

# Μαθηματικά Γ' Λυκείου

## 14 SOS ΚΑΥΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

*Με Λόγο, Εικόνα και Παρατήρηση  
σε οδηγούμε στη δημιουργική σκέψη!*

Στοχευμένη Έξυπνη Μελέτη  
Στα courses του [www.arnos.gr](http://www.arnos.gr)



ΑΘΗΝΑ 2021

**Μαθηματικά**  
**Στοχευμένη Έξυπνη Μελέτη**  
για μαθητές Γ' Λυκείου

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η ολική, μερική ή περιληπτική αναπαραγωγή και μετάδοση έστω και μιας σελίδας του παρόντος βιβλίου κατά παράφραση ή διασκευή με οποιονδήποτε τρόπο (μηχανικό, ηλεκτρονικό, φωτοτυπικό κ.λπ. – Ν. 2121/93, άρθρο 51).

Η απαγόρευση αυτή ισχύει και για τις δημόσιες υπηρεσίες, βιβλιοθήκες, οργανισμούς κ.λπ. (άρθρο 18). Οι παραβάτες διώκονται (άρθρο 13) και τους επιβάλλονται κατάσχεση, αστικές και ποινικές κυρώσεις σύμφωνα με το νόμο (άρθρο 64-66).

**Συντακτική Ομάδα Μαθηματικών**

<b>Διευθυντής:</b>	Ιωάννης Π. Κρόκος
<b>Συνεργάστηκαν:</b>	Σταύρος Παπαδόπουλος Βασίλειος Κ. Τσιλιβής

**ΑΡΝΟΣ ONLINE EDUCATION**

Αγαπητέ μαθητή του Κέντρου ΑΡΝΟΣ,

Το παρόν βιβλίο απευθύνεται στους μαθητές που προετοιμάζονται για τις Πανελλήνιες Εξετάσεις και την εισαγωγή τους στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση. Παρουσιάζει μία ειδικά επιλεγμένη συλλογή επαναληπτικών ασκήσεων για κάθε θεματική περιοχή της ύλης, με στόχο την εξάσκηση από το μαθητή στην τελική του επανάληψη. Οι συγκεκριμένες ασκήσεις είναι στοχευμένες στο ύφος και τις απαιτήσεις των εξετάσεων και σε βοηθούν να κάνεις την επανάληψή σου εστιασμένα, ποιοτικά και ουσιαστικά. Το συγκεκριμένο βιβλίο γράφτηκε από μαθηματικούς που τρέφουν αγάπη για τα Μαθηματικά και θέλουν να απαντήσουν σε όλα τα παιδικά τους ερωτήματα. Ξαναγυρνάμε πίσω στα παιδικά μας χρόνια για να ρωτήσουμε το Δάσκαλο ό,τι τότε δε νιώσαμε και με μαγεία αναρωτηθήκαμε.

Ευχαριστούμε θερμά τους εξαιρετικούς συνεργάτες μας για την εύστοχη και καθοριστική συμβολή τους στη διαμόρφωση της πληρότητας και σαφήνειας του συγκεκριμένου εγχειριδίου.

Γράφτηκε λοιπόν αυτό το βιβλίο ώστε οι μαθητές μας να απολαύσουν έναν σημαντικό οδηγό για την πλήρη και άρτια προετοιμασία επί των Πανελληνίων Εξετάσεων, αναδεικνύοντας την οπτικοποίηση, την απλότητα και την αμεσότητα της σκέψης και της αντίληψης κάθε μαθητή. Με κύριο εργαλείο την παρατήρηση. Η Γλώσσα μας είναι απλή, πλούσια σε λέξεις και με μαθηματική ακρίβεια. Με εφόδιο αυτό το εγχειρίδιο, και με το Δάσκαλο-Μέντορά σου μπορείς να προχωρήσεις βήμα - βήμα την επανάληψή σου, μελετώντας ταυτόχρονα το πλήρες εκπαιδευτικό υλικό του [www.arnos.gr](http://www.arnos.gr). Με την αναλυτική διδασκαλία μας σε Θεωρία, Παραδείγματα και Θέματα Προσομοίωσης, οικοδομείς με αρτιότητα την σκέψη σου, στοχευμένα προς την επιτυχία στις Εξετάσεις.

Να θυμάσαι ότι η **προσπάθεια ανταμείβεται και οι θυσίες τελικά δικαιώνονται**. Μην περιορίζεις τον πήχη της επίδοσής σου, **έχεις περισσότερες ικανότητες απ' όσες νομίζεις...** Γι' αυτό τόλμησε και μη φοβάσαι! Να σε σπλίζει η δύναμη, η αισιοδοξία και η ελπίδα και να επικεντρώσεις τη συνείδησή σου μόνο σε αυτά που επιθυμείς. Σου ευχόμαστε ολόψυχα Καλή Επιτυχία και Κάθε Δύναμη.

**Ιωάννης Π. Κρόκος**

CEO & Founder Arnos Online Education

## Μέθοδος ARNOS – Έξυπνη Μελέτη

**Ατομική Φροντίδα Μελέτης** | Η καρδιά της Μεθόδου ARNOS είναι ότι κάθε μαθητής, ανεξαρτήτως γνώσεων ή επιπέδου, έχει από την αρχή την αίσθηση της επιτυχίας. Αισθάνεται ότι τα καταφέρνει με τις δικές του δυνάμεις και τις δικές του ικανότητες, χωρίς να αισθάνεται ότι διδάσκεται. Γι' αυτό και φροντίζουμε κάθε μαθητή ξεχωριστά, ανάλογα με τις γνώσεις, το επίπεδο και τον δικό του προσωπικό ρυθμό. Δίνουμε την ευκαιρία σε κάθε μαθητή να προχωρεί όσο του επιτρέπουν οι ικανότητές του και να βλέπει τη μάθηση ως **απόλαυση-ανακάλυψη** και **δημιουργία**.

**Οπτικοποιημένη Μεθοδολογία** | Η *Οπτικοποιημένη Μεθοδολογία* γράφτηκε για να μαγέψει όλα τα παιδιά και να τα βοηθήσει να κατανοήσουν βήμα - βήμα τα Μαθηματικά. Η Γλώσσα μας είναι **απλή, πλούσια** σε λέξεις και με **μαθηματική ακρίβεια**. Στην *Οπτικοποιημένη Μεθοδολογία* μπορεί κάθε μαθητής να ανακαλύψει μόνος του κάθε θεματική περιοχή της ύλης των Μαθηματικών με Λόγο, Εικόνα και Παρατήρηση. Με την καθοδήγηση του Δασκάλου του και με βασικό εφόδιο την *Οπτικοποιημένη Μεθοδολογία* ο μαθητής μελετά την αναλυτική διδασκαλία Θεωρίας-Μεθοδολογίας-Παραδειγμάτων μας και χτίζει από την αρχή τη σκέψη του.

**Μέθοδος ARNOS και Εξάσκηση** | Η Μέθοδος Arnός οδηγεί τον μαθητή να μελετά από το επίπεδο όπου αισθάνεται άνετα, ώστε να διαμορφώσει γερές βάσεις για μάθηση. Χτίζει βήμα - βήμα τη σκέψη του, για να είναι σε θέση να διαχειρίζεται ύλη πιο προχωρημένου επιπέδου. Η Εξάσκηση είναι η καρδιά της Μεθόδου ARNOS. Γι' αυτό, τα προσεκτικά σχεδιασμένα Φύλλα Ασκήσεων παρουσιάζουν τις νέες έννοιες με τέτοιο τρόπο, ώστε οι μαθητές να λύνουν επιτυχώς και **ασκήσεις που δεν έχουν ξαναδεί**. Έτσι το παιδί προχωρεί με ασφάλεια και αυτοπεποίθηση **από τις πιο απλές στις πιο σύνθετες** έννοιες.

**Οδηγός ο Δάσκαλος** | Ο Δάσκαλος-Μέντορας καθοδηγεί από την αρχή τον μαθητή σε κάθε επίπεδο της Μεθόδου Arnός. **Κάθε επίπεδο** στηρίζεται εξελικτικά **στις γνώσεις που αποκτήθηκαν από το προηγούμενο**. Ο Δάσκαλος διασφαλίζει για κάθε μαθητή ότι έχει κατανοήσει πλήρως την έννοια που διδάχθηκε στο προηγούμενο επίπεδο και ότι μπορεί να την εφαρμόσει με επιτυχία στην πράξη.

**Το παιδί καλλιεργεί την Αντίληψη** | Οι περισσότεροι έχουν στη σκέψη τους τα Μαθηματικά σαν ατέλειωτες σελίδες με υπολογισμούς, χωρίς λογική, δίχως βάσεις και λογικούς συνειρμούς. Αυτό όμως είναι και το όμορφο σημείο που αναδεικνύουμε ως δάσκαλοι και σύγχρονοι παιδαγωγοί: ότι η ομορφιά των Μαθηματικών δεν πηγάζει από τον συμβολισμό τους, αλλά από τις ιδέες που αντιπροσωπεύουν. Η Μέθοδος ARNOS είναι μια τεχνική που θεμελιώσαμε με στόχο να δημιουργήσουμε σε κάθε μαθητή **κίνητρα και ενδιαφέρον για μάθηση**. Με Λόγο και Εικόνα τον οδηγούμε να αισθάνεται και να αντιλαμβάνεται ενεργά και βιωματικά αυτό που διδάσκεται. Ενεργοποιώντας την Παρατήρηση προκαλούμε τη δημιουργική σκέψη του μαθητή.

*Απλά και Κατανοητά η Γνώση!*

# ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

*Απλά και Κατανοητά η Γνώση!*

---

Σολωμού 29 Αθήνα τηλ: 210 38 22 157 [info@arnos.gr](mailto:info@arnos.gr) [www.arnos.gr](http://www.arnos.gr)

---

### Άσκηση 1

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις  $f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$f(x) = \left(\frac{e}{x}\right)^x, \quad g(x) = x(\ln x)^2 - 1, \quad x > 0 \quad f(0) = \alpha, \quad g(0) = \beta$$

1. Να βρείτε τα  $\alpha, \beta$

Δεδομένου ότι  $\alpha = 1, \beta = -1$

2. Βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ολικά ακρότατα της  $f$
3. Βρείτε τα διαστήματα μονοτονία και τα ολικά ακρότατα της  $g$  (Δίνεται ότι  $0,69 < \ln 2 < 0,7$ )
4. Δείξτε ότι η  $f$  έχει μοναδικό σημείο καμπής, έστω  $x_1$  με  $x_1 > 2$
5. Δείξτε ότι για  $x \in (0, 1)$ ,  $f(x) > x f(1) + (1-x) f(0)$
6. Δείξτε ότι  $\int_0^1 f(x) dx > \frac{e+1}{2}$
7. Δείξτε ότι η εξίσωση  $f(x) = g(x)$  έχει μοναδική ρίζα στο  $(0, +\infty)$

### Άσκηση 2

Δίνεται η  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(0) = 0$  και  $f(x) = x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x^2}$

1. Δείξτε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και βρείτε την παράγωγό της
2. Εξετάστε αν η  $f$  έχει ασύμπτωτες
3. Δείξτε ότι στο  $(1, +\infty)$  καθώς και στο  $(-\infty, -1)$  η  $f$  είναι κοίλη
4. Δείξτε ότι υπάρχει  $\xi \in \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)$  ώστε  $f(\xi) = \text{συν} \frac{1}{\xi^2}$
5. \*Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = \text{συν} \frac{1}{x^2}$ ,  $x \in (0, +\infty)$  έχει άπειρες ρίζες

**Απλά και Κατανοητά η Γνώση!**

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ – ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

*Απλά και Κατανοητά η Γνώση!*

---

Σολωμού 29 Αθήνα τηλ: 210 38 22 157 [info@arnos.gr](mailto:info@arnos.gr) [www.arnos.gr](http://www.arnos.gr)

---

### Άσκηση 1

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις  $f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$f(x) = \left(\frac{e}{x}\right)^x, \quad g(x) = x(\ln x)^2 - 1, \quad x > 0 \quad f(0) = \alpha, \quad g(0) = \beta$$

8. Να βρείτε τα  $\alpha, \beta$

Δεδομένου ότι  $\alpha = 1, \beta = -1$

9. Βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ολικά ακρότατα της  $f$

10. Βρείτε τα διαστήματα μονοτονία και τα ολικά ακρότατα της  $g$  (Δίνεται ότι  $0,69 < \ln 2 < 0,7$ )

11. Δείξτε ότι η  $f$  έχει μοναδικό σημείο καμπής, έστω  $x_1$  με  $x_1 > 2$

12. Δείξτε ότι για  $x \in (0, 1)$ ,  $f(x) > x f(1) + (1-x) f(0)$

13. Δείξτε ότι  $\int_0^1 f(x) dx > \frac{e+1}{2}$

14. Δείξτε ότι η εξίσωση  $f(x) = g(x)$  έχει μοναδική ρίζα στο  $(0, +\infty)$

### Λύση

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 - 1 = -1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{-\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln x}{-\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{-\infty}$$

Απλά και Κατανοητά η Γνώση!



$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0$$

Άρα  $\beta = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x^x}$$

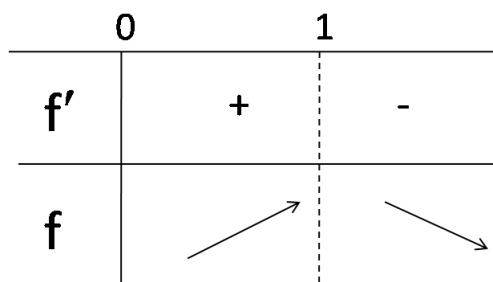
Αλλά  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x}$

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$  (το βρήκαμε πριν)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$

Τελικά  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ . Άρα  $\alpha = 1$

2. Είναι  $f(x) = e^{x-x \ln x} = e^{x(1-\ln x)}$  για  $x > 0$

Άρα  $f'(x) = f(x)(x(1-\ln x))' = f(x)[1-\ln x - 1] = -\ln x f(x)$



Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, 1]$  και γνησίως φθίνουσα στο  $[1, \infty)$

Στο 1 έχει ακρότατο που είναι ολικό μέγιστο και  $f(1) = e$

3.  $g'(x) = (\ln x)^2 + x \frac{2 \ln x}{x} = \ln x (\ln x + 2)$

*Απλά και Κατανοητά η Γνώση!*