

## Περιεχόμενα

### Κεφάλαιο 1ο: Βασικές γεωμετρικές έννοιες

- 1.1 Σημείο - Ευθύγραμμο τμήμα - Ευθεία - Ημιευθεία –  
Επίπεδο - Ημιεπίπεδο.....σελ.6
- 1.2 Γωνία - Γραμμή - Επίπεδα σχήματα - Ευθύγραμμα  
σχήματα – Ίσα σχήματα.....σελ.18
- 1.3 Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων –  
Απόσταση σημείων - Μέσο ευθύγραμμου τμήματος.....σελ.29
- 1.4 Πρόσθεση και αφαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων.....σελ.41
- 1.5 Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα γωνιών -  
Διχοτόμος γωνίας.....σελ.49
- 1.6 Είδη γωνιών - Κάθετες ευθείες.....σελ.59
- 1.7 Εφεξής και διαδοχικές γωνίες - Άθροισμα γωνιών.....σελ.69
- 1.8 Παραπληρωματικές και συμπληρωματικές γωνίες –  
Κατακορυφήν γωνίες.....σελ.78
- 1.9 Θέσεις ευθειών στο επίπεδο.....σελ.93
- 1.10 Απόσταση σημείου από ευθεία - Απόσταση παραλλήλων.....σελ.102
- 1.11 Κύκλος και στοιχεία του κύκλου.....σελ.117
- 1.12 Επίκεντρη γωνία - Σχέση επίκεντρης γωνίας και του  
αντίστοιχου τόξου - Μέτρηση τόξου.....σελ.133
- 1.13 Θέσεις ευθείας και κύκλου.....σελ.145

### Κεφάλαιο 2ο: Συμμετρία

- 2.1 Συμμετρία ως προς άξονα.....σελ.157
- 2.2 Άξονας συμμετρίας.....σελ.171
- 2.3 Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος.....σελ.182
- 2.4 Συμμετρία ως προς σημείο.....σελ.195
- 2.5 Κέντρο συμμετρίας.....σελ.209
- 2.6 Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μία άλλη ευθεία....σελ.221

*Έξυπνα και Εύκολα η Προετοιμασία!*

## Κεφάλαιο 3ο: Τρίγωνα – Παραλληλόγραμμα - Τραπεζία

- 3.1 Στοιχεία τριγώνου - Είδη τριγώνων.....σελ.238
- 3.2 Άθροισμα γωνιών τριγώνου - Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου.....σελ.256
- 3.3 Παραλληλόγραμμα - Ορθογώνιο - Ρόμβος - Τετράγωνο - Τραπεζία - Ισοσκελές τραπέζιο.....σελ.270
- 3.4 Ιδιότητες παραλληλογράμμου - Ορθογωνίου - Ρόμβου – Τετραγώνου - Τραπεζίου - Ισοσκελούς τραπεζίου.....σελ.284

*Έξυπνα και Εύκολα η Προετοιμασία!*

---

# Κεφάλαιο 1ο:

## *Βασικές γεωμετρικές έννοιες*

---

Έξυπνα και Εύκολα η Προετοιμασία!



## 1.1 - Σημείο - Ευθύγραμμο τμήμα - Ευθεία - Ημιευθεία - Επίπεδο - Ημιεπίπεδο

### Μαθησιακά ερωτήματα

- Τι είναι το σημείο, το ευθύγραμμο τμήμα, η ευθεία, η ημιευθεία, το επίπεδο και το ημιεπίπεδο για τη Γεωμετρία;

Στην καθημερινότητά μας, ίσως έχουμε προσέξει εκφράσεις όπως:

«για να πας στο φαρμακείο, συνέχισε όλο ευθεία», «θα ξεκινήσουμε να βάφουμε από αυτό το σημείο έως εκείνον τον τοίχο», «το parking βρίσκεται δύο επίπεδα πιο κάτω», κτλ.

Οι λέξεις – κλειδιά στις παραπάνω εκφράσεις είναι και η αρχή της Γεωμετρίας. Για να μπορέσουμε να ξεκινήσουμε την αναζήτησή μας στον κόσμο της Γεωμετρίας, θα πρέπει πρώτα να έχουμε καταλάβει ακριβώς τι εννοούμε όταν λέμε *σημείο*, *ευθεία*, *επίπεδο*, κτλ.

- Ποια είναι τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά καθεμιάς από αυτές τις έννοιες και πώς συνδέονται μεταξύ τους;

Αν σχεδιάσουμε στο χαρτί μας δύο σημεία, πόσες ευθείες μπορούμε να φέρουμε που να διέρχονται και από τα δύο; Πόσα επίπεδα μπορούμε να φέρουμε που να διέρχονται και από τα δύο; Πόσα σημεία έχει μία ευθεία; Ποια είναι η διαφορά μίας ευθείας από ένα ευθύγραμμο τμήμα;

Τέτοια ερωτήματα πάνω στις έννοιες που θα δούμε σε λίγο είναι ακριβώς εκείνα που πρέπει να απαντήσουμε για να μπορέσουμε να συνεχίσουμε στην αναζήτησή μας!

*Έξυπνα και Εύκολα η Προετοιμασία!*

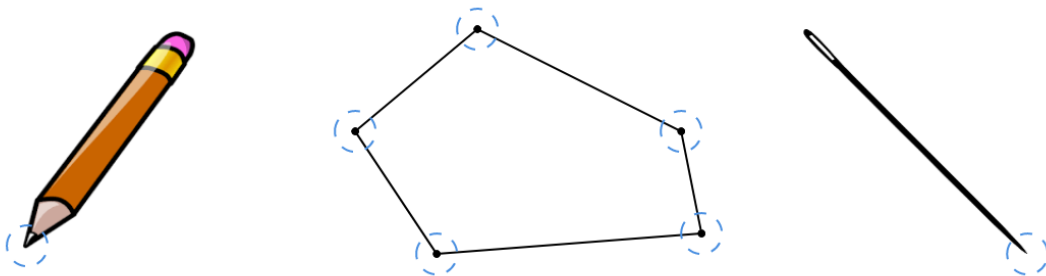
Η ύλη της Γεωμετρίας μας ξεκινάει με παρατηρήσεις (αντί για ορισμούς) του σημείου, της ευθείας και του επιπέδου. Λέμε ότι πρόκειται για παρατηρήσεις, επειδή μπορούμε μόνο να περιγράψουμε αυτές τις έννοιες. Με άλλα λόγια, δεν θα πούμε ποτέ «σημείο είναι ...» ή «ευθεία είναι ...». Αν προσπαθήσετε να δώσετε δικούς σας ορισμούς, σύντομα θα διαπιστώσετε ότι θα αναγκαστείτε να χρησιμοποιήσετε εκφράσεις όπως «ευθεία είναι μία ευθεία γραμμή» οι οποίες βέβαια δεν είναι μαθηματικά λογικές.

Στην παράγραφο αυτή, λοιπόν, θα δώσουμε τις περιγραφές και όχι τους ορισμούς των βασικών συστατικών της Γεωμετρίας, ενώ στις επόμενες θα μπορούμε να ορίσουμε ακριβώς όλα τα υπόλοιπα συστατικά της Γεωμετρίας χρησιμοποιώντας αυτές τις αρχικές έννοιες.

### A. Το σημείο και το ευθύγραμμο τμήμα

Ας ξεκινήσουμε με την έννοια του σημείου:

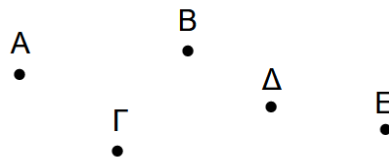
- Η άκρη του μολυβιού μας, οι κορυφές ενός σχήματος, η μύτη μιας βελόνας, μας δίνουν την έννοια του **σημείου**.



Ένα σημείο είναι κάτι πολύ πολύ μικρό (χωρίς έκταση στο χώρο). Για να συμβολίσουμε ένα σημείο, ωστόσο, σχεδιάζουμε μία **τελεία** ή ένα πολύ μικρό κυκλάκι.

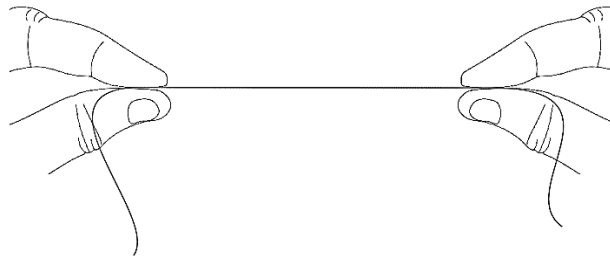
Για να ονοματίσουμε ένα σημείο χρησιμοποιούμε **κεφαλαία γράμματα**, συνήθως (αλλά όχι απαραίτητα) από την αρχή του αλφαβήτου.

*Έξυπνα και Εύκολα η Προετοιμασία!*



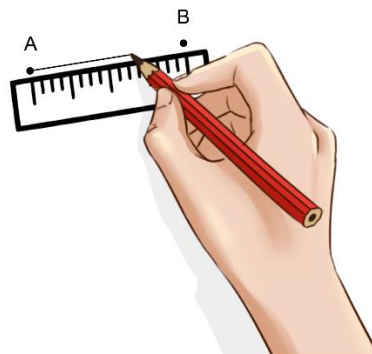
Ας περάσουμε στην έννοια του ευθυγράμμου τμήματος. Για να μιλήσουμε για ένα ευθύγραμμο τμήμα, θα πρέπει πρώτα να έχουμε στη διάθεσή μας δύο σημεία.

- Μία τεντωμένη κλωστή με άκρα τα σημεία  $A$  και  $B$  μας δίνει μια εικόνα της έννοιας του **ευθύγραμμου τμήματος  $AB$** .



Τα σημεία  $A$  και  $B$  ονομάζονται **άκρα** του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$  και λέμε ότι τα σημεία αυτά **ορίζουν** το αντίστοιχο ευθύγραμμο τμήμα. Στη Γεωμετρία δεν έχει σημασία η σειρά που τοποθετούμε τα γράμματα των σημείων σε ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή το τμήμα  $AB$  είναι ακριβώς ίδιο με το  $BA$ .

Για να κατασκευάσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα, σχεδιάζουμε πρώτα τα δύο άκρα του και έπειτα ενώνουμε τα σημεία αυτά με τη βοήθεια ενός **χάρακα**. Στη Γεωμετρία αντί για τη λέξη χάρακας, χρησιμοποιούμε τη λέξη **κανόνας**.

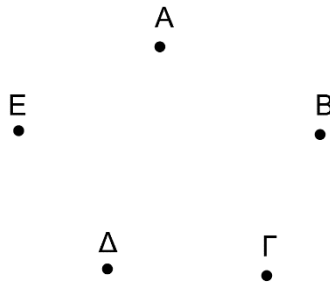


*Έξυπνα και Εύκολα η Προετοιμασία!*



## Εφαρμογές

**Εφαρμογή Α.1.** Να ονομάσετε όλα τα σημεία που παρατηρείτε στο παρακάτω σχήμα και να σχεδιάσετε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα με άκρα τα σημεία αυτά.



*Μεθοδολογία: Παρατηρούμε τα σημεία του σχήματος και φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα που έχουν αυτά τα άκρα. Για να το κάνουμε αυτό, είναι βολικό να ξεκινήσουμε πρώτα με ένα σημείο και να φέρουμε όλα τα τμήματα με ένα άκρο τους αυτό το σημείο. Έπειτα να επιλέξουμε ένα άλλο σημείο και να φέρουμε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που ξεκινούν από αυτό και συνεχίζουμε τη διαδικασία μέχρι να εξαντηθούν τα σημεία εκκίνησης.*

Απάντηση

Παρατηρούμε πέντε σημεία:  $A, B, \Gamma, \Delta$  και  $E$ .

Από αυτά μπορούμε να φέρουμε τα εξής ευθύγραμμα τμήματα:

$AB, A\Gamma, A\Delta, AE$

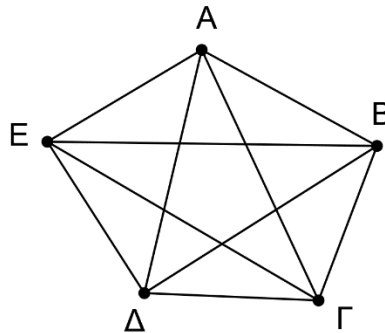
$B\Gamma, B\Delta, BE$

$\Gamma\Delta, \Gamma E$

$\Delta E$

Έξυπνα και Εύκολα η Προετοιμασία!

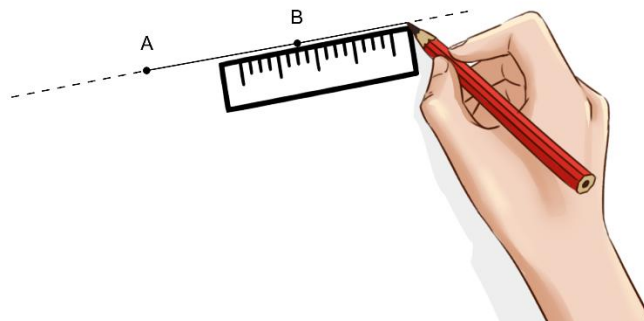
Σχηματικά:



## Β. Η ευθεία και η ημιευθεία

Η επόμενη έννοια είναι αυτή της ευθείας:

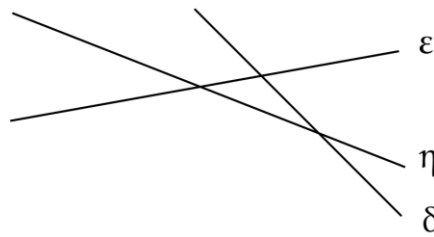
- Εάν προεκτείνουμε απεριόριστα ένα ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  με τη βοήθεια του κανόνα, τότε το νέο σχήμα που δεν έχει **ούτε αρχή** **ούτε τέλος**, ονομάζεται **ευθεία**.



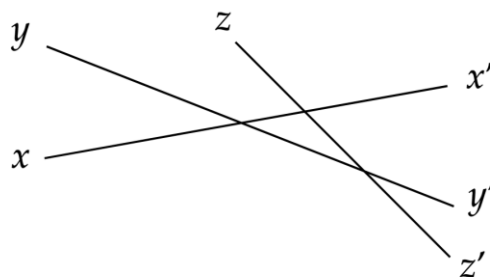
Έχουμε τρεις τρόπους για να συμβολίσουμε μία ευθεία:

1. με ένα πεζό γράμμα από την αρχή της ελληνικής αλφαβήτου (κάποιες φορές εντός παρενθέσεων):  $(\epsilon)$ ,  $(\eta)$ ,  $(\delta)$ , ...

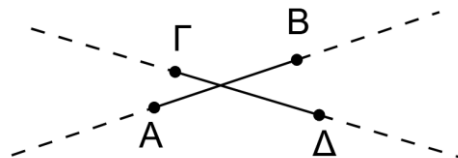
*Έξυπνα και Εύκολα η Προετοιμασία!*



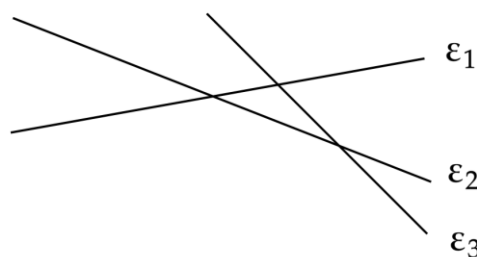
2. με δύο πεζά γράμματα από το τέλος της αγγλικής αλφαβήτου:  
 $xx', yy', zz', \dots$  ή  $x'x, y'y, z'z, \dots$



3. με τα ίδια γράμματα με το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα,  
 χρησιμοποιώντας τη λέξη «ευθεία», π.χ. η ευθεία  $AB$ , η ευθεία  $\Gamma\Delta$ .



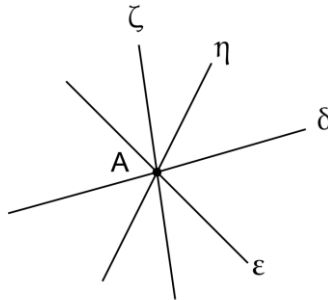
Πολλές φορές, κυρίως όταν θέλουμε να ονοματίσουμε πολλές ευθείες, χρησιμοποιούμε ένα γράμμα με διαφορετικούς δείκτες – ένας δείκτης για κάθε ευθεία. Δείκτες ονομάζονται οι (ακέραιοι) αριθμοί κάτω αριστερά ενός γράμματος, π.χ.  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots$



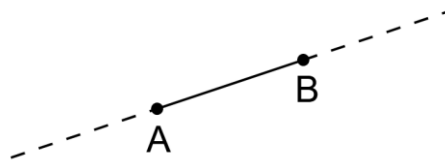
*Έξυπνα και Εύκολα η Προετοιμασία!*

Δύο πολύ βασικές παρατηρήσεις που μπορούμε να κάνουμε για τις ευθείες και τα σημεία είναι:

- Από ένα σημείο διέρχονται άπειρες ευθείες.

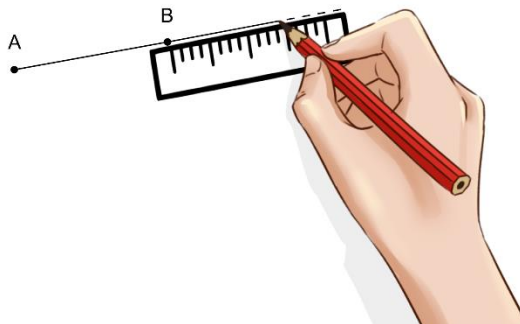


- Από δύο σημεία διέρχεται μόνο μία ευθεία.



Τώρα, ας περιγράψουμε την έννοια της ημιευθείας:

- Εάν προεκτείνουμε απεριόριστα ένα ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  πέρα από το ένα μόνο άκρο του, π.χ. το  $B$ , τότε το νέο σχήμα, που έχει αρχή το σημείο  $A$  αλλά δεν έχει τέλος, ονομάζεται ημιευθεία.

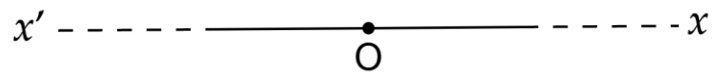


Συμβολίζουμε μία ημιευθεία με ένα κεφαλαίο γράμμα που δηλώνει την αρχή της και ένα πεζό από τα τελευταία της αγγλικής αλφαβήτου: π.χ.  $Ax, Bx', Gy, \Delta y'$ .

*Έξυπνα και Εύκολα η Προετοιμασία!*

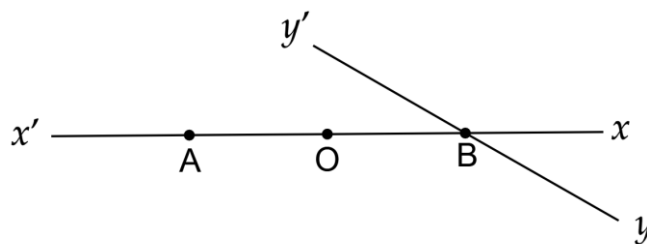
Ένας ορισμός που θα μας είναι απαραίτητος στη συνέχεια είναι οι αντικείμενες ημιευθείες:

- Εάν  $O$  είναι ένα (τυχαίο) σημείο της ευθείας  $xx'$  τότε με αρχή το  $O$  ορίζονται δύο ημιευθείες  $Ox$  και  $Ox'$  οι οποίες λέγοντας **αντικείμενες ημιευθείες**.



### Εφαρμογές

**Εφαρμογή Β.1.** Ποιες αντικείμενες ημιευθείες ορίζονται στο παρακάτω σχήμα;



*Μεθοδολογία: Για να αποφασίσουμε αν δύο ημιευθείες είναι αντικείμενες ή όχι, αρκεί να ελέγξουμε: 1) αν έχουν κοινή αρχή και 2) αν σχηματίζουν μαζί μία ευθεία.*

Απάντηση

Τα ζεύγη αντικείμενων ημιευθειών του παραπάνω σχήματος είναι:

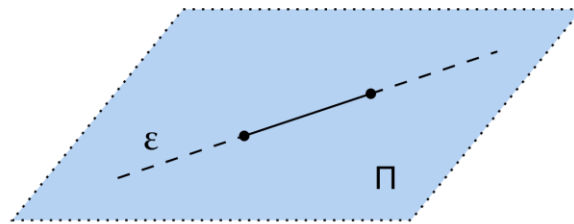
$Ax'$  και  $Ax$ ,  $Ox'$  και  $Ox$ ,  $Bx$  και  $Bx'$ ,  $By$  και  $By'$ .

### Γ. Το επίπεδο και το ημιεπίπεδο

Τελευταίες έννοιες για την παράγραφό μας είναι το επίπεδο και το ημιεπίπεδο.

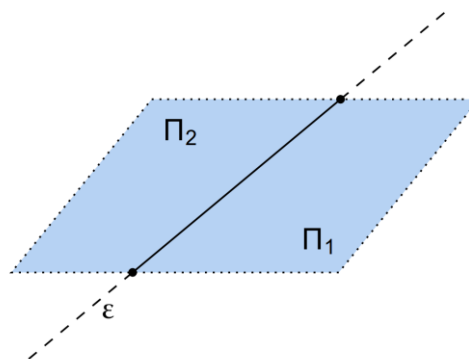
Έξυπνα και Εύκολα η Προετοιμασία!

- Επίπεδο είναι μία επιφάνεια, πάνω στην οποία εφαρμόζει παντού η ευθεία γραμμή.



Όπως και μία ευθεία, έτσι και ένα επίπεδο, επεκτείνεται απεριόριστα. Αν έχουμε ένα επίπεδο και φέρουμε πάνω του μια ευθεία γραμμή, τότε παίρνουμε δύο ημιεπίπεδα:

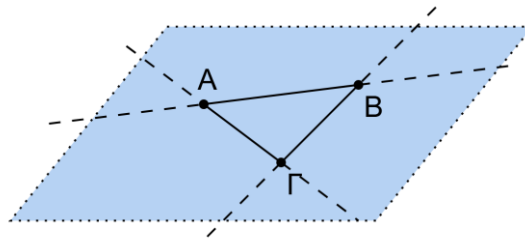
- Κάθε ευθεία ενός επιπέδου το χωρίζει σε δύο ημιεπίπεδα.



Συμβολίζουμε τα επίπεδα με κεφαλαία γράμματα από το τέλος της ελληνικής αλφαβήτου:  $\Pi, P, \Sigma, \dots$ , ενώ τα ημιεπίπεδα στα οποία χωρίζει μία ευθεία το επίπεδο τα ξεχωρίζουμε με δύο δείκτες:  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  ή  $P_1$  και  $P_2$  ή  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$ .

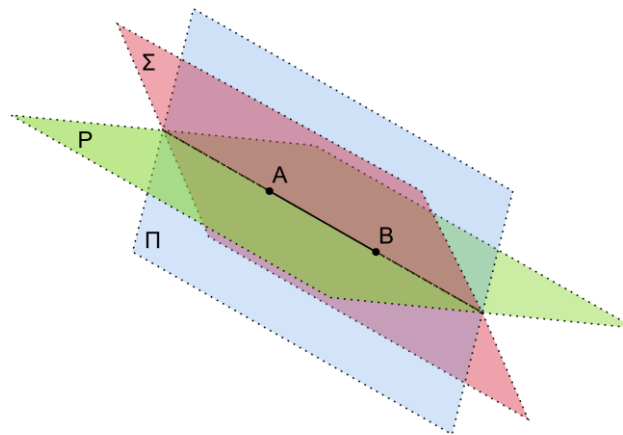
Σχετικά με τα επίπεδα μπορούμε να κάνουμε τις εξής σημαντικές παρατηρήσεις:

- Από τρία μη-συνευθειακά σημεία διέρχεται ένα μοναδικό επίπεδο.

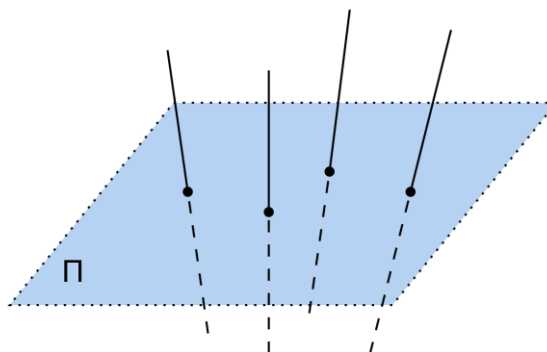


Με τον όρο *συνευθειακά* εννοούμε δύο (ή τρία ή περισσότερα) σημεία που ανήκουν στην ίδια ευθεία. Άρα εδώ εννοούμε τα σημεία να μην ανήκουν και τα τρία στην ίδια ευθεία.

- Από ένα ή δύο σημεία διέρχονται άπειρα επίπεδα.



- Κάθε επίπεδο χωρίζει το χώρο σε δύο μέρη, έτσι ώστε αν θέλουμε να περάσουμε από το ένα μέρος του χώρου στο άλλο, πρέπει να διαπεράσουμε το επίπεδο.



*Έξυπνα και Εύκολα η Προετοιμασία!*

## Εφαρμογές

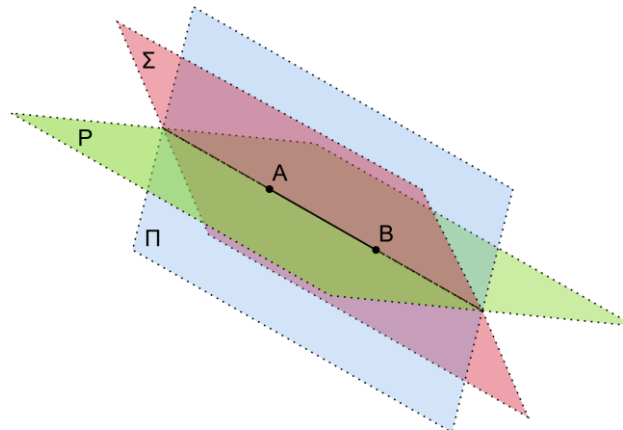
**Εφαρμογή Γ.1.** Πόσα επίπεδα διέρχονται από:

- α) τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος;
- β) τις κορυφές ενός τριγώνου;
- γ) τις κορυφές ενός τετραγώνου;
- δ) δύο ευθείες που τέμνονται σε ένα σημείο;

*Μεθοδολογία: Για να βρούμε πόσα επίπεδα διέρχονται από ένα σύνολο σημείων σκεφτόμαστε αν τα σημεία αυτά είναι ένα, δύο, τρία συνευθειακά ή μη, κ.ο.κ. Είναι απαραίτητο να κάνουμε ένα γρήγορο σχήμα για να οδηγηθούμε στην τελική απάντηση.*

Απάντηση

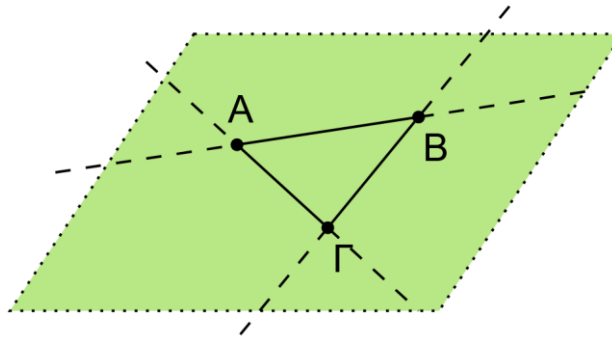
α) Τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος αποτελούν δύο σημεία και γνωρίζουμε ότι από δύο σημεία διέρχονται άπειρα επίπεδα.



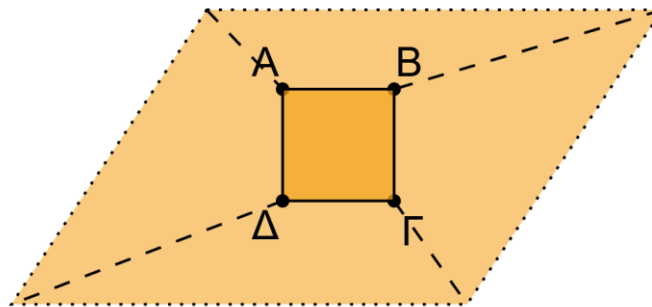
β) Οι κορυφές ενός τριγώνου αποτελούν τρία μη-συνευθειακά σημεία και γνωρίζουμε ότι από αυτά διέρχεται μόνο ένα επίπεδο, το ίδιο το επίπεδο του τριγώνου.

*Έξυπνα και Εύκολα η Προετοιμασία!*

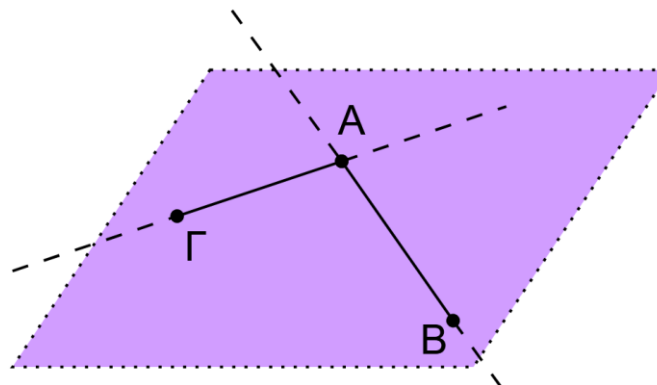




γ) Σχεδιάζοντας ένα τετράγωνο, παρατηρούμε ότι και οι τέσσερις κορυφές ανήκουν στο ίδιο επίπεδο, εκείνο που ορίζεται από το σχήμα αν προεκτείνουμε προς όλες τις κατευθύνσεις.



δ) Δύο ευθείες που τέμνονται σε ένα σημείο ορίζουν ένα μόνο επίπεδο. Αυτό μπορούμε να το δούμε, αν συμβολίσουμε το σημείο τομής τους με  $A$  και πάρουμε ένα ακόμα σημείο πάνω σε καθεμιά τους, π.χ.  $B$  και  $\Gamma$ . Τότε τα σημεία  $A, B$  και  $\Gamma$  είναι τρία μη-συνευθειακά σημεία και άρα ορίζουν ένα επίπεδο.



*Έξυπνα και Εύκολα η Προετοιμασία!*