγαλύτερη λεπτομέρεια την έκβαση του πειράματος και είναι καταλληλότερος για την μοντελοποίηση του πειράματος τύχης σε περιπτώσεις που είναι σημαντική η σειρά που εμφανίζονται τα Κ και Γ.
Για παράδειγμα, σκεφτείτε το παρακάτω πρόβλημα (1ο σενάριο):
«Σε ένα παιχνίδι με τρεις παίκτες, πρώτος στρίβει το κέρμα ο παίκτης Α, δεύτερος ο Β και τρίτος ο C και κερδίζουν δώρο όποιοι φέρουν Κ».
Αν έχουμε την πληροφορία ότι η έκβαση του πειράματος είναι το ω_2 του δ.χ. της Αθηνάς, δηλαδή ότι 1 παίκτης έφερε Γ και 2 παίκτες έφεραν Κ, τότε δεν μπορούμε να καταλάβουμε ποιοι κέρδισαν, γιατί δε γνωρίζουμε ποιοι είναι οι δύο που έφεραν Κ.
Αν όμως, σύμφωνα με τον δ.χ. του Κωστή, έχουμε την πληροφορία ότι η έκβαση είναι ΚΚΓ τότε κερδίζουν οι Α και Β. Αντίστοιχα, αν η έκβαση είναι ΚΓΚ κερδίζουν οι Α και C και η έκβαση είναι ΓΚΚ κερδίζουν οι Β και C.
Άρα, ο δ.χ. της Αθηνάς δεν είναι κατάλληλος για αυτό το πρόβλημα, γιατί δε «λαμβάνει υπόψη του» τη σειρά εμφάνισης των Κ και Γ.
Τα πράγματα αλλάζουν αν έχουμε το πρόβλημα (2ο σενάριο):
«Ένας παίκτης στρίβει τρεις φορές ένα αμερόληπτο κέρμα και κερδίζει δώρο αν φέρει περισσότερες φορές Κ από Γ».
Τότε και οι δύο δ.χ. είναι κατάλληλοι για τη μοντελοποίηση του πειράματος τύχης και μάλιστα ο δ.χ. της Αθηνάς είναι απλούστερος αφού περιέχει λιγότερα στοιχεία.

Το συμπέρασμα από αυτό το παράδειγμα είναι ότι ο δ.χ. ενός πειράματος τύχης δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένος (π.χ. στο 2ο σενάριο και οι δύο δ.χ. είναι κατάλληλοι) και η επιλογή του δ.χ. είναι μέρος της μοντελοποίησης του πειράματος τύχης (π.χ. στο 1ο σενάριο ο δ.χ. της Αθηνάς δεν είναι ένα καλό μοντέλο για το πείραμα τύχης).

Εφαρμογή 2

Ρίχνουμε δύο ζάρια και καταγράφουμε το αποτέλεσμα της ρίψης. Ω είναι ο δ.χ. του πειράματος τύχης που περιγράφεται στον διπλανό πίνακα.

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Να γράψετε τα παρακάτω ενδεχόμενα με αναγραφή των στοιχείων τους:

Α: «Το αποτέλεσμα και των δύο ρίψεων είναι άρτιος αριθμός»,

Β: «Το αποτέλεσμα των ρίψεων έχει άθροισμα 7»,

Γ: «Το αποτέλεσμα και των δύο ρίψεων είναι μεγαλύτερο του 3».

Στη συνέχεια να γράψετε τα ενδεχόμενα A', $A \cup \Gamma$, $A - \Gamma$ και $B - \Gamma$ με αναγραφή των στοιχείων τους.

Λύση

Έχοντας επιλέξει τον παραπάνω δ.χ. για το πείραμα τύχης, διακρίνουμε τα ζάρια σε πρώτο και δεύτερο. Για παράδειγμα, το (1,2) αντιστοιχεί στο αποτέλεσμα που το πρώτο ζάρι φέρνει 1 και το δεύτερο 2, ενώ το (2,1) αντιστοιχεί στο αποτέλεσμα που το πρώτο ζάρι φέρνει 2 και το δεύτερο 1. Κάθε διατεταγμένο ζεύγος σε κελί του πίνακα αντιστοιχεί σε ένα δυνατό αποτέλεσμα της ρίψης των δύο ζαριών.
Από τον πίνακα προκύπτει ότι:

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Με πορτοκαλί το Α

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Με πράσινο το Β

$$A = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$$

$$B = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

και

$$\Gamma = \{(4,4), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

Το Α΄ πραγματοποιείται αν δεν πραγματοποιείται το Α. Το ενδεχόμενο Α΄ είναι το:

$$A' = \left\{\begin{array}{llllll} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\ (2,1), & & (2,3), & & (2,5), & \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\ (4,1), & & (4,3), & & (4,5), & \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6), \\ (6,1), & & (6,3), & & (6,5) & \end{array}\right\}$$

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Με κίτρινο το Γ

Το $A \cup \Gamma$ πραγματοποιείται αν πραγματοποιείται ή το Α ή το Γ.

Επομένως:

$$A \cup \Gamma = \left\{\begin{array}{l} (2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,5), (4,6), \\ (5,4), (5,5), (5,6), (6,2), (6,4), (6,5), (6,6) \end{array}\right\}$$

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	~~4,4~~	4,5	~~4,6~~
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	~~6,4~~	6,5	~~6,6~~

Α – Γ: «Διαγράφουμε» τα στοιχεία του Α που ανήκουν και στο Γ

Το Α - Γ πραγματοποιείται αν πραγματοποιείται το Α, αλλά όχι το Γ.

Άρα:

$$A - \Gamma = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (6,2)\}$$

Το Β - Γ πραγματοποιείται αν πραγματοποιείται το Β, αλλά όχι το Γ.
Το Β και το Γ δεν έχουν κοινά στοιχεία, άρα:

$$B - \Gamma = B$$

Ασκήσεις – Προβλήματα – Δραστηριότητες

1) Τα χρώματα μιας ομάδας βόλεϊ είναι λευκό, γαλάζιο και μαύρο. Για κάθε παίκτη/παίκτρια η ομάδα δίνει τα εξής ρούχα:
— Τρεις μονόχρωμες μπλουζες: Μία λευκή (Λ), μία γαλάζια (Γ) και μία μαύρη (Μ).
— Τρία μονόχρωμα σορτσάκια, στα ίδια χρώματα με τις μπλούζες.
— Δύο ζευγάρια κάλτσες, ένα μαύρο κι ένα λευκό.
Επιλέγουμε τυχαία μία μπλούζα, ένα σορτσάκι κι ένα ζευγάρι κάλτσες.
α) Να γράψετε έναν δ.χ. του πειράματος τύχης.
β) Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω δ.χ. να βρείτε το ενδεχόμενο Α: «τα ρούχα που επιλέξαμε έχουν ίδιο χρώμα».

2) Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Στον δ.χ. της εφαρμογής 2 να βρείτε τα ενδεχόμενα:
α) Α: Το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης είναι μεγαλύτερο από το αποτέλεσμα της 2ης ρίψης.
β) Β: Το άθροισμα των ενδείξεων των δύο ρίψεων είναι άρτιος αριθμός.
γ) Γ: Το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης είναι 6.
δ) $A \cap B$, $A \cup B$, $B - \Gamma$, $A - \Gamma$ και $\Gamma - A$.

3) Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες, μία άσπρη, μία κόκκινη και μία μαύρη. Παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα τυχαία και καταγράφουμε το χρώμα της. Μετά ξανατοποθετούμε τη μπάλα στο κουτί και επαναλαμβάνουμε άλλη μία φορά την τυχαία επιλογή μπάλας. Έτσι, στο τέλος έχουμε καταγράψει δύο χρώματα (ίδια ή διαφορετικά), ένα για κάθε μπάλα που επιλέξαμε. Να γράψετε έναν δ.χ. για το πείραμα τύχης και στη συνέχεια να απαντήσετε στα ερωτήματα:
α) Ποιο είναι το ενδεχόμενο Α: «η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη»;
β) Ποιο είναι το ενδεχόμενο Β: «η δεύτερη μπάλα είναι κόκκινη»;
γ) Να εκφράσετε λεκτικά το ενδεχόμενο $A \cap B$ και να το βρείτε.
δ) Να εκφράσετε λεκτικά το ενδεχόμενο $A - B$ και να το βρείτε.

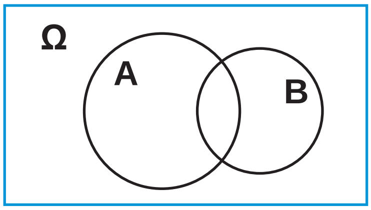
4) Να λύσετε την άσκηση 3, αν αυτή τη φορά η μπάλα που εξάγεται την πρώτη φορά δεν επανατοποθετείται στο κουτί πριν τη δεύτερη εξαγωγή μπάλας.

5) Ρίχνουμε δύο ζάρια και καταγράφουμε το αποτέλεσμα της ρίψης. Να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα A', $A \cup \Gamma$, $A - \Gamma$ και $B - \Gamma$, όπου:
Α: «Το αποτέλεσμα και των δύο ρίψεων είναι άρτιος αριθμός»,
Β: «Το αποτέλεσμα των ρίψεων έχει άθροισμα 7»,
Γ: «Το αποτέλεσμα και των δύο ρίψεων είναι μεγαλύτερο του 3».

6) Δύο παίκτες παίζουν σκάκι και συμφωνούν να είναι νικητής εκείνος που πρώτος θα κερδίσει δύο παρτίδες. Να γράψετε έναν δ.χ. για το πείραμα τύχης, από τον οποίο να προκύπτει πόσα παιχνίδια έγιναν μέχρι να βγει νικητής, ποιος προηγήθηκε και ποιος τελικά κέρδισε.

Πρόσθετο Υλικό

1) Οι ένοικοι μίας πολυκατοικίας παρκάρουν τα οχήματά τους σε ένα χώρο στάθμευσης αυτοκινήτων. Στο παρακάτω διάγραμμα Venn, το A έχει ως στοιχεία του ενοίκους που έχουν αυτοκίνητο και το B εκείνους που έχουν μηχανή. Επιλέγουμε τυχαία έναν ένοικο.



Χρησιμοποιώντας τη γλώσσα των συνόλων (τομή, ένωση κτλ.) να εκφράσετε τα ενδεχόμενα ο ένοικος που επιλέγουμε:

α) έχει αυτοκίνητο και μηχανή.
β) έχει αυτοκίνητο ή μηχανή.
γ) δεν έχει αυτοκίνητο ή μηχανή.
δ) δεν έχει αυτοκίνητο και δεν έχει μηχανή.
ε) δεν έχει (και) αυτοκίνητο και μηχανή.
στ) δεν έχει αυτοκίνητο ή δεν έχει μηχανή.
ζ) έχει μόνο αυτοκίνητο ή έχει μόνο μηχανή.
η) έχει αυτοκίνητο ή μηχανή, αλλά δεν ανήκει σε αυτούς που έχουν και αυτοκίνητο και μηχανή.

2) Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δ.χ. Ω να αντιστοιχίσετε τα ενδεχόμενα της πρώτης στήλης με τα ίσα προς αυτά ενδεχόμενα της δεύτερης στήλης.

1η στήλη
$(A \cup B)'$
$(A \cap B)'$
$(A - B) \cup (B - A)$

2η στήλη
$A' \cup B'$
$(A \cup B) - (A \cap B)$
$A' \cap B'$

Στη συνέχεια να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα του πίνακα. Ποιες λεκτικές εκφράσεις αντιστοιχούν σε ίσα ενδεχόμενα;