

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.1 : ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΤΥΧΗΣ, ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ ΚΑΙ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Λύσεις των Ασκήσεων

Άσκηση 1

Τα χρώματα μιας ομάδας βόλεϊ είναι λευκό, γαλάζιο και μαύρο. Για κάθε παίκτη/παίκτρια η ομάδα δίνει τα εξής ρούχα:

- Τρεις μονόχρωμες μπλούζες: Μία λευκή (Λ), μία γαλάζια (Γ) και μία μαύρη (Μ).
- Τρία μονόχρωμα σορτσάκια, στα ίδια χρώματα με τις μπλούζες.
- Δύο ζευγάρια κάλτσες, ένα μαύρο κι ένα λευκό.

Επιλέγουμε τυχαία μία μπλούζα, ένα σορτσάκι κι ένα ζευγάρι κάλτσες.

α) Να γράψετε έναν δ.χ. του πειράματος τύχης.

β) Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω δ.χ. να βρείτε το ενδεχόμενο A: «τα ρούχα που επιλέξαμε έχουν ίδιο χρώμα».

Λύση

α) Για να συμβολίσουμε κάθε στοιχείο του δ.χ. θα χρησιμοποιήσουμε διατεταγμένες τριάδες. Για παράδειγμα, η τριάδα ΛΓΜ σημαίνει Λευκή μπλούζα, Γαλάζιο σορτσάκι, Μαύρες κάλτσες. Δηλαδή πάντα πρώτο γράφουμε το αρχικό γράμμα του χρώματος της μπλούζας, δεύτερο γράφουμε το αρχικό γράμμα του χρώματος του σορτς και τρίτο γράφουμε το αρχικό γράμμα του χρώματος των καλτσών.

Άρα ως δ.χ. γράφουμε τον

$$\Omega = \{ \Lambda\Lambda\Lambda, \Lambda\Lambda\Gamma, \Lambda\Gamma\Lambda, \Lambda\Gamma\Gamma, \Lambda\Gamma\text{M}, \Lambda\text{M}\Lambda, \Lambda\text{M}\Gamma, \Lambda\text{M}\text{M}, \\ \Gamma\Lambda\Lambda, \Gamma\Lambda\Gamma, \Gamma\Gamma\Lambda, \Gamma\Gamma\Gamma, \Gamma\Gamma\text{M}, \Gamma\text{M}\Lambda, \Gamma\text{M}\Gamma, \Gamma\text{M}\text{M}, \\ \text{M}\Lambda\Lambda, \text{M}\Lambda\Gamma, \text{M}\Gamma\Lambda, \text{M}\Gamma\Gamma, \text{M}\text{M}\Lambda, \text{M}\text{M}\Gamma, \text{M}\text{M}\text{M} \}$$

β) Το ενδεχόμενο είναι: $A = \{ \Lambda\Lambda\Lambda, \text{M}\text{M}\text{M} \}$.

Άσκηση 2

Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Στον δ.χ. της εφαρμογής 2 να βρείτε τα ενδεχόμενα:

α) A: Το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης είναι μεγαλύτερο από το αποτέλεσμα της 2ης ρίψης.

β) B: Το άθροισμα των ενδείξεων των δύο ρίψεων είναι άρτιος αριθμός.

γ) Γ: Το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης είναι 6.

δ) $A \cap B$, $A \cup B$, $B - \Gamma$, $A - \Gamma$ και $\Gamma - A$.

Λύση

Παρακάτω γράφουμε τον δ.χ. της εφαρμογής 2:

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

α) Χρωματίζουμε τα κελιά, που ο πρώτος από τους δύο αριθμούς είναι μεγαλύτερος από τον δεύτερο

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Άρα:

$$A = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5)\}$$

β) Χρωματίζουμε τα κελιά, που το άθροισμα των δύο αριθμών είναι άρτιο.

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

$$B = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (4,6), (5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6)\}$$

γ) Τα κελιά της τελευταίας γραμμής αντιστοιχούν στο ενδεχόμενο Γ, άρα:

$$\Gamma = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

$$\delta) A \cap B = \{(3,1), (4,2), (5,1), (5,3), (6,2), (6,4)\}$$

$$A \cup B = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,1), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

$$B - \Gamma = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (4,6), (5,1), (5,3), (5,5)\}$$

$$A - \Gamma = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4)\}$$

$$\Gamma - A = \{(6,6)\}$$

Άσκηση 3

Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες, μία άσπρη, μία κόκκινη και μία μαύρη. Παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα τυχαία και καταγράφουμε το χρώμα της. Μετά ξανατοποθετούμε τη μπάλα στο κουτί και επαναλαμβάνουμε άλλη μία φορά την τυχαία επιλογή μπάλας. Έτσι, στο τέλος έχουμε καταγράψει δύο χρώματα (ίδια ή διαφορετικά), ένα για κάθε μπάλα που επιλέξαμε. Να γράψετε έναν δ.χ. για το πείραμα τύχης και στη συνέχεια να απαντήσετε στα ερωτήματα:

α) Ποιο είναι το ενδεχόμενο A: «η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη»;

β) Ποιο είναι το ενδεχόμενο B: «η δεύτερη μπάλα είναι κόκκινη»;

γ) Να εκφράσετε λεκτικά το ενδεχόμενο $A \cap B$ και να το βρείτε.

δ) Να εκφράσετε λεκτικά το ενδεχόμενο $A - B$ και να το βρείτε.

Λύση

Θεωρώντας ότι με A συμβολίζουμε την καταγραφή μπάλας άσπρου χρώματος, με K κόκκινου χρώματος και με M μαύρου χρώματος, ως δ.χ. του πειράματος τύχης γράφουμε τον $\Omega = \{AA, AK, AM, KA, KK, KM, MA, MK, MM\}$

α) $A = \{KA, KK, KM\}$

β) $B = \{AK, KK, MK\}$

γ) $A \cap B$: «η πρώτη και η δεύτερη μπάλα είναι κόκκινες»

$$A \cap B = \{KK\}$$

δ) $A - B$: «η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη και η δεύτερη μπάλα δεν είναι κόκκινη»

$$A - B = \{KA, KM\}$$

Άσκηση 4

Να λύσετε την άσκηση 3, αν αυτή τη φορά η μπάλα που εξάγεται την πρώτη φορά δεν επανατοποθετείται στο κουτί πριν τη δεύτερη εξαγωγή μπάλας.

Λύση

Θεωρώντας, όπως και στην άσκηση 3, ότι με A συμβολίζουμε την καταγραφή μπάλας άσπρου χρώματος, με K κόκκινου χρώματος και με M μαύρου χρώματος, ως δ.χ. του πειράματος τύχης γράφουμε τον

$$\Omega = \{AK, AM, KA, KM, MA, MK\}$$

α) $A = \{KA, KM\}$

β) $B = \{AK, MK\}$

γ) $A \cap B = \emptyset$: «η πρώτη και η δεύτερη μπάλα είναι κόκκινες».

δ) $A - B = \{KA, KM\}$: «η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη και η δεύτερη μπάλα δεν είναι κόκκινη».

Άσκηση 5

Ρίχνουμε δύο ζάρια και καταγράφουμε το αποτέλεσμα της ρίψης. Να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα A' , $A \cup \Gamma$, $A - \Gamma$ και $B - \Gamma$, όπου:

A: «Το αποτέλεσμα και των δύο ρίψεων είναι άρτιος αριθμός»,

B: «Το αποτέλεσμα των ρίψεων έχει άθροισμα 7»,

Γ : «Το αποτέλεσμα και των δύο ρίψεων είναι μεγαλύτερο του 3».

Λύση

A' : «Δεν είναι το αποτέλεσμα και των δύο ρίψεων άρτιος αριθμός» ή αλλιώς A' : «Το αποτέλεσμα μιας τουλάχιστον από τις δύο ρίψεις είναι περιττός αριθμός»

$A \cup \Gamma$: «Το αποτέλεσμα και των δύο ρίψεων είναι άρτιος αριθμός ή το αποτέλεσμα και των δύο ρίψεων είναι μεγαλύτερο του 3».

$A - \Gamma$: «Το αποτέλεσμα και των δύο ρίψεων είναι άρτιος αριθμός, αλλά δεν είναι και οι δύο μεγαλύτεροι του 3». Ή εναλλακτικά «Το αποτέλεσμα και των δύο ρίψεων είναι άρτιος αριθμός, αλλά ένας τουλάχιστον είναι μικρότερος του 3».

$B - \Gamma$: «Το αποτέλεσμα των ρίψεων έχει άθροισμα 7, αλλά δεν είναι και οι δύο μεγαλύτεροι του 3».

Άσκηση 6

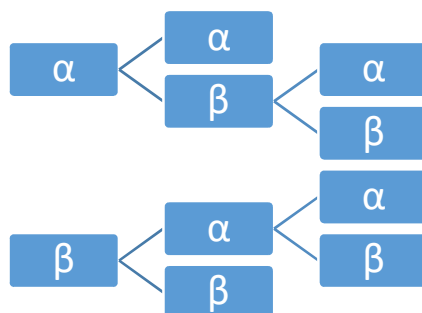
Δύο παίκτες παίζουν σκάκι και συμφωνούν να είναι νικητής εκείνος που πρώτος θα κερδίσει δύο παρτίδες. Να γράψετε έναν δ.χ. για το πείραμα τύχης, από τον οποίο να προκύπτει πόσα παιχνίδια έγιναν μέχρι να βγει νικητής, ποιος προηγήθηκε και ποιος τελικά κέρδισε.

Λύση

Έχουμε δύο παίκτες, τους A και B. Ας συμβολίσουμε ως α τη νίκη του A σε μια παρτίδα και ως β τη νίκη του B σε μια παρτίδα.

Τότε, το παρακάτω διάγραμμα εκφράζει όλες τις δυνατές εκβάσεις του παιχνιδιού.

1η παρτίδα 2η παρτίδα 3η παρτίδα (αν χρειαστεί)



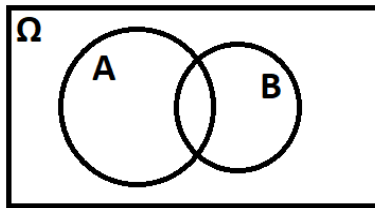
Άρα $\Omega = \{\alpha\alpha, \alpha\beta, \alpha\beta\beta, \beta\alpha\alpha, \beta\alpha\beta, \beta\beta\}$.

Σε κάθε στοιχείο του δ.χ. φαίνονται οι πληροφορίες που ζητούνται. Π.χ. στην έκβαση αββ, χρειάστηκε να γίνουν 3 παρτίδες, προηγήθηκε ο Α και νίκησε τελικά ο Β.

Πρόσθετο υλικό

Άσκηση 1

Οι ένοικοι μίας πολυκατοικίας παρκάρουν τα οχήματά τους σε ένα χώρο στάθμευσης αυτοκινήτων. Στο παρακάτω διάγραμμα Venn, το Α έχει ως στοιχεία του ενοίκους που έχουν αυτοκίνητο και το Β εκείνους που έχουν μηχανή. Επιλέγουμε τυχαία έναν ένοικο.



Χρησιμοποιώντας τη γλώσσα των συνόλων (τομή, ένωση κ.τ.λ.) να εκφράσετε τα ενδεχόμενα, ο ένοικος που επιλέγουμε:

- α) έχει αυτοκίνητο και μηχανή.
- β) έχει αυτοκίνητο ή μηχανή.
- γ) δεν έχει αυτοκίνητο ή μηχανή.
- δ) δεν έχει αυτοκίνητο και δεν έχει μηχανή.
- ε) δεν έχει (και) αυτοκίνητο και μηχανή.
- στ) δεν έχει αυτοκίνητο ή δεν έχει μηχανή.
- ζ) έχει μόνο αυτοκίνητο ή έχει μόνο μηχανή.
- η) έχει αυτοκίνητο ή μηχανή, αλλά δεν ανήκει σε αυτούς που έχουν και αυτοκίνητο και μηχανή.

Λύση

- α) $A \cap B$
- β) $A \cup B$
- γ) $(A \cup B)'$
- δ) $A' \cap B'$
- ε) $(A \cap B)'$
- στ) $A' \cup B'$
- ζ) $(A - B) \cup (B - A)$
- η) $(A \cup B) - (A \cap B)$

Σχόλιο: Φαίνεται ότι κάποιες λεκτικές διατυπώσεις περιγράφουν το ίδιο σύνολο ενοίκων. Αυτές αντιστοιχούν σε ίσα ενδεχόμενα, όπως φαίνεται στην επόμενη άσκηση.

Άσκηση 2

Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δ.χ. Ω να αντιστοιχίσετε τα ενδεχόμενα της πρώτης στήλης με τα ίσα προς αυτά ενδεχόμενα της δεύτερης στήλης.

1η στήλη
$(A \cup B)'$
$(A \cap B)'$
$(A - B) \cup (B - A)$

2η στήλη
$A' \cup B'$
$(A \cup B) - (A \cap B)$
$A' \cap B'$

Στη συνέχεια να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα του πίνακα. Ποιες λεκτικές εκφράσεις αντιστοιχούν σε ίσα ενδεχόμενα;

Λύση

$(A \cup B)' = A' \cap B'$. Οι λεκτικές εκφράσεις που αντιστοιχούν σε αυτά τα ίσα ενδεχόμενα είναι «Το αντίθετο του ενδεχομένου "πραγματοποιείται το A ή το B"» και «Δεν πραγματοποιείται ούτε το A ούτε το B».

$(A \cap B)' = A' \cup B'$. Οι λεκτικές εκφράσεις που αντιστοιχούν σε αυτά τα ίσα ενδεχόμενα είναι «Δεν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B» και «Δεν πραγματοποιείται το A ή δεν πραγματοποιείται το B».

$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$. Οι λεκτικές εκφράσεις που αντιστοιχούν σε αυτά τα ίσα ενδεχόμενα είναι «Πραγματοποιείται μόνο το A ή μόνο το B» και «Πραγματοποιείται το A ή το B, αλλά όχι και τα δύο συγχρόνως».