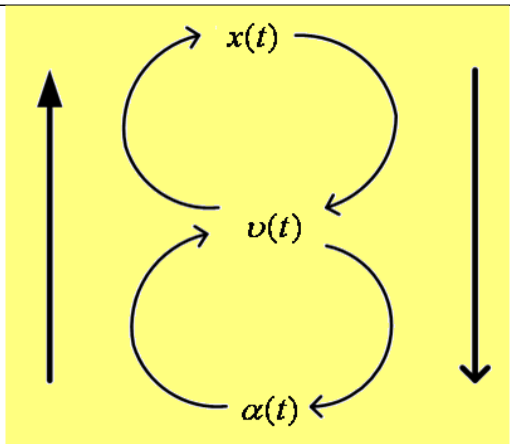
Κεφάλαιο 1

Κίνηση σε μια διάσταση

Θέση – Ταχύτητα – Επιτάχυνση

Γνωρίζοντας τη θέση *x(t)* ενός κινητού ως συνάρτηση του χρόνου μπορούμε να την παραγωγίσουμε διαδοχικά ως προς το χρόνο, για να υπολογίσουμε την ταχύτητα και την επιτάχυνσή του. Αντίθετα, γνωρίζοντας τη συνάρτηση της επιτάχυνσης *α(t)* και ολοκληρώνοντάς την διαδοχικά μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα και τη θέση του.

Σχηματικά η διαδικασία αυτή φαίνεται στο ακόλουθο διάγραμμα:

Χωρισμός Μεταβλητών & Ολοκλήρωση		$\upsilon = \frac{dx}{dt}$ Παραγώγιση $a = \frac{d\upsilon}{dt}$

Βασικά Είδη Κίνησης

Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση (Ε.Ο.Κ.): κίνηση που γίνεται σε ευθεία γραμμή με σταθερή ταχύτητα (μηδενική επιτάχυνση)

Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη (ή Επιβραδυνόμενη) Κίνηση: κίνηση που γίνεται σε ευθεία γραμμή με σταθερή μη μηδενική επιτάχυνση (ή επιβράδυνση).

Φορά	←			→		
Ταχύτητα	-			+		
Επιτάχυνση	-	**0**	+	-	**0**	+
Κίνηση	Ε.Ο.Επιταχ.	Ε.Ο.	Ε.Ο.Επιβρ.	Ε.Ο.Επιβρ.	Ε.Ο.	Ε.Ο.Επιταχ.

Οι εξισώσεις κίνησης συγκεντρώνονται στον παρακάτω πίνακα:

Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση	**Ευθύγραμμη Ομαλά Μεταβαλλόμενη κίνηση**
$x(t_0)=x_0\ ,\ \upsilon(t_0)=\upsilon_0$	$x(t_0)=x_0\ ,\ \upsilon(t_0)=\upsilon_0$
$x(t)=x_0+\upsilon_0(t-t_0)$	$x(t)=x_0+\upsilon_0(t-t_0)+\frac{1}{2}a_0(t-t_0)^2$
$\upsilon(t)=\frac{dx}{dt}=\upsilon_0$	$\upsilon(t)=\upsilon_0+a_0(t-t_0)$
$a(t)=\frac{d\upsilon}{dt}=0$	$a(t)=a_0$

Ελεύθερη πτώση – Κατακόρυφη βολή προς τα άνω

Η ελεύθερη πτώση και η κατακόρυφη βολή προς τα άνω αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης. Ο παρακάτω πίνακας συγκεντρώνει τις εξισώσεις κίνησης σε κάθε περίπτωση:

Ελεύθερη πτώση	**Κατακόρυφη Βολή προς τα άνω**
$z(t_0)=z_0$	$z(t_0)=z_0$
$\upsilon(t_0)=-\upsilon_0$	$\upsilon(t_0)=\upsilon_0$
$a(t)=-g$	$a(t)=-g$
$\upsilon(t)=-\upsilon_0-g(t-t_0)$	$\upsilon(t)=\upsilon_0-g(t-t_0)$
$z(t)=z_0-\upsilon_0(t-t_0)-\frac{1}{2}g(t-t_0)^2$	$z(t)=z_0+\upsilon_0(t-t_0)-\frac{1}{2}g(t-t_0)^2$

Νόμοι του Νεύτωνα

1^{ος} Νόμος: Η κινητική κατάσταση ενός σώματος δεν μεταβάλλεται, δηλαδή το σώμα ηρεμεί ή κινείται με σταθερή ταχύτητα, όταν σε αυτό δεν επιδρά καμμιά εξωτερική δύναμη:

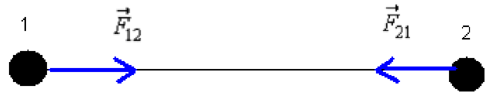
$$\vec{a}=0 \Leftrightarrow \sum \vec{F}=0$$

2^{ος} Νόμος: Η συνολική δύναμη που ενεργεί πάνω στο σώμα είναι ανάλογη της επιτάχυνσής του (στην ειδική περίπτωση που η μάζα του σώματος δεν μεταβάλλεται):

$$\sum \vec{F}=m\vec{a}$$

3^{ος} Νόμος: Όταν δυο σώματα αλληλεπιδρούν η δύναμη $\vec{F}_{21}$, που ασκείται στο σώμα 2 από το σώμα 1, είναι ίση και αντίθετη από τη δύναμη $\vec{F}_{12}$, που ασκείται στο σώμα 1 από το σώμα 2:

$$\vec{F}_{21}=-\vec{F}_{12}$$



Άσκηση 1

ΕΑΠ, ΦΥΕ24: 1η ΑΣΚΗΣΗ 1ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2007-08

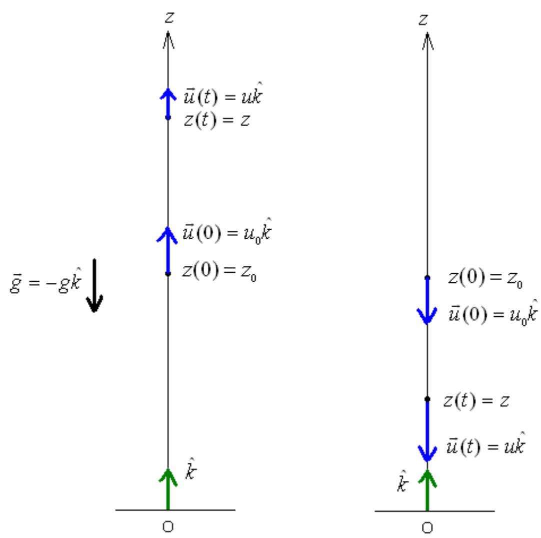
Υλικό σημείο μάζας m βρίσκεται στον κατακόρυφο άξονα z στη θέση $z = z_0$ και βάλεται κατακόρυφα με αρχική ταχύτητα $u = u_0$. Οι ποσότητες z_0 και u_0 είναι αλγεβρικές. Το πεδίο βαρύτητας είναι σταθερό με επιτάχυνση g.
Α) Να σχεδιασθεί ο κατακόρυφος άξονας z με όποια φορά θέλετε και να γραφεί η εξίσωσηκίνησης του υλικού σημείου.
Β) Να λυθεί η εξίσωση κίνησης στη γενική της περίπτωση και να εφαρμοστούν σ' αυτήν οι αρχικές συνθήκες.
Γ) Τι αλλάζει στα ερωτήματα Α και Β αν πάρετε την αντίθετη φορά για τον άξονα z από αυτή που ήδη επιλέξατε στο ερώτημα Α;

Υποδειγματική Λύση

Είμαστε ελεύθεροι να ορίσουμε ως αρχική χρονική στιγμή την $t = 0$. Η θέση του σώματος αρχικά δίνεται ότι είναι $z(0) = z_0$.

Α) Σχεδιάζουμε τον άξονα z με αρχή το σημείο Ο στο έδαφος και με φορά προς τα πάνω, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ορίζουμε επίσης το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{k}$ με φορά επίσης προς τα πάνω (προς το θετικό ημιάξονα Oz). Η αρχική ταχύτητα του υλικού σημείου είναι $\vec{u}(0) = u_0\hat{k}$, όπου η ποσότητα u_0 είναι θετική αν το σώμα βάλλεται κατακόρυφα προς τα άνω ή αρνητική αν το σώμα βάλλεται κατακόρυφα προς τα κάτω (βλ. σχήμα). Αν αγνοήσουμε την τριβή με τον αέρα, το υλικό σημείο κινείται υπό την επίδραση της βαρύτητας και μόνο. Συνεπώς, η κίνησή του περιγράφεται από την διανυσματική εξίσωση:

$$\vec{g} = \vec{a} \Rightarrow \boxed{\vec{g} = \frac{d\vec{u}}{dt}} \quad (1)$$



Περίπτωση $u_0 > 0$ Περίπτωση $u_0 < 0$

Β) Θα λύσουμε την (1) στη γενική περίπτωση. Έστω $z(t)=z$ και $\vec{u}(t)=u\hat{k}$ η θέση και η ταχύτητα, αντίστοιχα, του υλικού σημείου την τυχούσα χρονική στιγμή t. Το u είναι μια αλγεβρική ποσότητα η οποία είναι θετική, αν η κίνηση είναι προς τα πάνω, ή αρνητική, αν η κίνηση είναι προς τα κάτω. Έχουμε:

$$\vec{g}=\frac{d\vec{u}}{dt}\Rightarrow -g\hat{k}=\frac{du}{dt}\hat{k}\Rightarrow \frac{du}{dt}=-g \quad (2)$$

Ολοκληρώνουμε την σχέση (2) λαμβάνοντας υπόψη μας τις αρχικές συνθήκες:

$$\int_{u_0}^{u}du=-g\int_0^t dt\Rightarrow u-u_0=-gt\Rightarrow u(t)=u_0-gt \quad (3)$$

Η (3) δίνει την ταχύτητα του υλικού σημείου σε κάθε χρονική στιγμή. Υπενθυμίζουμε ότι θετικές τιμές της $u(t)$ αντιστοιχούν σε κίνηση προς τα άνω, ενώ αρνητικές τιμές σε κίνηση προς τα κάτω.

Για να βρούμε τη θέση του σώματος γράφουμε την ταχύτητα με βάση τον ορισμό της: $u=\frac{dz}{dt}$, οπότε η (3) γράφεται: $\frac{dz}{dt}=u_0-gt$ (4)

Ολοκληρώνουμε την σχέση (4) λαμβάνοντας υπόψη μας τις αρχικές συνθήκες:

$$\int_{z_0}^{z}dz=\int_0^t\left(u_0-gt\right)dt\Rightarrow z-z_0=u_0t-\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow z(t)=z_0+u_0t-\frac{1}{2}gt^2 \quad (5)$$

Η (5) δίνει τη θέση του υλικού σημείου σε κάθε χρονική στιγμή.

Γ) Αν πάρουμε την αντίθετη φορά για τον άξονα z θα πρέπει να ορίσουμε ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{z}$ αντίθετο από την προηγούμενη θεώρηση, δηλ. $\hat{z}=-\hat{k}$. Αυτό έχει ως συνέπεια να θεωρούμε πλέον ως θετική τη διεύθυνση προς τα κάτω. Προφανώς η διανυσματική εξίσωση κίνησης (1) θα παραμείνει αμετάβλητη. Αλλά επειδή τώρα είναι: $\vec{g}=g\hat{z}$, η διανυσματική εξίσωση θα οδηγήσει σε αλγεβρικές εξισώσεις με διαφορετικό πρόσημο στον όρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας, δηλ. όπου είχαμε πριν τον όρο $-g$ θα πρέπει τώρα να θέσουμε τον όρο $+g$.

Έτσι οι σχέσεις (2) έως (5) θα πρέπει να γραφούν πλέον ως:

$$\frac{du}{dt}=+g \quad (2)'$$

$$u(t)=u_0+gt \quad (3)'$$

$$\frac{dz}{dt}=u_0+gt \quad (4)'$$

$$z(t)=z_0+u_0t+\frac{1}{2}gt^2 \quad (5)'$$

Στη νέα θεώρηση η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας θα λαμβάνεται θετική αν το υλικό σημείο κινείται προς τα κάτω και αρνητική αν κινείται προς τα πάνω (αντίθετα δηλαδή από την προηγούμενη θεώρηση).

Άσκηση 2

Η επιτάχυνση ενός σώματος που κινείται σε ευθεία γραμμή δίνεται από τη σχέση $a=-kU$, όπου k είναι μια θετική σταθερά. Αρχικά, την $t=0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $x_0>0$ και έχει ταχύτητα $U_0>0$ (δηλ. κινείται προς τα δεξιά).

Α) Ποιες είναι οι μονάδες της σταθεράς k;
Β)Προσδιορίστε τη θέση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση τ ου σώματος συναρτήσει του χρόνου, καθώς επίσης την ταχύτητά του ως συνάρτηση της θέσης του.
Γ) Κάνετε τις γραφικές παραστάσεις: *x-t, U-t, a-t,* και *U-x.*

Υποδειγματική Λύση

Α) Οι μονάδες της σταθεράς k είναι μονάδες αντιστρόφου χρόνου. Αν δηλαδή ο χρόνος μετριέται σε s, τότε η σταθερά k μετριέται σε s^{-1}.

Β)Ολοκληρώνοντας τη σχέση επιτάχυνσης –ταχύτητας: $a=-kU$ λαμβάνουμε:

$$a=\frac{dU}{dt}=-kU\Rightarrow\frac{1}{U}\frac{dU}{dt}=-k\Rightarrow\int_{U_0}^{U}\frac{dU}{U}=\int_0^t -kdt\Rightarrow$$

$$\left[\ln U\right]_{U_0}^{U}=-kt\Rightarrow\ln U-\ln U_0=-kt\Rightarrow\ln\frac{U}{U_0}=-kt\Rightarrow\frac{U}{U_0}=e^{-kt}$$

Άρα η ταχύτητα μειώνεται εκθετικά με το χρόνο: $U(t)=U_0e^{-kt}$ (1)
τείνοντας αυμπτωτικά στο 0, αν και σε χρόνο $5/k$ πρακτικά μηδενίζεται.

Από τη σχέση αυτή παίρνουμε για την επιτάχυνση: $a(t)=-kU(t)=-kU_0e^{-kt}$

Παρατηρούμε ότι η επιτάχυνση είναι πάντα αντίθετη της ταχύτητας. Πρόκειται δηλαδή για επιβράδυνση (που προέρχεται προφανώς από κάποιο είδος τριβής). Καθώς περνά ο χρόνος η επιβράδυνση μειώνεται (βλ. Διάγραμμα - η επιτάχυνση αυξάνεται μεν, αλλά κατ' απόλυτη τιμή μειώνεται) τείνοντας στο 0 ασυμπτωτικά (σε χρόνο $5/k$ πρακτικά θα έχει μηδενιστεί, αλλά αυστηρά ποτέ δεν θα γίνει ακριβώς μηδέν).

Ολοκληρώνοντας την ταχύτητα παίρνουμε τη θέση του σώματος:

$$U=\frac{dx}{dt}=U_0e^{-kt}\Rightarrow\int_{x_0}^{x}dx=\int_0^t U(t)dt=\int_0^t U_0e^{-kt}dt\Rightarrow$$

$$x-x_0=\frac{U_0}{-k}\left[e^{-kt}\right]_0^t\Rightarrow x(t)=x_0-\frac{U_0}{k}\left(e^{-kt}-1\right)$$

Άρα η θέση του σώματος ως συνάρτηση του χρόνο δίνεται από τη σχέση:

$$x(t) = x_0 + \frac{U_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) \quad (2)$$

όπου θεωρήσαμε ότι η αρχική θέση του σώματος είναι $x(0) = x_0$. Το σωματίδιο θα τείνει ασυμπτωτικά σε μια θέση: $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0 + U_0 / k$ χωρίς όμως ποτέ (αυστηρά) να φτάσει εκεί!

Ένας **πρώτος τρόπος** να υπολογίσουμε τη σχέση ταχύτητας-θέσης είναι να απαλείψουμε το χρόνο από τις (1) και (2). Έτσι:

(1)→ $e^{-kt} = U(t)/U_0$

και αντικαθιστώντας στη (2) παίρνουμε:

$$x = x_0 + \frac{U_0}{k}\left(1 - \frac{U}{U_0}\right) \Leftrightarrow x - x_0 = \frac{U_0}{k} - \frac{U}{k} \Leftrightarrow k(x - x_0) = U_0 - U$$

οπότε $U = U_0 - k(x - x_0)$, που παριστάνει ευθεία αρνητικής κλίσης αν $k > 0$.

Ένας **δεύτερος τρόπος** είναι να γράψουμε την ταχύτητα ως σύνθετη συνάρτηση:

$U = U(x(t))$,

οπότε παραγωγίζοντας και κάνοντας χρήση του «κανόνα αλυσίδας» παίρνουμε:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dx}\frac{dx}{dt} \Rightarrow a = \frac{dU}{dx}U \Rightarrow -k\cancel{U} = \frac{dU}{dx}\cancel{U}$$

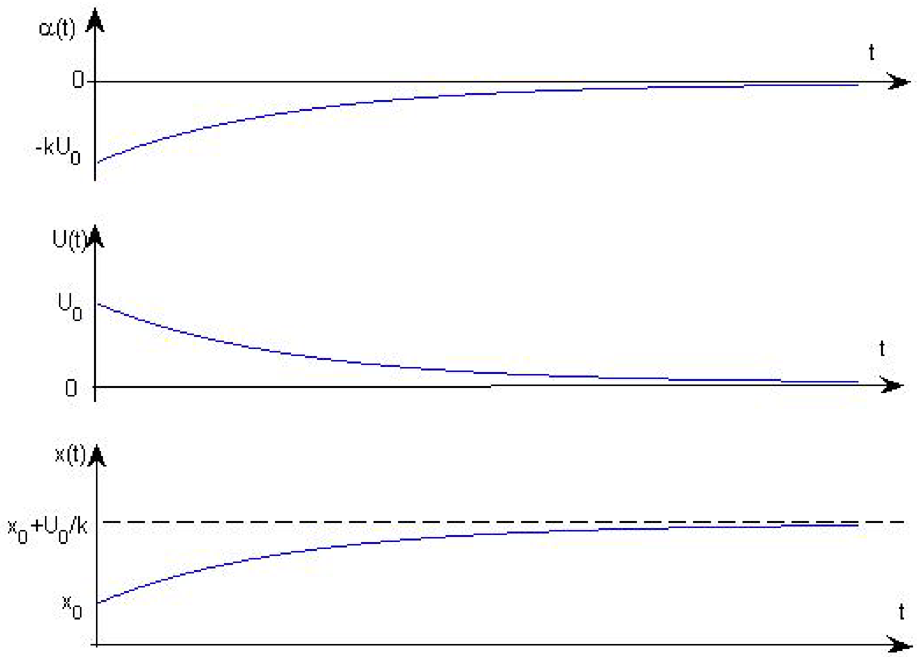
Ολοκληρώνοντας ως προς x:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dU}{dx}dx = -k\int_{x_0}^{x} dx \Leftrightarrow U(x) - U(x_0) = -k(x - x_0) \Leftrightarrow$$

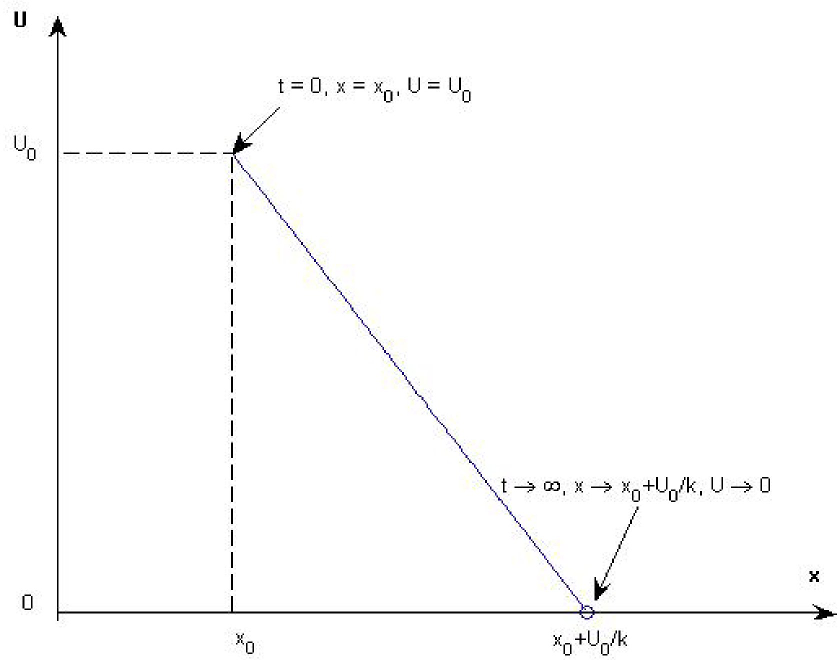
$U = U_0 - k(x - x_0)$, όπως και με τον προηγούμενο τρόπο.

Παραπάνω συμβολίσαμε: $U(x_0) = U(x(0)) = U_0$.

Γ) Οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις *α-t, U-t, x-t, U-x* φαίνονται παρακάτω.



Το διάγραμμα *U-x* είναι μια ευθεία αρνητικής κλίσης. Στο φυσικό πρόβλημα που μελετάμε η θέση του σωματιδίου είναι περιορισμένη στο διάστημα $[x_0, x_0 + U_0 / k)$ και άρα η ταχύτητα περιορίζεται στο διάστημα τιμών $(0, U_0]$.



Άσκηση 3

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $\ddot{x} = -2\dot{x}$ με αρχικές συνθήκες: $\dot{x}(0) = 1$, $x(0) = 2$. Μπορείτε να θέσετε ένα φυσικό πρόβλημα που περιγράφεται από παρόμοια διαφορική εξίσωση;

Υποδειγματική Λύση

Έχουμε:

$$\ddot{x} = -2\dot{x} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -2\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{dx}{dt} + 2x\right] = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} + 2x = c$$

Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες ($t = 0$) παίρνουμε: $1 + 2 \cdot 2 = c \Rightarrow c = 5$

Άρα:

$$\frac{dx}{dt} + 2x = 5 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 5 - 2x \Rightarrow \int_2^x \frac{dx}{5-2x} = \int_0^t dt \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)\left[\ln(5-2x)\right]_2^x = t \Rightarrow$$

$$\ln(5-2x) - \ln(5-2\cdot 2) = -2t \Rightarrow \ln(5-2x) - \ln 1 = -2t \Rightarrow \ln(5-2x) = -2t \Rightarrow$$

$$5 - 2x = e^{-2t} \Rightarrow 2x = 5 - e^{-2t} \Rightarrow x(t) = \frac{5 - e^{-2t}}{2}$$

Για να θέσουμε ένα φυσικό πρόβλημα, θα αντιστοιχίσουμε στις μαθηματικές συναρτήσεις κάποια φυσικά μεγέθη. Το πιο απλό που μπορούμε να σκεφτούμε είναι να αντιστοιχίσουμε στο x τη θέση ενός σώματος που κινείται ευθύγραμμα, οπότε η ταχύτητά του είναι $\upsilon = \dot{x}$ και η επιτάχυνσή του $a = \ddot{x}$. Έτσι, το ισοδύναμο φυσικό πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

«Υλικό σημείο μάζας $m = 1kg$ κινείται ευθύγραμμα ξεκινώντας από τη θέση $x_0 = 2m$ με ταχύτητα $\upsilon_0 = 1m/s$. Αν το σωματίδιο επιβραδύνεται εξαιτίας της δράσης δύναμης μέτρου: $F_{\alpha\nu\tau} = 2\upsilon$, βρείτε τη θέση του συναρτήσει του χρόνου.»

<u>Λύση</u>

$2^{ος}$ Νόμος Νεύτωνα:

$$\vec{F}_{\alpha\nu\tau} = m\vec{a} \Rightarrow -2\upsilon = \alpha \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = -2\upsilon \Rightarrow \int_1^\upsilon \frac{d\upsilon}{\upsilon} = -2\int_0^t dt \Rightarrow \ln\upsilon = -2t \Rightarrow \upsilon = e^{-2t}$$

Άρα: $$\frac{dx}{dt} = e^{-2t} \Rightarrow \int_2^x dx = \int_0^t e^{-2t}dt \Rightarrow x - 2 = \left[\frac{e^{-2t}}{-2}\right]_0^t \Rightarrow$$

$$x - 2 = -\frac{1}{2}\left(e^{-2t} - 1\right) \Rightarrow x = 2 + \frac{1 - e^{-2t}}{2} \Rightarrow x = \frac{5 - e^{-2t}}{2}$$

Άσκηση 4

Δίνεται η θέση ενός υλικού σημείου στον άξονα x συναρτήσει του χρόνου t:

$$x = 2\sin\left(3t + \frac{\pi}{6}\right) \quad (1)$$

Να βρεθεί η διαφορική εξίσωση που έχει ως λύση την (1).

Υποδειγματική Λύση

Παραγωγίζοντας χρονικά την (1) παίρνουμε:

$$\dot{x} = 2 \cdot 3\cos\left(3t + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \dot{x} = 6\cos\left(3t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Παραγωγίζοντας ακόμα μια φορά:

$$\ddot{x} = 6 \cdot 3 \cdot \left[-\sin\left(3t + \frac{\pi}{6}\right)\right] \Rightarrow \ddot{x} = -18\sin\left(3t + \frac{\pi}{6}\right) \quad (2)$$

Συγκρίνοντας την (1) με τη (2) παρατηρούμε ότι με διαίρεση κατά μέλη:

$$\frac{\ddot{x}}{x} = \frac{-18\sin\left(3t + \frac{\pi}{6}\right)}{2\sin\left(3t + \frac{\pi}{6}\right)} \Rightarrow \frac{\ddot{x}}{x} = -9 \Rightarrow \ddot{x} = -9x \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + 9x = 0}$$

<u>Σημείωση</u>: *Συμβολίσαμε:* $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ *και* $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$

Άσκηση 5

ΕΑΠ, ΦΥΕ24: 2η ΑΣΚΗΣΗ 1ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2007-08

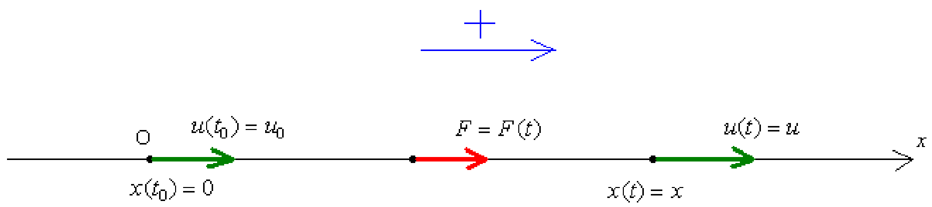
Υλικό σημείο μάζας m κινείται κατά μήκος του άξονα x υπό την επίδραση της δύναμης $F = mu_0 t_0^2 / t^3$, με $t > 0$, όπου u_0, t_0 είναι σταθερές με μονάδες ταχύτητας και χρόνου αντιστοίχως. Τη χρονική στιγμή $t = t_0$ το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $x = 0$ και έχει ταχύτητα $u = u_0$.

Α) Να βρεθεί η ταχύτητα και η θέση του υλικού σημείου για $t > t_0$.

Β) Να διερευνήσετε τα αποτελεσματά σας: 1) αν ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες, 2) αν όλοι οι όροι έχουν τις σωστές διαστάσεις και 3) αν στο όριο $t \to \infty$ δίνουν λογικά και αναμενόμενα αποτελέσματα.

Υποδειγματική Λύση

Επιλέγουμε τον άξονα x με αρχή το σημείο Ο ($x = 0$) και στην κατεύθυνση της δύναμης $F = F(t)$, την φορά της οποίας λαμβάνουμε ως θετική. Το υλικό σημείο τη χρονική στιγμή $t_0 > 0$ βρίσκεται στη θέση $x(t_0) = 0$ και έχει ταχύτητα $u(t_0) = u_0$ στην κατεύθυνση της δύναμης μιας και δίνεται ότι κινείται αποκλειστικά λόγω της δράσης της.



Α) Έστω, ότι την τυχούσα χρονική στιγμή t το υλικό σωμα βρίσκεται στη θέση $x(t) = x$ και έχει ταχύτητα $u(t) = u$.

Ο 2ος Νόμος του Νεύτωνα δίνει: $F = ma \Rightarrow mu_0 \dfrac{t_0^2}{t^3} = m\dfrac{du}{dt} \Rightarrow \dfrac{du}{dt} = \dfrac{u_0 t_0^2}{t^3}$ (1)

Ολοκληρώνουμε την σχέση (1) από τη χρονική στιγμή t_0 έως τη χρονική στιγμή t:

$$\int_{u_0}^{u} du = u_0 t_0^2 \int_{t_0}^{t} t^{-3} dt \Rightarrow u - u_0 = u_0 t_0^2 \left[\frac{t^{-3+1}}{-3+1} \right]_{t_0}^{t} \Rightarrow u - u_0 = -\frac{u_0 t_0^2}{2}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t_0^2} \right) \Rightarrow$$

$$u - u_0 = \frac{u_0}{2} - \frac{u_0 t_0^2}{2t^2} \Rightarrow u = \frac{3u_0}{2} - \frac{u_0 t_0^2}{2t^2} \Rightarrow u(t) = \frac{u_0}{2}\left[3 - \left(\frac{t_0}{t} \right)^2 \right] \quad (2)$$

Λαμβάνοντας υπόψη μας τον ορισμό της ταχύτητας μπορούμε να γράψουμε την σχέση (2) ως:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{u_0}{2}\left(3-\frac{t_0^2}{t^2}\right) \quad (3)$$

Με ολοκλήρωση της σχέσης (3) στο χρονικό διάστημα $\left[t_0,t\right]$ λαμβάνουμε:

$$\int_0^x dx=\frac{u_0}{2}\int_{t_0}^{t}\left(3-\frac{t_0^2}{t^2}\right)dt=\frac{u_0}{2}\left[3\int_{t_0}^{t}dt+t_0^2\int_{t_0}^{t}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt\right]=\frac{u_0}{2}\left(3\left[t\right]_{t_0}^{t}+t_0^2\left[\frac{1}{t}\right]_{t_0}^{t}\right)\Rightarrow$$

$$x=\frac{u_0}{2}\left[3\left(t-t_0\right)+t_0^2\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t_0}\right)\right]\Rightarrow x=\frac{3u_0}{2}t-\frac{3u_0t_0}{2}+\frac{u_0t_0^2}{2t}-\frac{u_0t_0}{2}\Rightarrow$$

$$x(t)=\frac{3u_0}{2}t+\frac{u_0t_0^2}{2t}-2u_0t_0 \quad (4)$$

Β) Ας διερευνήσουμε τα αποτελέσματά μας:

1) Ελέγχουμε τα αποτελέσματα (2) και (4) στην χρονική στιγμή t_0:

$$\left(2\right)\overset{t=t_0}{\Rightarrow}u(t_0)=\frac{u_0}{2}\left[3-\left(\frac{t_0}{t_0}\right)^2\right]=\frac{u_0}{2}\left[3-1^2\right]=u_0$$ ***(επιβεβαιώνεται η αρχική συνθήκη)***

$$\left(4\right)\overset{t=t_0}{\Rightarrow}x(t_0)=\frac{3u_0}{2}t_0+\frac{u_0t_0^2}{2t_0}-2u_0t_0=0$$ ***(επιβεβαιώνεται η αρχική συνθήκη)***

2) Ελέγχουμε αν οι όροι στα αποτελέσματα (2) και (4) έχουν τις σωστές διαστάσεις:

$$\left(2\right)\Rightarrow u(t)=\frac{u_0}{2}\left[3-\left(\frac{t_0}{t}\right)^2\right]$$

Ο όρος στην αγκύλη στο δεξί μέλος της (2) δεν έχει διαστάσεις μιας και περιέχει έναν καθαρό αριθμό και το πηλίκο χρόνου προς χρόνο που επίσης είναι αδιάστατο. Έτσι, το αποτέλεσμά μας έχει σωστές διαστάσεις, δηλ. διαστάσεις ταχύτητας, που τις φέρει ο όρος u_0.

$$(4) \Rightarrow x(t) = \frac{3u_0}{2}t + \frac{u_0 t_0^2}{2t} - 2u_0 t_0$$

Ο πρώτος και ο τρίτος όρος στο δεξί μέλος της (4) έχουν διαστάσεις ταχύτητας × χρόνου, άρα μήκους. Ο δεύτερος όρος έχει διαστάσεις ταχύτητας$\times$(χρόνου)^2 / χρόνο, άρα ταχύτητας × χρόνου, δηλ. διαστάσεις μήκους, που είναι οι σωστές διαστάσεις.

3) Τέλος, ας ελέγξουμε αν τα αποτελέσματά μας είναι λογικά στο όριο $t \to \infty$:

Για την ταχύτητα έχουμε:

$$(2) \Rightarrow \lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{t\to\infty}\left\{\frac{u_0}{2}\left[3 - \left(\frac{t_0}{t}\right)^2\right]\right\} = \frac{3u_0}{2} - \frac{u_0}{2}\underbrace{\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t_0}{t}\right)^2}_{0} = \frac{3u_0}{2}$$

Επομένως, η ταχύτητα του υλικού σημείου μετά από άπειρο χρόνο θα είναι 1.5 φορές μεγαλύτερη της αρχικής. Αυτό είναι λογικό, αφού η δύναμη είναι αντιστρόφως ανάλογη του κύβου του χρόνου: $F \sim t^{-3}$ και άρα πολύ γρήγορα γίνεται πολύ μικρή τείνοντας στο 0 σε μεγάλους χρόνους. Άρα σε μεγάλους χρόνους το υλικό σημείο κινείται ελεύθερα έχοντας αποκτήσει σταθερή ταχύτητα.

Για τη θέση του υλικού σημείου έχουμε:

$$(4) \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{3u_0}{2}t + \frac{u_0 t_0^2}{2t} - 2u_0 t_0\right) = \frac{3u_0}{2}\underbrace{\lim_{t\to\infty} t}_{\infty} + \frac{u_0 t_0^2}{2}\underbrace{\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\right)}_{0} - 2u_0 t_0 = \infty$$

Άρα, το υλικό σημείο τείνει να φτάσει στο άπειρο κινούμενο ευθύγραμμα ομαλά και διανύοντας, έτσι, διάστημα ανάλογο του χρόνου και με σταθερά αναλογίας την σταθερή ταχύτητα $3u_0/2$.

Άσκηση 6

ΕΑΠ, ΦΥΕ24: 3η ΑΣΚΗΣΗ 1ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2007-08

Υλικό σημείο μάζας m βρίσκεται ακίνητο στη θέση $x=0$. Για $t \geq 0$ δρα πάνω του η δύναμη $\vec{F}=\left(F_0 t^3/t_0^3\right)\hat{i}$ για $0 \leq t \leq t_0$ και $\vec{F}=-\left(F_0 t_0{}^3/t^3\right)\hat{i}$ για $t>t_0$, όπου F_0, t_0 είναι σταθερές με κατάλληλες μονάδες και $\hat{i}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στον άξονα x.

Α) Να βρεθεί η ταχύτητα του υλικού σημείου για όλες τις δυνατές τιμές του $t>0$.

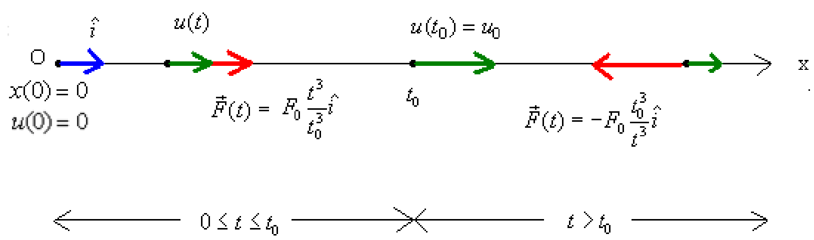
Β) Να διερευνήσετε τα αποτελεσματά σας 1) αν ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες, 2) αν έχουν τις σωστές διαστάσεις και 3) αν στο όριο $t \to \infty$ δίνουν λογικά και αναμενόμενα αποτελέσματα.

Υποδειγματική Λύση

Το υλικό σημείο είναι αρχικά ($t=0$) ακίνητο, δηλ. $u(0)=0$, στη θέση $x(0)=0$. Στη συνέχεια ασκείται πάνω του δύναμη παράλληλα προς τη διεύθυνση x και άρα το σωματίδιο θα κινηθεί κατά μήκος του άξονα x. Η δύναμη που ασκείται στο υλικό σημείο μεταβάλλεται χρονικά σύμφωνα με τη δοθείσα σχέση:

$$\vec{F}(t)=\begin{cases} F_0 \dfrac{t^3}{t_0^3}\hat{i}, & 0 \leq t \leq t_0 \\ -F_0 \dfrac{t_0^3}{t^3}\hat{i}, & t>t_0 \end{cases}$$

Συνεπώς, η δύναμη επιταχύνει το υλικό σημείο στο χρονικό διάστημα $[0,t_0]$ και μάλιστα με συνεχώς αυξανόμενο ρυθμό (αφού το μέτρο της αυξάνεται ανάλογα του κύβου του χρόνου $F \sim t^3$). Έστω ότι τη χρονική στιγμή t_0, η ταχύτητα του σωματιδίου είναι $u(t_0)=u_0$. Για χρονικές στιγμές $t>t_0$ η δύναμη αντιτίθεται στην κίνηση και το επιβραδύνει με συνεχώς μικρότερο ρυθμό, αφού το μέτρο της μειώνεται αντιστρόφως ανάλογα του κύβου του χρόνου, δηλ. $\vec{F} \sim t^{-3}\left(-\hat{i}\right)$.



Α) Έστω, ότι την τυχούσα χρονική στιγμή $t \leq t_0$ το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $x(t)=x$ και έχει ταχύτητα $u(t)=u$.

Ο 2ος Νόμος του Νεύτωνα δίνει στο χρονικό διάστημα $[0, t_0]$:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow F_0 \frac{t^3}{t_0^3}\hat{i} = m\frac{du}{dt}\hat{i} \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{F_0}{m}\frac{t^3}{t_0^3} \quad (1)$$

Ολοκληρώνουμε την σχέση (1) από τη χρονική στιγμή 0 έως τη χρονική στιγμή t:

$$\int_0^u du = \frac{F_0}{mt_0^3}\int_0^t t^3 dt \Rightarrow u = \frac{F_0}{mt_0^3}\left[\frac{t^{3+1}}{3+1}\right]_0^t \Rightarrow u = \frac{F_0}{mt_0^3}\frac{t^4}{4} \Rightarrow u(t) = \frac{F_0 t_0}{4m}\left(\frac{t}{t_0}\right)^4 \quad (2)$$

Η ταχύτητα του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t_0 (ακριβώς δηλαδή προτού αλλάξει η μορφή της δύναμης που ασκείται σε αυτό) είναι:

$$u_0 = u(t_0) \Rightarrow u_0 = \frac{F_0 t_0}{4m}\left(\frac{t_0}{t_0}\right)^4 \Rightarrow u_0 = \frac{F_0 t_0}{4m} \quad (3)$$

Αντίστοιχα, για χρονικές στιγμές $t > t_0$ ο 2ος Νόμος του Νεύτωνα δίνει:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -F_0 \frac{t_0^3}{t^3}\hat{i} = m\frac{du}{dt}\hat{i} \Rightarrow \frac{du}{dt} = -\frac{F_0}{m}\frac{t_0^3}{t^3} \quad (4)$$

Ολοκληρώνουμε την σχέση (4) από τη χρονική στιγμή t_0 στην οποία το υλικό σημείο έχει ταχύτητα $u_0 = F_0 t_0/(4m)$ έως μια τυχούσα χρονική στιγμή $t \geq t_0$ στην οποία η ταχύτητά του είναι $u = u(t)$:

$$\int_{u_0}^u du = -\frac{F_0}{m}t_0^3\int_{t_0}^t t^{-3} dt \Rightarrow u - u_0 = -\frac{F_0}{m}t_0^3\left[\frac{t^{-3+1}}{-3+1}\right]_{t_0}^t \overset{(3)}{\Rightarrow} u - \frac{F_0 t_0}{4m} = \frac{F_0 t_0^3}{2m}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t_0^2}\right) \Rightarrow$$

$$u - \frac{F_0 t_0}{4m} = \frac{F_0 t_0^3}{2mt^2} - \frac{F_0 t_0}{2m} \Rightarrow u = \frac{F_0 t_0^3}{2mt^2} - \frac{F_0 t_0}{4m} \Rightarrow u(t) = \frac{F_0 t_0}{4m}\left[2\left(\frac{t_0}{t}\right)^2 - 1\right] \quad (5)$$

Άρα, συνοψίζοντας τα αποτελέσματά μας, η ταχύτητα σε κάθε χρονική στιγμή είναι:

$$u(t) = \begin{cases} \dfrac{F_0 t_0}{4m}\left(\dfrac{t}{t_0}\right)^4, & 0 \leq t \leq t_0 \\ \dfrac{F_0 t_0}{4m}\left[2\left(\dfrac{t_0}{t}\right)^2 - 1\right], & t \geq t_0 \end{cases}$$

Β) Ας διερευνήσουμε τα αποτελέσματά μας:

1) Ελέγχουμε το αποτελέσματα (2) στην χρονική στιγμή 0:

$$(2) \overset{t=0}{\Rightarrow} u(0) = \frac{F_0}{4mt_0^3} 0^4 = 0$$ ***(επιβεβαιώνεται η αρχική συνθήκη)***

και το αποτέλεσμα (5) στην χρονική στιγμή t_0:

$$(5) \overset{t=t_0}{\Rightarrow} u(t_0) = \frac{F_0 t_0}{4m}\left(\frac{2t_0^2}{t_0^2} - 1\right) = \frac{F_0 t_0}{4m} = u_0$$ ***(επιβεβαιώνεται η αρχική συνθήκη)***

2) Ελέγχουμε αν οι όροι στα αποτελέσματα (2) και (5) έχουν τις σωστές διαστάσεις:

$$(2) \Rightarrow u(t) = \frac{F_0 t_0}{4m}\left(\frac{t}{t_0}\right)^4$$

Ο όρος στην παρένθεση στο δεξί μέλος της (2) δεν έχει διαστάσεις μιας και περιέχει το πηλίκο χρόνου προς χρόνο που είναι αδιάστατο. Έτσι, το αποτέλεσμά μας έχει τις σωστές διαστάσεις:

[(δύναμη) / (μάζα)] × (χρόνος) = (επιτάχυνση) × (χρόνος) = (ταχύτητα)

$$(5) \Rightarrow u(t) = \frac{F_0 t_0}{4m}\left[2\left(\frac{t_0}{t}\right)^2 - 1\right]$$

Ο όρος στην αγκύλη στο δεξί μέλος της (5) είναι αδιάστατος αφού περιέχει καθαρούς αριθμούς και έναν όρο (χρόνο) / (χρόνο) στο τετράγωνο που είναι αδιάστατος. Άρα, οι διαστάσεις του δεξιού μέλους είναι και πάλι σωστές, αφού:

[(δύναμη) / (μάζα)] × (χρόνος) = (επιτάχυνση) × (χρόνος) = (ταχύτητα).

3) Το αποτέλεσμα (2) δε χρειάζεται να το εξετάσουμε στο όριο $t \to \infty$ μιας και ισχύει σε πεπερασμένες χρονικές στιγμές, δηλ. στο διάστημα $[0, t_0]$. Ένα τέτοιο αποτέλεσμα σε όλες τις χρονικές στιγμές θα ήταν απαράδεκτο μιας και θα οδηγούσε σε απειρισμό της ταχύτητας.

Ας ελέγξουμε, όμως, αν το αποτέλεσμα (5), που ισχύει για $t > t_0$, δίνει λογικό αποτέλεσμα στο όριο $t \to \infty$:

$$(5) \Rightarrow \lim_{t\to\infty} u(t) = \frac{F_0 t_0}{4m} \lim_{t\to\infty}\left[2\left(\frac{t_0}{t}\right)^2 - 1\right] = \frac{F_0 t_0}{4m}\left[2\underbrace{\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t_0}{t}\right)^2}_{0} - 1\right] = -\frac{F_0 t_0}{4m} = -u_0$$

Επομένως, η ταχύτητα του υλικού σημείου μετά από άπειρο χρόνο θα είναι αντίθετη της μέγιστης ταχύτητας που είχε αποκτήσει αυτό στο τέλος του χρονικού διαστήματος $[0, t_0]$. Ας προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε αυτό το αποτέλεσμα:

Στη χρονική στιγμή t_0 το υλικό σημείο έχει αποκτήσει τη μέγιστη ταχύτητα u_0 επιταχυνόμενο προς τα δεξιά λόγω της δράσης της δύναμης $\vec{F} = F_0 \left(t / t_0\right)^3 \hat{i}$ στο χρονικό διάστημα $[0, t_0]$. Στη συνέχεια, όμως, για $t > t_0$ η δύναμη που δρα στο σώμα είναι αντίθετη της φοράς κίνησής του: $\vec{F} = -F_0 \left(t_0 / t\right)^3 \hat{i}$ και συνεπώς το επιβραδύνει. Η δύναμη αυτή δρα σε όλες τις υπόλοιπες χρονικές στιγμές και συνεπώς κάποια χρονική στιγμή $t_1 > t_0$ θα το σταματήσει, δηλαδή:

$$u(t_1) = 0 \overset{(5)}{\Rightarrow} \frac{F_0 t_0}{4m}\left[2\left(\frac{t_0}{t_1}\right)^2 - 1\right] = 0 \Rightarrow 2\left(\frac{t_0}{t_1}\right)^2 = 1 \Rightarrow \boxed{t_1 = \sqrt{2}\, t_0}$$

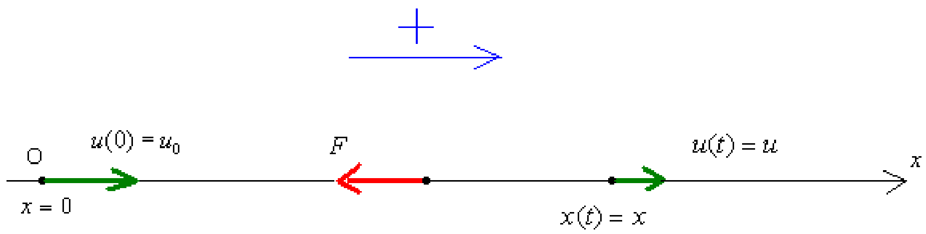
Για τις υπόλοιπες χρονικές στιγμές $t > t_1$ η δράση της δύναμης $\vec{F} = -F_0 \left(t_0 / t\right)^3 \hat{i}$ έχει ως αποτέλεσμα την επιτάχυνση του υλικού σημείου προς τα αριστερά πλέον. Ωστόσο, το μέτρο της δύναμης ελαττώνεται αντιστρόφως ανάλογα προς τον κύβο του χρόνου και συνεπώς σε μεγάλους χρόνους η δράση της δύναμης θα είναι αμελητέα και άρα το υλικό σημείο θα κινείται ευθύγραμμα ομαλά προς τα αριστερά. Το αποτέλεσμα $\lim_{t\to\infty} u(t) = -u_0$ επισημαίνει αυτό ακριβώς το γεγονός, αλλά μας πληροφορεί επιπρόσθετα ότι το μέτρο αυτής της σταθερής ταχύτητας είναι $u_0 = F_0 t_0 / (4m)$, ίσο δηλαδή με το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας τη στιγμή t_0.

Άσκηση 7
ΕΑΠ, ΦΥΕ24: 4η ΑΣΚΗΣΗ 1ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2007-08

Υλικό σημείο μάζας m κινείται κατά μήκος του άξονα x υπό την επίδραση δύναμης F, που **αντιτίθεται** στην κίνηση και είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας με σταθερά αναλογίας
β >0. Βαρύτητα δεν υπάρχει.
Α) Να βρεθεί η ταχύτητα και η θέση του υλικού σημείου για $t>0$, αν για $t=0$ είναι $u=u_0>0$
Β) Να διερευνήσετε τα αποτελεσματά σας: 1) αν ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες, 2) αν έχουν τις σωστές διαστάσεις και 3) αν στο όριο $t\to\infty$ δίνουν λογικά και αναμενόμενα αποτελέσματα.

Υποδειγματική Λύση

Επιλέγουμε τον άξονα x ως τον άξονα κίνησης με αρχή το σημείο Ο στο οποίο βρίσκεται αρχικά το υλικό σημείο και το οποίο είμαστε ελεύθεροι να επιλέξουμε ως το $x=0$. Η θέση $x(t)$ που θα υπολογίσουμε στη συνέχεια θα δηλώνει τη σχετική, ως προς την αρχική, θέση του υλικού σημείου. Επιλέγουμε ως θετική τη φορά προς τα δεξιά. Η αρχική ταχύτητα είναι $u(0)=u_0>0$ και άρα το υλικό σημείο κινείται προς τα δεξιά. Η μόνη δύναμη που επιδρά στο υλικό σημείο είναι η αντίσταση $F(u)=-\beta u^2<0$ που το επιβραδύνει.



Α) Έστω, ότι την τυχούσα χρονική στιγμή t το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $x(t)=x$ και έχει ταχύτητα $u(t)=u$.

Ο 2ος Νόμος του Νεύτωνα δίνει:

$$\vec{F}=m\vec{a}\Rightarrow -\beta u^2=m\frac{du}{dt}\Rightarrow \boxed{\frac{du}{dt}=-\frac{\beta}{m}u^2} \quad (1)$$

Ολοκληρώνουμε την σχέση (1) από τη χρονική στιγμή 0 έως τη χρονική στιγμή t:

$$\int_{u_0}^{u}\left(-\frac{1}{u^2}\right)du=\frac{\beta}{m}\int_0^t dt\Rightarrow\left[\frac{1}{u}\right]_{u_0}^{u}=\frac{\beta}{m}t\Rightarrow\frac{1}{u}-\frac{1}{u_0}=\frac{\beta}{m}t\Rightarrow\frac{1}{u}=\frac{1}{u_0}+\frac{\beta}{m}t\Rightarrow$$

$$\frac{1}{u}=\frac{m+\beta u_0 t}{m u_0}\Rightarrow u(t)=\frac{m u_0}{m+\beta u_0 t}\quad(2)$$

Λαμβάνοντας υπόψη μας τον ορισμό της ταχύτητας μπορούμε να γράψουμε την σχέση (2) ως:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{m u_0}{m+\beta u_0 t}\quad(3)$$

Με ολοκλήρωση στο διάστημα $[0,t]$ λαμβάνουμε: $\int_0^x dx=\int_0^t \frac{m u_0}{m+\beta u_0 t}dt$ (4)

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (4) κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής:

$y=m+\beta u_0 t$, οπότε $dy=\beta u_0 dt\Rightarrow dt=\frac{dy}{\beta u_0}$

Τα όρια της ολοκλήρωσης θα γίνουν:

$t_1=0\Rightarrow y_1=m$ και $t_2=t\Rightarrow y_2=m+\beta u_0 t$.

Έτσι:

$$(4)\overset{y=m+\beta u_0 t}{\Longrightarrow}\int_0^x dx=\int_m^{m+\beta u_0 t}\frac{m u_0}{y}\frac{dy}{\beta u_0}\Rightarrow x=\frac{m}{\beta}\int_m^{m+\beta u_0 t}\frac{dy}{y}\Rightarrow$$

$$x=\frac{m}{\beta}\left[\ln(m+\beta u_0 t)-\ln m\right]\Rightarrow x(t)=\frac{m}{\beta}\ln\left(\frac{m+\beta u_0 t}{m}\right)\quad(5)$$

Η σχέση (5) δίνει τη σχετική, ως προς την αρχική, θέση του υλικού σημείου.

Β) Ας διερευνήσουμε τα αποτελέσματά μας:

1) Ελέγχουμε τα αποτελέσματα (2) και (5) στην χρονική στιγμή 0:

$$(2)\overset{t=0}{\Rightarrow}u(0)=\frac{m u_0}{m+\beta u_0 0}=\frac{m u_0}{m}=u_0$$ ***<u>(επιβεβαιώνεται η αρχική συνθήκη)</u>***

$$(5)\overset{t=0}{\Rightarrow}x(0)=\frac{m}{\beta}\ln\left(\frac{m+\beta u_0 0}{m}\right)=\frac{m}{\beta}\ln 1=0$$ ***<u>(επιβεβαιώνεται η αρχική συνθήκη)</u>***

2) Η σταθερά β λαμβάνοντας υπόψη μας τη σχέση $F=-\beta u^2$ έχει διαστάσεις:

$$\frac{(\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\eta)}{(\tau\alpha\chi\acute{\upsilon}\tau\eta\tau\alpha)^2}=\frac{(\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha)\times(\varepsilon\pi\iota\tau\acute{\alpha}\chi\upsilon\nu\sigma\eta)}{(\tau\alpha\chi\acute{\upsilon}\tau\eta\tau\alpha)^2}=\frac{(\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha)\times\frac{(\tau\alpha\chi\acute{\upsilon}\tau\eta\tau\alpha)}{(\chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma)}}{(\tau\alpha\chi\acute{\upsilon}\tau\eta\tau\alpha)^2}=\frac{(\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha)}{(\tau\alpha\chi\acute{\upsilon}\tau\eta\tau\alpha)\times(\chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma)}=\frac{(\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha)}{(\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma)}$$

Ελέγχουμε αν οι όροι στα αποτελέσματα (2) και (5) έχουν τις σωστές διαστάσεις.

Η (2) γράφεται ισοδύναμα ως: $u(t)=\dfrac{u_0}{1+(\beta u_0 t/m)}$

Ο όρος $\beta u_0 t/m$ στον παρονομαστή είναι αδιάστατος διότι:

$$\frac{\beta u_0 t}{m}\to\frac{\dfrac{(\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha)}{(\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma)}\times(\tau\alpha\chi\acute{\upsilon}\tau\eta\tau\alpha)\times(\chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma)}{(\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha)}=\frac{(\tau\alpha\chi\acute{\upsilon}\tau\eta\tau\alpha)\times(\chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma)}{(\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma)}=(\alpha\delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\alpha\tau o)$$

Έτσι, το αποτέλεσμά της σχέσης (2) έχει σωστές διαστάσεις, δηλ. διαστάσεις ταχύτητας, που τις φέρει ο όρος u_0.

Η (5) γράφεται ισοδύναμα ως: $x(t)=\dfrac{m}{\beta}\ln\left(1+\dfrac{\beta u_0 t}{m}\right)$

Ο όρος $\beta u_0 t/m$ μέσα στο λογάριθμο είναι αδιάστατος, όπως δείξαμε και πριν. Ο όρος m/β εκτός του λογαρίθμου, από την άλλη, έχει τις σωστές διαστάσεις:

$$\frac{m}{\beta}\to\frac{(\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha)}{(\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha)/(\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma)}=(\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma)$$

3) Τέλος, ας ελέγξουμε αν τα αποτελέσματά μας είναι λογικά στο όριο $t\to\infty$:

Για την ταχύτητα έχουμε:

$$(2)\Rightarrow\lim_{t\to\infty}u(t)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{mu_0}{m+\beta u_0 t}\right)=0$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι λογικό, αφού η δύναμη της αντίστασης επιβραδύνει συνεχώς το σώμα. Ωστόσο, δεν μπορεί να το σταματήσει σε πεπερασμένο χρόνο μιας και το μέτρο της είναι αντιστρόφως ανάλογο του τετραγώνου της ταχύτητας κι έτσι όσο μικραίνει η ταχύτητα του σώματος ελαττώνεται ραγδαία και η δύναμη με αποτέλεσμα να συνεχίζει να μειώνεται μεν η ταχύτητα, αλλά με πολύ αργό ρυθμό σε μεγάλους χρόνους.

Για τη θέση του υλικού σημείου έχουμε:

$$(4)\Rightarrow\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{m}{\beta}\ln\left(\frac{m+\beta u_0 t}{m}\right)\right]=\infty$$

αφού $\lim_{\tau\to\infty}(\ln\tau)=+\infty$ (που προκύπτει από τις ιδιότητες της λογαριθμικής συνάρτησης η οποία είναι μη φραγμένη και γνησίως αύξουσα)

Άρα, το υλικό σημείο τείνει να φτάσει στο άπειρο που είναι επίσης λογικό μιας και η δύναμη αδυνατεί να το σταματήσει σε πεπερασμένο χρόνο.

Άσκηση 8

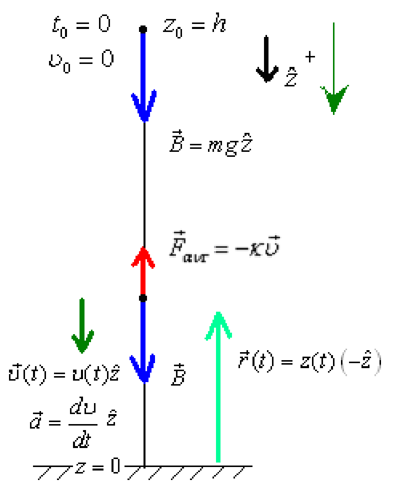
Πτώση σε ομογενές πεδίο βαρύτητας με αντίσταση ανάλογη της ταχύτητας χωρίς αρχική ταχύτητα

(5η Άσκηση 1ης Εργασίας 2007-08 με πρόσθετα ερωτήματα)

Ένας αλεξιπτωτιστής αφήνεται να πέσει ελεύθερα χωρίς αρχική ταχύτητα από κάποιο ύψος h. Άν θεωρήσουμε ότι το αλεξίπτωτό του ανοίγει ακαριαία και ότι η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη της ταχύτητας με σταθερά αναλογίας $\kappa > 0$, να βρείτε την ταχύτητα πτώσης του αλεξιπτωτιστή συναρτήσει του χρόνου. Ποια είναι η οριακή ταχύτητα που θα αποκτήσει ο αλεξιπτωτιστής και μετά από πόσο χρόνο θα την αποκτήσει; Σχεδιάστε το διάγραμμα της ταχύτητας πτώσης συναρτήσει του χρόνου. Εφαρμόστε για $\kappa = 100 Nts/m$, $g = 10 m/s^2$ και $m = 100 kg$. Αν ο αλεξιπτωτιστής φθάνει στο έδαφος μετά από 1 λεπτό, ποια είναι η ταχύτητά του λίγο πριν ακουμπήσει στο έδαφος και ποιο το ύψος h από το οποίο αφέθηκε;

Υποδειγματική Λύση

Ορίζουμε ως z τον άξονα της κίνησης και θεωρούμε θετική τη φορά προς τα κάτω ορίζοντας το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{z}$ με φορά προς τα κάτω. Ο αλεξιπτωτιστής αρχικά $(t = 0)$ έχει μηδενική ταχύτητα και αρχίζει να κινείται προς τα κάτω υπό την επίδραση του βάρους του: $\vec{B} = m\vec{g} = mg\hat{z}$. Αποκτά, έτσι, ταχύτητα $\vec{\upsilon}(t) = \upsilon(t)\hat{z}$ και του ασκείται πλέον, εκτός από το βάρος του, και η αντίσταση του αέρα που δρα αντίθετα της φοράς κίνησης κι έτσι: $\vec{F}_{\alpha\nu\tau} = -\kappa\vec{\upsilon} = -\kappa\upsilon\hat{z}$.



Ο 2ος Νόμος του Νεύτωνα γράφεται:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow$$

$$\vec{B} + \vec{F}_{\alpha\nu\tau} = m\vec{a} \Rightarrow$$

$$mg\hat{z} - \kappa\upsilon\hat{z} = m\frac{d\upsilon}{dt}\hat{z} \Rightarrow$$

$$mg - \kappa\upsilon = m\frac{d\upsilon}{dt} \quad (1)$$

Όσο η ταχύτητα πτώσης του αλεξιπτωτιστή αυξάνεται, η αντίσταση του αέρα επίσης αυξάνεται και ο αλεξιπτωτιστής πέφτει μεν, αλλά με ολοένα και μικρότερη επιτάχυνση. Αν υποθέσουμε ότι είναι δυνατό σε κάποια χρονική στιγμή η ταχύτητά του να πάρει τέτοια τιμή, ώστε η αντίσταση του αέρα να εξουδετερώσει το βάρος, τότε ο αλεξιπτωτιστής θα σταματήσει πλέον να επιταχύνεται και θα συνεχίσει την πτώση του με τη σταθερή οριακή ταχύτητα $\upsilon_{o\rho} = \upsilon_{\max}$:

$$\frac{d\upsilon}{dt} = 0 \Leftrightarrow mg = \kappa\upsilon_{o\rho} \Leftrightarrow \upsilon_{o\rho} = \frac{mg}{\kappa} \quad (2)$$

Σε μια τυχαία χρονική στιγμή μπορούμε να γράψουμε την (1) με τη βοήθεια της (2) ως:

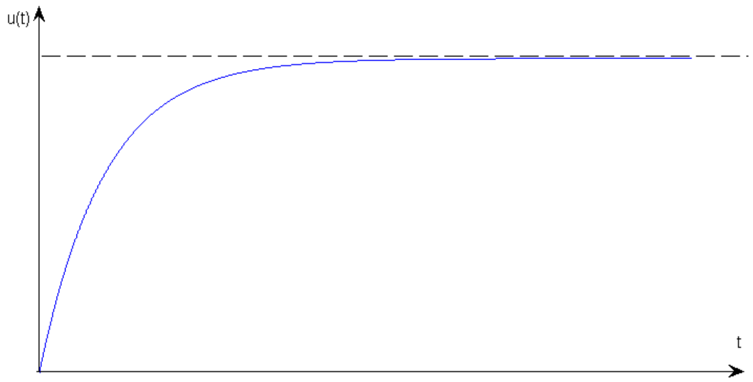
$$m\frac{d\upsilon}{dt} = mg - \kappa\upsilon \Rightarrow \frac{m}{\kappa}\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{mg}{\kappa} - \upsilon \Rightarrow \frac{m}{\kappa}\frac{d\upsilon}{dt} = \upsilon_{o\rho} - \upsilon > 0 \quad (3)$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία εξίσωση παίρνουμε:

$$\int_0^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon_{o\rho}-\upsilon} = \frac{\kappa}{m}\int_0^t dt \Rightarrow \left[-\ln\left(\upsilon_{o\rho}-\upsilon\right)\right]_0^{\upsilon} = \frac{\kappa}{m}t \Rightarrow -\ln\left(\upsilon_{o\rho}-\upsilon\right) + \ln\upsilon_{o\rho} = \frac{\kappa}{m}t \Rightarrow$$

$$\ln\left(\upsilon_{o\rho}-\upsilon\right) - \ln\upsilon_{o\rho} = -\frac{\kappa}{m}t \Rightarrow \ln\left(\frac{\upsilon_{o\rho}-\upsilon}{\upsilon_{o\rho}}\right) = -\frac{\kappa}{m}t \Rightarrow \frac{\upsilon_{o\rho}-\upsilon}{\upsilon_{o\rho}} = e^{-\kappa t/m} \Rightarrow$$

$$\upsilon_{o\rho} - \upsilon = \upsilon_{o\rho}e^{-\kappa t/m} \Rightarrow \upsilon = \upsilon_{o\rho} - \upsilon_{o\rho}e^{-\kappa t/m} \Rightarrow \boxed{\upsilon(t) = \upsilon_{o\rho}\left(1-e^{-\kappa t/m}\right)} \quad (4)$$



Το διάγραμμα της ταχύτητας με το χρόνο φαίνεται δίπλα:

Η ταχύτητα πλησιάζει ασυμπτωτικά την τιμή $\upsilon_{o\rho}$ και αυστηρά δε θα τη φτάσει παρά μόνο μετά από άπειρο χρόνο! Ωστόσο, πρακτικά σε χρόνο ίσο με $5m/\kappa$ θα την έχει φτάσει, αφού τότε: $\upsilon(t) = \left(1-e^{-5}\right)\upsilon_{o\rho} = 0{,}993\cdot\upsilon_{o\rho}$, δηλ. το σώμα θα έχει ταχύτητα ίση με το 99.3% της οριακής τιμής.

Αντικαθιστώντας: $m = 100kg$, $g = 10m/s^2$ και $\kappa = 100Nt\ s/m$ παίρνουμε ότι:

$$(2) \Rightarrow \upsilon_{o\rho} = \frac{mg}{\kappa} \Rightarrow \upsilon_{o\rho} = \frac{\cancel{100}kg10m/s^2}{\cancel{100}\ Nt\ s/m} = \frac{10Nt}{Nt\ s/m} = 10m/s$$

ενώ η σταθερά στο εκθετικό της (4) είναι ίση με: $\kappa/m = 1s^{-1}$.

Με αντικατάσταση των αριθμητικών σταθερών στην (4) παίρνουμε ότι η ταχύτητα πτώσης του αλεξιπτωτιστή συναρτήσει του χρόνου είναι:

$\upsilon(t) = 10\left(1-e^{-t}\right)\ m/s$, όπου ο χρόνος t πρέπει να είναι σε δευτερόλεπτα (s).

Στο έδαφος, όπου φθάνει ο αλεξιπτωτιστής μετά από $1min = 60\ s$, η ταχύτητά του θα είναι ίση με:

$$\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda} = 10\left(1-e^{-60}\right)m/s = 10m/s$$

δηλαδή, ουσιαστικά, ο αλεξιπτωτιστής φθάνει στο έδαφος με την οριακή ταχύτητα που ισούται με 10m/s, αφού ο όρος e^{-60} είναι εξαιρετικά μικρός: $e^{-60} \simeq 8{,}8 \cdot 10^{-27}$.

Για να κατανοήσουμε περισσότερο πόσο γρήγορα η ταχύτητα του αλεξιπτωτιστή πλησιάζει την οριακή τιμή 10m/s καταγράφουμε στον παρακάτω πίνακα τις τιμές της ταχύτητάς του τα πρώτα 10 δευτερόλεπτα με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων σε μονάδες m/s:

$t(s)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$u(m/s)$	0	6,321	8,647	9,502	9,817	9,933	9,975	9,991	9,997	9,999	10,000

Αν και ο αλεξιπτωτιστής ποτέ δεν αποκτά αυστηρά την οριακή ταχύτητα, πρακτικά η ταχύτητά του πλησιάζει εξαιρετικά αυτή την οριακή τιμή στα πρώτα μόλις δευτερόλεπτα της πτώσης του.

Λαμβάνοντας υπόψη μας τον ορισμό της ταχύτητας:

$$\vec{\upsilon}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \Rightarrow \upsilon(t)\hat{z} = \frac{d}{dt}\left[z(t)\left(-\hat{z}\right)\right] \Rightarrow \upsilon(t) = -\frac{dz}{dt}$$

Το αρνητικό πρόσημο δεν θα πρέπει να σας ενοχλεί και οφείλεται στο ότι μετράμε την κατακόρυφη θέση του σώματος από κάτω προς τα πάνω, ενώ το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται από πάνω προς τα κάτω.

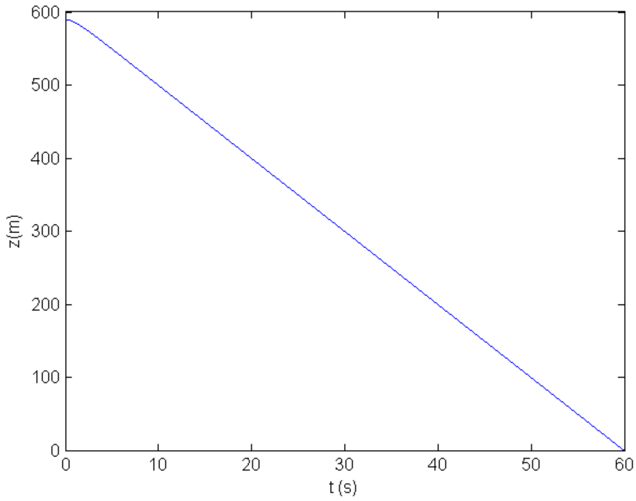
Έτσι: $\upsilon(t) = -\frac{dz}{dt} = \upsilon_{op}\left(1-e^{-\kappa t/m}\right)$ και ολοκληρώνοντας παίρνουμε:

$$\int_h^z dz = -\upsilon_{op}\int_0^t \left(1-e^{-\kappa t/m}\right)dt \Rightarrow z-h = -\upsilon_{op}\left[t+\frac{e^{-\kappa t/m}}{\kappa/m}\right]_0^t \Rightarrow$$

$$z-h=-\upsilon_{o\rho}\left(t+\frac{m}{\kappa}e^{-\kappa t/m}-\frac{m}{\kappa}\right)\overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\boxed{z(t)=h-\frac{mg}{\kappa}\left(t+\frac{m}{\kappa}e^{-\kappa t/m}-\frac{m}{\kappa}\right)}$$

οπότε: $\underset{t=60s}{\overset{z=0}{\Rightarrow}} h=\frac{mg}{\kappa}\left(t+\frac{m}{\kappa}e^{-\kappa t/m}-\frac{m}{\kappa}\right)=10\left(t+e^{-t}-1\right)\overset{t=60s}{=}590m$



Το διάγραμμα της κατακόρυφης θέσης του αλεξιπτωτιστή συναρτήσει του χρόνου φαίνεται δίπλα.

Ο αλεξιπτωτιστής πέφτει από ύψος 590 μέτρων και στα πρώτα 5 δευτερόλεπτα έχει αποκτήσει σχεδόν την οριακή ταχύτητα των 10m/s (το 99.3%). Τότε η θέση του είναι: $z(5)\simeq 550m$, δηλαδή έχει διανύσει μόλις 40m.

Στα υπόλοιπα 550m ο αλεξιπτωτιστής πέφτει πρακτικά ευθύγραμμα ομαλά με την ταχύτητα των 10m/s αισθανόμενος πρακτικά μηδενική επιτάχυνση. Παρατηρείστε ότι η $z(t)$ προσεγγίζεται πολύ καλά με ευθεία μετά τα πρώτα 5 δευτερόλεπτα γεγονός που αποδεικνύει ισοδύναμα το τελευταίο συμπέρασμα.

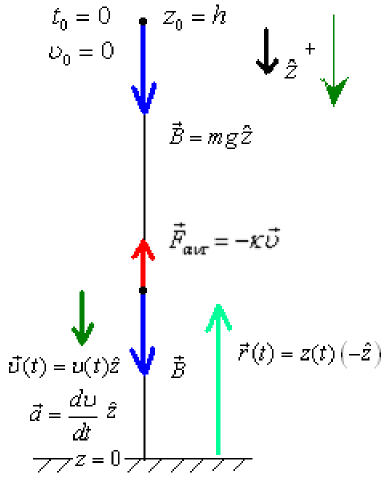
Άσκηση 9

Πτώση σε ομογενές πεδίο βαρύτητας με αρχική ταχύτητα υπό την επίδραση αντίστασης ανάλογης της ταχύτητας

Ένας αλεξιπτωτιστής αφήνεται να πέσει ελεύθερα με αρχική ταχύτητα υ_0 από κάποιο ύψος h. Αν θεωρήσουμε ότι το αλεξίπτωτό του ανοίγει ακαριαία και ότι η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη της ταχύτητας με σταθερά αναλογίας $\kappa > 0$, να βρείτε την ταχύτητα πτώσης του αλεξιπτωτιστή συναρτήσει του χρόνου. Ποια είναι η οριακή ταχύτητα που θα αποκτήσει ο αλεξιπτωτιστής και μετά από πόσο χρόνο θα την αποκτήσει; Σχεδιάστε το διάγραμμα της ταχύτητας πτώσης συναρτήσει του χρόνου. Εφαρμόστε για $\upsilon_0 = 5m/s$, $\kappa = 100Nts/m$, $g = 10m/s^2$ και $m = 100kg$. Αν ο αλεξιπτωτιστής φθάνει στο έδαφος μετά από μισό λεπτό, ποια είναι η ταχύτητά του λίγο πριν ακουμπήσει στο έδαφος και ποιο το ύψος h από το οποίο αφέθηκε;
<u>Σημείωση</u>: Θεωρούμε ότι η αρχική ταχύτητα είναι τέτοια ώστε ο αλεξιπτωτιστής να δέχεται αντίσταση μικρότερη του βάρους του. Τι θα συνέβαινε στην αντίθετη περίπτωση;

Υποδειγματική Λύση

Ορίζουμε ως z τον άξονα της κίνησης και θεωρούμε θετική τη φορά προς τα κάτω ορίζοντας το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{z}$ με φορά προς τα κάτω. Ο αλεξιπτωτιστής δέχεται την επίδραση του βάρους του: $\vec{B} = m\vec{g} = mg\hat{z}$ και της αντίστασης του αέρα που δρα αντίθετα της φοράς κίνησης κι έτσι: $\vec{F}_{\alpha\nu\tau} = -\kappa\vec{\upsilon} = -\kappa\upsilon\hat{z}$.



Ο 2ος Νόμος του Νεύτωνα γράφεται:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow$$

$$\vec{B} + \vec{F}_{\alpha\nu\tau} = m\vec{a} \Rightarrow$$

$$mg\hat{z} - \kappa\upsilon\hat{z} = m\frac{d\upsilon}{dt}\hat{z} \Rightarrow$$

$$mg - \kappa\upsilon = m\frac{d\upsilon}{dt} \quad (1)$$

Όσο η ταχύτητα πτώσης του αλεξιπτωτιστή αυξάνεται, η αντίσταση του αέρα επίσης αυξάνεται και ο αλεξιπτωτιστής πέφτει μεν, αλλά με ολοένα και μικρότερη επιτάχυνση. Αν υποθέσουμε ότι είναι δυνατό σε κάποια χρονική στιγμή η ταχύτητά του να πάρει τέτοια τιμή, ώστε η αντίσταση του αέρα να εξουδετερώσει το βάρος, τότε ο αλεξιπτωτιστής θα σταματήσει πλέον να επιταχύνεται και θα συνεχίσει την πτώση του με τη σταθερή οριακή ταχύτητα $\upsilon_{o\rho} = \upsilon_{\max}$:

$$\frac{d\upsilon}{dt}=0 \Leftrightarrow mg=\kappa\upsilon_{o\rho} \Leftrightarrow \upsilon_{o\rho}=\frac{mg}{\kappa} \quad (2)$$

Σε μια τυχαία χρονική στιγμή μπορούμε να γράψουμε την (1) με τη βοήθεια της (2) ως:

$$m\frac{d\upsilon}{dt}=mg-\kappa\upsilon \Rightarrow \frac{m}{\kappa}\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{mg}{\kappa}-\upsilon \Rightarrow \frac{m}{\kappa}\frac{d\upsilon}{dt}=\upsilon_{o\rho}-\upsilon>0 \quad (3)$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία εξίσωση παίρνουμε:

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon_{o\rho}-\upsilon}=\frac{\kappa}{m}\int_0^t dt \Rightarrow \left[-\ln\left(\upsilon_{o\rho}-\upsilon\right)\right]_{\upsilon_0}^{\upsilon}=\frac{\kappa}{m}t \Rightarrow -\ln\left(\upsilon_{o\rho}-\upsilon\right)+\ln\left(\upsilon_{o\rho}-\upsilon_0\right)=\frac{\kappa}{m}t \Rightarrow$$

$$\ln\left(\upsilon_{o\rho}-\upsilon\right)-\ln\left(\upsilon_{o\rho}-\upsilon_0\right)=-\frac{\kappa}{m}t \Rightarrow \ln\left(\frac{\upsilon_{o\rho}-\upsilon}{\upsilon_{o\rho}-\upsilon_0}\right)=-\frac{\kappa}{m}t \Rightarrow \frac{\upsilon_{o\rho}-\upsilon}{\upsilon_{o\rho}-\upsilon_0}=e^{-\kappa t/m} \Rightarrow$$

$$\upsilon_{o\rho}-\upsilon=\left(\upsilon_{o\rho}-\upsilon_0\right)e^{-\kappa t/m} \Rightarrow \boxed{\upsilon(t)=\upsilon_{o\rho}+\left(\upsilon_0-\upsilon_{o\rho}\right)e^{-\kappa t/m}} \quad (4)$$

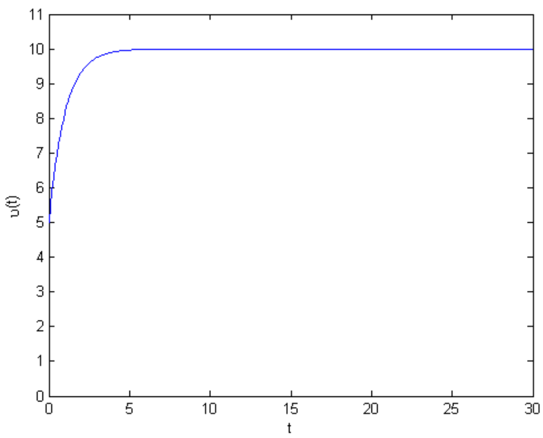
Αντικαθιστώντας: $\upsilon_0=5m/s$, $m=100kg$, $g=10m/s^2$ και $\kappa=100Nt\ s/m$ παίρνουμε ότι:

$$(2) \Rightarrow \upsilon_{o\rho}=\frac{mg}{\kappa} \Rightarrow \upsilon_{o\rho}=\frac{\cancel{100}kg10m/s^2}{\cancel{100}\ Nt\ s/m}=\frac{10Nt}{Nt\ s/m}=10m/s$$

ενώ η σταθερά στο εκθετικό της (4) είναι ίση με: $\kappa/m=1s^{-1}$.

Με αντικατάσταση των αριθμητικών σταθερών στην (4) παίρνουμε ότι η ταχύτητα πτώσης του αλεξιπτωτιστή συναρτήσει του χρόνου είναι:

$\upsilon(t)=\left(10-5e^{-t}\right)\ m/s$, όπου ο χρόνος t πρέπει να είναι σε δευτερόλεπτα (s).



Το διάγραμμα της ταχύτητας με το χρόνο φαίνεται δίπλα:

Η ταχύτητα πλησιάζει ασυμπτωτικά την τιμή $\upsilon_{o\rho}$ και αυστηρά δε θα τη φτάσει παρά μόνο μετά από άπειρο χρόνο! Ωστόσο, <u>πρακτικά</u> σε χρόνο ίσο με $5m/\kappa$ θα την έχει φτάσει.

Στο έδαφος, όπου φθάνει ο αλεξιπτωτιστής μετά από 1*min*=30*s*, η ταχύτητά του θα είναι ίση με: $\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}=\left(10-5e^{-30}\right)m/s=10m/s$

δηλαδή, ουσιαστικά, ο αλεξιπτωτιστής φθάνει στο έδαφος με την οριακή ταχύτητα που ισούται με 10*m/s*, αφού ο όρος e^{-30} είναι εξαιρετικά μικρός: $e^{-30} \simeq 9{,}4 \cdot 10^{-14}$.

Για να κατανοήσουμε περισσότερο πόσο γρήγορα η ταχύτητα του αλεξιπτωτιστή πλησιάζει την οριακή τιμή 10*m/s* καταγράφουμε στον παρακάτω πίνακα τις τιμές της ταχύτητάς του τα πρώτα 10 δευτερόλεπτα με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων σε μονάδες *m/s*:

$t(s)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$u(m/s)$	5	8,161	9,323	9,751	9,908	9,967	9,988	9,995	9,998	9,999	10,000

Αν και ο αλεξιπτωτιστής ποτέ δεν αποκτά αυστηρά την οριακή ταχύτητα, πρακτικά η ταχύτητά του πλησιάζει εξαιρετικά αυτή την οριακή τιμή στα πρώτα μόλις δευτερόλεπτα της πτώσης του.

Λαμβάνοντας υπόψη μας τον ορισμό της ταχύτητας:

$$\vec{\upsilon}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \Rightarrow \upsilon(t)\hat{z} = \frac{d}{dt}\left[z(t)\left(-\hat{z}\right)\right] \Rightarrow \upsilon(t) = -\frac{dz}{dt}$$

Το αρνητικό πρόσημο δεν θα πρέπει να σας ενοχλεί και οφείλεται στο ότι μετράμε την κατακόρυφη θέση του σώματος από κάτω προς τα πάνω, ενώ το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται από πάνω προς τα κάτω.

Έτσι: $\upsilon(t) = -\dfrac{dz}{dt} = \upsilon_{op} + \left(\upsilon_0 - \upsilon_{op}\right)e^{-\kappa t/m}$ και ολοκληρώνοντας παίρνουμε:

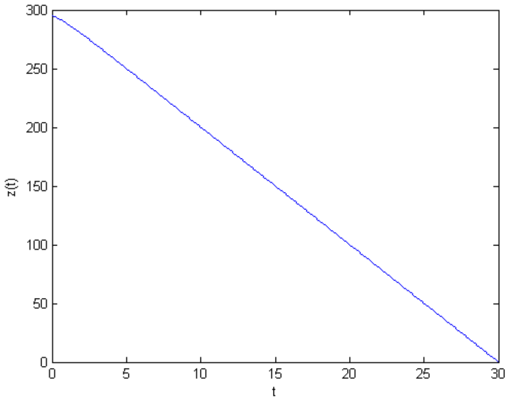
$$\int_h^z dz = -\upsilon_{op}\int_0^t dt - \left(\upsilon_0 - \upsilon_{op}\right)\int_0^t e^{-\kappa t/m}dt \Rightarrow z - h = -\upsilon_{op}t - \left(\upsilon_0 - \upsilon_{op}\right)\left[\frac{e^{-\kappa t/m}}{-\kappa/m}\right]_0^t \Rightarrow$$

$$\boxed{z(t) = h - \upsilon_{op}t - \frac{m}{\kappa}\left(\upsilon_0 - \upsilon_{op}\right)\left(1 - e^{-\kappa t/m}\right)} \quad (5)$$

$$\underset{t=30s}{\overset{z=0}{\Rightarrow}} h = \upsilon_{op}t + \frac{m}{\kappa}\left(\upsilon_0 - \upsilon_{op}\right)\left(1 - e^{-\kappa t/m}\right) = 300 - 5\left(1 - e^{-30}\right) = 295m$$

Με αντικατάσταση των αριθμητικών σταθερών στην (5) παίρνουμε ότι η κατακόρυφη θέση του αλεξιπτωτιστή συναρτήσει του χρόνου είναι:

$$z(t) = 300 - 10t - 5e^{-t}$$



Το διάγραμμα της κατακόρυφης θέσης του αλεξιπτωτιστή συναρτήσει του χρόνου φαίνεται δίπλα.

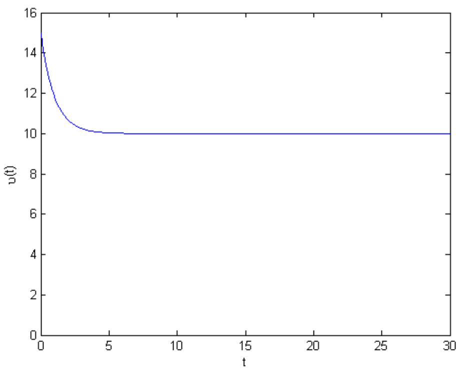
Ο αλεξιπτωτιστής πέφτει από ύψος 295 μέτρων και στα πρώτα 5 δευτερόλεπτα έχει αποκτήσει σχεδόν την οριακή ταχύτητα των 10m/s (το 99.7%). Τότε η θέση του είναι: $z(5) \simeq 240m$, δηλαδή έχει διανύσει μόλις 55m.

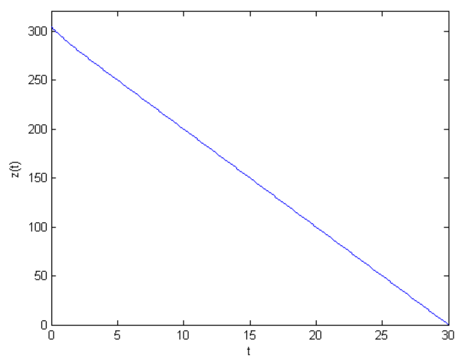
Στα υπόλοιπα 240m ο αλεξιπτωτιστής πέφτει πρακτικά ευθύγραμμα ομαλά με την ταχύτητα των 10m/s αισθανόμενος πρακτικά μηδενική επιτάχυνση. Παρατηρείστε ότι η $z(t)$ προσεγγίζεται πολύ καλά με ευθεία μετά τα πρώτα 5 δευτερόλεπτα γεγονός που αποδεικνύει ισοδύναμα το τελευταίο συμπέρασμα.

Στην περίπτωση που η αρχική ταχύτητα είναι αρκετά μεγάλη ώστε να είναι μεγαλύτερη η αντίσταση από το βάρος, η ταχύτητα του σώματος μειώνεται τείνοντας στην οριακή ταχύτητα. Αποδεικνύεται (με προσοχή στον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων) ότι και πάλι ισχύουν οι γενικές σχέσεις (4) και (5), που δίνουν για $\upsilon_0 = 15m/s$, οπότε προκύπτει $h = 305m$:

$\upsilon(t) = \left(10 + 5e^{-t}\right)\ m/s$ και $z(t) = 300 - 10t + 5e^{-t}$

Τα αντίστοιχα διαγράμματα είναι:



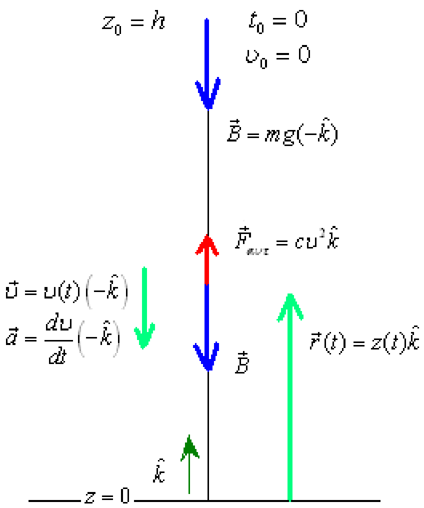


Άσκηση 10

Πτώση σε ομογενές πεδίο βαρύτητας με αντίσταση ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας

Σώμα αφήνεται να πέσει ελεύθερα (δηλ. χωρίς αρχική ταχύτητα) από κάποιο ύψος h. Άν θεωρήσουμε ότι η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας με σταθερά αναλογίας c, να βρείτε την ταχύτητα πτώσης του συναρτήσει του χρόνου. Ποια είναι η οριακή ταχύτητα που θα αποκτήσει το σώμα και μετά από πόσο χρόνο θα την αποκτήσει; Πώς μεταβάλλεται η κατακόρυφη θέση του; Αν δίνονται: $m = 100kg$, $c = 0.4kg/m$, $g = 10m/s^2$ από ποιο ύψος πρέπει να πέσει το σώμα, ώστε να φτάσει στο έδαφος σε μισό λεπτό; Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα της ταχύτητας και της θέσης συναρτήσει του χρόνου.

Υποδειγματική Λύση



Η αντίσταση του αέρα δρα αντίθετα της φοράς κίνησης και έχει μέτρο:

$$F_{αντ} = c\upsilon^2$$

Ο 2^{ος} Νόμος του Νεύτωνα γράφεται:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{B} + \vec{F}_{αντ} = m\vec{a} \Rightarrow$$

$$mg\left(-\hat{k}\right) + c\upsilon^2\hat{k} = m\frac{d\upsilon}{dt}\left(-\hat{k}\right) \Rightarrow$$

$$mg - c\upsilon^2 = m\frac{d\upsilon}{dt} \quad (1)$$

Αρχικά το σώμα επιταχύνεται προς τα κάτω υπό την επίδραση του βάρους του, αφού δεν έχει ταχύτητα (την $t = 0$). Όσο, όμως, αποκτά ταχύτητα η αντίσταση του αέρα αυξάνεται και το σώμα πέφτει μεν, αλλά με ολοένα και μικρότερη επιτάχυνση. Όταν η ταχύτητά του γίνει τέτοια, ώστε η αντίσταση του αέρα να εξουδετερώσει το βάρος (υποθέτοντας ότι αυτό είναι δυνατό), τότε το σώμα παύει να επιταχύνεται και πέφτει με σταθερή ταχύτητα $\upsilon_{ορ}$:

$$\frac{d\upsilon}{dt} = 0 \Leftrightarrow mg = c\upsilon_{ορ}^2 \Leftrightarrow \boxed{\upsilon_{ορ} = \sqrt{\frac{mg}{c}}} \quad (2)$$

Προφανώς, αυτή θα είναι και η μέγιστη τιμή της ταχύτητας που μπορεί να αποκτήσει το σώμα, μιας και στη συνέχεια θα κινηθεί ευθύγραμμα ομαλά, αφού η συνισταμένη των δυνάμεων που ακούνται σε αυτό είναι μηδενική και θα παραμείνει μηδενική (στο συγκεκριμένο πρόβλημα, όπου θεωρούμε το βαρυτικό πεδίο ομογενές και την αντίσταση να εξαρτάται μόνο από το μέτρο της ταχύτητας).

Σε μια τυχούσα χρονική στιγμή μπορούμε να γράψουμε την (1) ως:

$$\frac{m}{c}\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{mg}{c}-\upsilon^2 \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{m}{c}\frac{d\upsilon}{dt}=\upsilon_{op}^2-\upsilon^2>0$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία εξίσωση παίρνουμε:

$$\int_0^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon_{op}^2-\upsilon^2}=\frac{c}{m}\int_0^t dt \Rightarrow \int_0^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\left(\upsilon_{op}-\upsilon\right)\left(\upsilon_{op}+\upsilon\right)}=\frac{c}{m}t \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon_{op}-\upsilon}+\frac{1}{2}\int_0^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon_{op}+\upsilon}=\upsilon_{op}\frac{c}{m}t \Rightarrow$$

$$\int_0^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon_{op}-\upsilon}+\int_0^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon_{op}+\upsilon}=2\upsilon_{op}\frac{c}{m}t \Rightarrow \qquad \left[-\ln\left(\upsilon_{op}-\upsilon\right)\right]_0^{\upsilon}+\left[\ln\left(\upsilon_{op}+\upsilon\right)\right]_0^{\upsilon}=2\upsilon_{op}\frac{c}{m}t$$

$$\underset{c=mg/\upsilon_{op}^2}{\overset{(2)}{\Rightarrow}}$$

$$\ln\left(\frac{\upsilon_{op}+\upsilon}{\upsilon_{op}-\upsilon}\right)=\frac{2g}{\upsilon_{op}}t \Rightarrow \frac{\upsilon_{op}+\upsilon}{\upsilon_{op}-\upsilon}=e^{2gt/\upsilon_{op}} \Rightarrow \upsilon_{op}+\upsilon=\upsilon_{op}e^{2gt/\upsilon_{op}}-\upsilon e^{2gt/\upsilon_{op}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon(t)=\upsilon_{op}\left(\frac{e^{2gt/\upsilon_{op}}-1}{e^{2gt/\upsilon_{op}}+1}\right) \Leftrightarrow \upsilon(t)=\upsilon_{op}\left(\frac{1-e^{-2gt/\upsilon_{op}}}{1+e^{-2gt/\upsilon_{op}}}\right) \Leftrightarrow \upsilon(t)=\upsilon_{op}\tanh\left(\frac{g}{\upsilon_{op}}t\right)} \quad (3)$$

Συνεπώς, το μέτρο της ταχύτητας πτώσης πλησιάζει ασυμπτωτικά την <u>οριακή</u> τιμή υ_{op} και αυστηρά δε θα τη φτάσει **<u>ποτέ</u>,** δηλαδή το σώμα χρειάζεται άπειρο χρόνο για να αποκτήσει την οριακή ταχύτητα: $\lim_{t\to\infty}\upsilon(t)=\upsilon_{op}$.

Με αντικατάσταση $m=100kg$, $c=0.4kg/m$, $g=10m/s^2$ προκύπτει: $\upsilon_{op}=50m/s$ και ότι σε χρόνο ίσο με μερικά $\tau=\upsilon_{op}/g=5s$, πρακτικά θα είναι $\upsilon\simeq\upsilon_{op}=50m/s$. Όντως σε χρόνο $3\tau=3\upsilon_{op}/g=15s$ είναι $\upsilon\simeq 0.995\upsilon_{op}=49.8m/s$, αφού $\tanh(3)\simeq 0.995$.

Λαμβάνοντας υπόψη μας τον ορισμό της ταχύτητας: $\vec{\upsilon}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \Rightarrow \upsilon(t)\left(-\hat{k}\right)=\frac{d}{dt}\left[z(t)\hat{k}\right] \Rightarrow \upsilon(t)=-\frac{dz}{dt}$

Το αρνητικό πρόσημο δεν θα πρέπει να σας ενοχλεί και οφείλεται στο ότι μετράμε την κατακόρυφη θέση του σώματος από κάτω προς τα πάνω, ενώ το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται από πάνω προς τα κάτω.

Έτσι: $\upsilon(t) = -\dfrac{dz}{dt} = \upsilon_{op}\tanh\left(\dfrac{g}{\upsilon_{op}}t\right)$ και ολοκληρώνοντας παίρνουμε:

$$\int_h^z dz = -\upsilon_{op}\int_0^t \tanh\left(\frac{g}{\upsilon_{op}}t\right)dt \Rightarrow z-h = -\upsilon_{op}\left[\frac{\ln\left[\cosh\left(\frac{g}{\upsilon_{op}}t\right)\right]}{\frac{g}{\upsilon_{op}}}\right]_0^t \Rightarrow$$

$$z-h = -\frac{\upsilon_{op}^2}{g}\ln\left[\cosh\left(\frac{g}{\upsilon_{op}}t\right)\right] \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\boxed{z(t) = h - \frac{m}{c}\ln\left[\cosh\left(\frac{g}{\upsilon_{op}}t\right)\right]} \underset{t=30s}{\overset{z=0}{\Rightarrow}} h = \frac{100kg}{0.4kg/m}\ln\left[\cosh\left(\frac{10m/s^2}{50m/s}30s\right)\right] \simeq 1327m$$

<u>Σημείωση</u>: *Στον συμβολισμό των ολοκληρωμάτων, αυστηρά θα πρέπει να διαχωρίζουμε την μεταβλητή ολοκλήρωσης από τα όρια ολοκλήρωσης κι έτσι, αν θέλουμε να είμαστε συνεπείς, θα πρέπει να χρησιμοποιούμε διαφορετικό σύμβολο, π.χ.:*

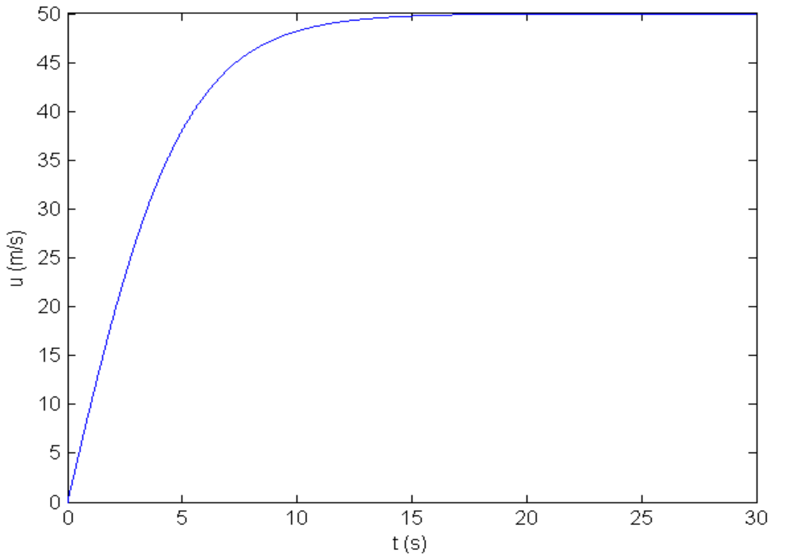
η ολοκλήρωση $\int_h^z dz = -\upsilon_{op}\int_0^t \tanh\left(\frac{g}{\upsilon_{op}}t\right)dt$ *γράφεται σωστά ως:*

$$\boxed{\int_h^z dz' = -\upsilon_{op}\int_0^t \tanh\left(\frac{g}{\upsilon_{op}}t'\right)dt'}$$

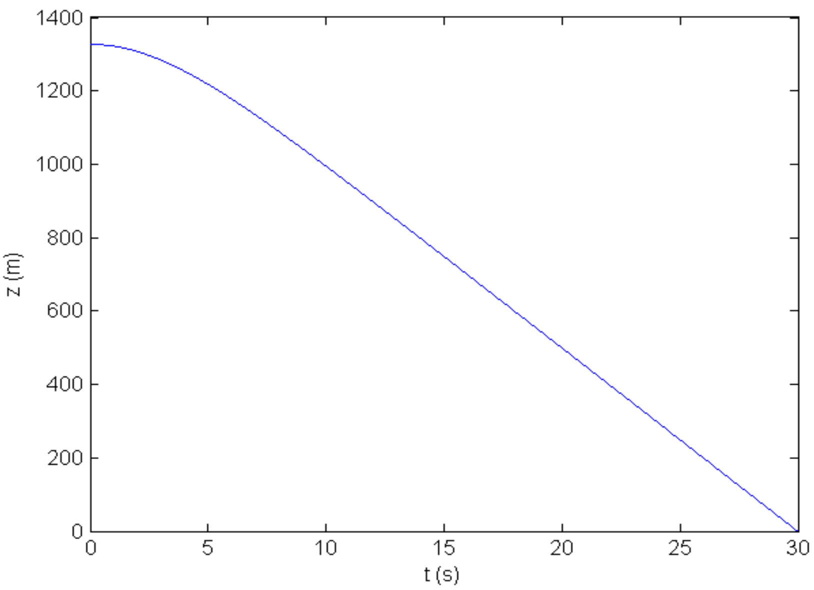
Οι μεταβλητές t', z' *είναι μεταβλητές ολοκλήρωσης, ενώ τα* t, z *είναι τα όρια ολοκλήρωσης: η τυχούσα χρονική στιγμή* t *και η θέση* $z = z(t)$ *σε αυτήν την χρονική στιγμή. Το* t' *παίρνει τιμές από* 0 *έως* t*, ενώ το* z' *από* h *έως* z*:*

$0 \le t' \le t$ *και* $z(t) \le z' \le h$

Τα διαγράμματα του μέτρου της ταχύτητας και της θέσης συναρτήσει του χρόνου φαίνονται παρακάτω:



Παρατηρείστε ότι, αν και το σώμα ποτέ δεν αποκτά αυστηρά την οριακή ταχύτητα $\upsilon_{o\rho}$, πρακτικά πολύ σύντομα έχει ταχύτητα $\upsilon \simeq \upsilon_{o\rho}$ (σε μεγάλους χρόνους $t \gg 1s$ η προσέγγιση είναι εξαιρετικά καλή).



Παρατηρείστε ότι πολύ σύντομα η $z = z(t)$ προσεγγίζεται με ευθεία (ειδικά μετά τα πρώτα $15\sec$), που σημαίνει ότι το σώμα κινείται πρακτικά ευθύγραμμα ομαλά. Η κλίση της ευθείας δίνει την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας και είναι αρνητική μιας και το σώμα κινείται προς τα κάτω, ενώ έχει απόλυτη τιμή ίση με τη $\upsilon_{o\rho}$. Το ότι η καμπύλη $z(t)$ έχει πολύ μικρή καμπυλότητα (δηλ. μοιάζει με ευθεία) σημαίνει επίσης ότι το σώμα πέφτει με σχεδόν μηδενική επιτάχυνση.

Άσκηση 11
Κατακόρυφη Βολή με αντίσταση ανάλογη της ταχύτητας

Βλήμα εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα άνω με αρχική ταχύτητα υ_0. Η επιβράδυνση που επιφέρει η ατμόσφαιρα στο βλήμα είναι ανάλογη της ταχύτητάς του με σταθερά αναλογίας $\kappa > 0$. Να βρείτε την ταχύτητα και τη θέση του βλήματος ως συναρτήσεις του χρόνου. Εάν το βλήμα φθάνει μετά από χρόνο T στο μέγιστο ύψος H, να δείξετε ότι ισχύει η σχέση: $\upsilon_0 = \kappa H + gT$. Βρείτε, τέλος, το χρόνο T και το ύψος H ως συναρτήσεις των παραμέτρων υ_0, κ, g.

Υποδειγματική Λύση

Η ατμόσφαιρα επιβραδύνει το βλήμα και επομένως η επιτάχυνση λόγω της αντίστασης του αέρα είναι:

$$\vec{a}_{\alpha\nu\tau} = -\kappa\vec{\upsilon}$$

Επομένως η αντίσταση του αέρα είναι:

$$\vec{F}_{\alpha\nu\tau} = m\vec{a}_{\alpha\nu\tau} \Rightarrow \vec{F}_{\alpha\nu\tau} = -m\kappa\vec{\upsilon}$$

Ο 2^{ος} Νόμος του Νεύτωνα γράφεται:

$$\sum\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{B} + \vec{F}_{\alpha\nu\tau} = m\vec{a} \Rightarrow -mg - m\kappa\upsilon = m\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = -(g + \kappa\upsilon) \quad (1)$$

Ολοκληρώνοντας την (1) παίρνουμε:

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{g+\kappa\upsilon} = -\int_0^t dt \Rightarrow \frac{1}{\kappa}\left[\ln\left(g+\kappa\upsilon\right)\right]_{\upsilon_0}^{\upsilon} = -t \Rightarrow \ln\left(g+\kappa\upsilon\right) - \ln\left(g+\kappa\upsilon_0\right) = -\kappa t \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{g+\kappa\upsilon}{g+\kappa\upsilon_0}\right) = -\kappa t \Rightarrow \frac{g+\kappa\upsilon}{g+\kappa\upsilon_0} = e^{-\kappa t} \Rightarrow g+\kappa\upsilon = \left(g+\kappa\upsilon_0\right)e^{-\kappa t} \Rightarrow$$

$$\upsilon(t) = \left(\frac{g}{\kappa} + \upsilon_0\right)e^{-\kappa t} - \frac{g}{\kappa} \quad (2)$$

Θεωρώντας ως y τη διεύθυνση της κίνησης μπορούμε να γράψουμε: $\upsilon(t) = \frac{dy}{dt}$

Έτσι, χρησιμοποιούμε το προηγούμενο αποτέλεσμα για να βρούμε την κατακόρυφη θέση του βλήματος μέσω χρονικής ολοκλήρωσης:

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{g}{\kappa} + \upsilon_0\right)e^{-\kappa t} - \frac{g}{\kappa} \Rightarrow \int_0^y dy = \int_0^t\left[\left(\frac{g}{\kappa} + \upsilon_0\right)e^{-\kappa t} - \frac{g}{\kappa}\right]dt \Rightarrow$$

$$y=\left(\frac{g}{\kappa}+\upsilon_0\right)\int_0^t e^{-\kappa t}dt-\frac{g}{\kappa}\int_0^t dt=\left(\frac{g}{\kappa}+\upsilon_0\right)\left(-\frac{1}{\kappa}\right)\left[e^{-\kappa t}\right]_0^t-\frac{g}{\kappa}t\Rightarrow$$

$$y=-\left(\frac{g}{\kappa^2}+\frac{\upsilon_0}{\kappa}\right)\left(e^{-\kappa t}-1\right)-\frac{g}{\kappa}t\Rightarrow \boxed{y(t)=\left(\frac{g+\kappa\upsilon_0}{\kappa^2}\right)\left(1-e^{-\kappa t}\right)-\frac{g}{\kappa}t} \quad (3)$$

Το βλήμα φθάνει μετά από χρόνο T στο μέγιστο ύψος H, οπότε και η ταχύτητά του είναι ίση με μηδέν. Άρα:

$$(2)\underset{\upsilon=0}{\overset{t=T}{\Rightarrow}} 0=\left(\frac{g}{\kappa}+\upsilon_0\right)e^{-\kappa T}-\frac{g}{\kappa}\Rightarrow g=\left(g+\kappa\upsilon_0\right)e^{-\kappa T}\Rightarrow \boxed{e^{-\kappa T}=\frac{g}{g+\kappa\upsilon_0}} \quad (4)$$

$$(3)\underset{y=H}{\overset{t=T}{\Rightarrow}} H=\left(\frac{g+\kappa\upsilon_0}{\kappa^2}\right)\left(1-e^{-\kappa T}\right)-\frac{g}{\kappa}T\Rightarrow \kappa H=\left(\frac{g+\kappa\upsilon_0}{\kappa}\right)\left(1-e^{-\kappa T}\right)-gT\overset{(4)}{\Rightarrow}$$

$$\kappa H=\left(\frac{g+\kappa\upsilon_0}{\kappa}\right)\left(1-\frac{g}{g+\kappa\upsilon_0}\right)-gT\Rightarrow \kappa H=\left(\frac{\cancel{g+\kappa\upsilon_0}}{\kappa}\right)\left(\frac{\cancel{g}+\kappa\upsilon_0-\cancel{g}}{\cancel{g+\kappa\upsilon_0}}\right)-gT\Rightarrow$$

$$\kappa H=\upsilon_0-gT\Rightarrow \boxed{\upsilon_0=\kappa H+gT} \quad (5)$$

Ο χρόνος μέχρι να φτάσει στο μέγιστο ύψος δίνεται από την (4):

$$(4)\Rightarrow e^{\kappa T}=\frac{g+\kappa\upsilon_0}{g}\Rightarrow \kappa T=\ln\left(\frac{g+\kappa\upsilon_0}{g}\right)\Rightarrow \boxed{T=\frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{g+\kappa\upsilon_0}{g}\right)}$$

και άρα από την (5) λύνοντας ως προς το μέγιστο ύψος παίρνουμε:

$$H=\frac{gT-\upsilon_0}{\kappa}\Rightarrow \boxed{H=\frac{g}{\kappa^2}\ln\left(\frac{g+\kappa\upsilon_0}{g}\right)-\frac{\upsilon_0}{\kappa}}$$

Άσκηση 12

Από ακίνητο σύννεφο πέφτουν δυο ίδιες σταγόνες μάζας m με διαφορά χρόνου τ. Πώς θα μεταβάλλεται η μεταξύ τους απόσταση συναρτήσει του χρόνου αν: α) η αντίσταση του αέρα θεωρηθεί αμελητέα και αν β) η αντίσταση του αέρα ληφθεί να έχει μέτρο ανάλογο της ταχύτητας: $F_{\alpha\nu\tau} = m\kappa\upsilon$;

Υποδειγματική Λύση

α) Στην περίπτωση που θεωρούμε αμελητέα την αντίσταση του αέρα οι δυο σταγόνες εκτελούν ελεύθερη πτώση υπό την επίδραση του βάρους τους και άρα σε χρόνο t διανύουν τις εξής κατακόρυφες αποστάσεις:

σταγόνα 1 (ξεκινά την χρονική στιγμή 0): $y_1 = \frac{1}{2}gt^2$

σταγόνα 2 (ξεκινά την χρονική στιγμή $t_0 = \tau$): $y_2 = \frac{1}{2}g(t-\tau)^2$

Άρα, η μεταξύ τους απόσταση είναι:

$$\Delta y = y_1 - y_2 = \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}g(t-\tau)^2 \Rightarrow \Delta y = \cancel{\frac{1}{2}gt^2} - \cancel{\frac{1}{2}gt^2} - \frac{1}{2}g\tau^2 - \frac{1}{2}g(-2t\tau) \Rightarrow$$

$$\Delta y = gt\tau - \frac{1}{2}g\tau^2 \Rightarrow \Delta y = \frac{g\tau}{2}(2t-\tau)$$

β) Στην περίπτωση που θέλουμε να λάβουμε υπόψη μας και την αντίσταση του αέρα γράφουμε την διαφορική εξίσωση κίνησης για κάθε σταγόνα:

$$ma = mg - m\kappa\upsilon \Rightarrow m\frac{d\upsilon}{dt} = mg - m\kappa\upsilon \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = g - \kappa\upsilon$$

Ολοκληρώνουμε προσέχοντας τις αρχικές συνθήκες για κάθε σταγόνα:

<u>Σταγόνα 1</u>

$$\int_0^{\upsilon_1} \frac{d\upsilon}{g-\kappa\upsilon} = \int_0^t dt \Rightarrow \frac{1}{\kappa}\left[\ln(g-\kappa\upsilon)\right]_0^{\upsilon_1} = -t \Rightarrow \ln\left(\frac{g-\kappa\upsilon_1}{g}\right) = -\kappa t \Rightarrow$$

$$\frac{g-\kappa\upsilon_1}{g} = e^{-\kappa t} \Rightarrow g - \kappa\upsilon_1 = ge^{-\kappa t} \Rightarrow \upsilon_1(t) = \frac{g}{\kappa}\left(1-e^{-\kappa t}\right)$$

Σταγόνα 2

$$\int_0^{\upsilon_2}\frac{d\upsilon}{g-\kappa\upsilon}=\int_\tau^t dt\Rightarrow\frac{1}{\kappa}\left[\ln\left(g-\kappa\upsilon\right)\right]_0^{\upsilon_2}=-(t-\tau)\Rightarrow\ln\left(\frac{g-\kappa\upsilon_2}{g}\right)=-\kappa(t-\tau)\Rightarrow$$

$$\frac{g-\kappa\upsilon_2}{g}=e^{-\kappa(t-\tau)}\Rightarrow g-\kappa\upsilon_2=ge^{-\kappa(t-\tau)}\Rightarrow\upsilon_2(t)=\frac{g}{\kappa}\left(1-e^{-\kappa(t-\tau)}\right)$$

Ολοκληρώνουμε τις σχέσεις ταχυτήτων άλλη μια φορά για να λάβουμε τις κατακόρυφες θέσεις των σταγόνων:

Σταγόνα 1

$$\frac{dy_1}{dt}=\frac{g}{\kappa}\left(1-e^{-\kappa t}\right)\Rightarrow\int_0^{y_1}dy_1=\frac{g}{\kappa}\int_0^t\left(1-e^{-\kappa t}\right)dt\Rightarrow y_1=\frac{g}{\kappa}\left[t+\frac{e^{-\kappa t}}{\kappa}\right]_0^t$$

$$y_1=\frac{g}{\kappa}\left(t+\frac{e^{-\kappa t}-1}{\kappa}\right)\Rightarrow y_1=\frac{g}{\kappa^2}\left(\kappa t+e^{-\kappa t}-1\right)$$

Σταγόνα 2

$$\frac{dy_2}{dt}=\frac{g}{\kappa}\left(1-e^{-\kappa(t-\tau)}\right)\Rightarrow\int_0^{y_2}dy_2=\frac{g}{\kappa}\int_\tau^t\left(1-e^{-\kappa(t-\tau)}\right)dt\Rightarrow y_2=\frac{g}{\kappa}\left[t+\frac{e^{-\kappa(t-\tau)}}{\kappa}\right]_\tau^t$$

$$y_2=\frac{g}{\kappa}\left(t-\tau+\frac{e^{-\kappa(t-\tau)}-1}{\kappa}\right)\Rightarrow y_2=\frac{g}{\kappa^2}\left(\kappa t+e^{-\kappa(t-\tau)}-\kappa\tau-1\right)$$

Οπότε η απόσταση μεταξύ των δυο σταγόνων είναι:

$$\Delta y=y_1-y_2=\cancel{\frac{g}{\kappa^2}\kappa t}+\frac{g}{\kappa^2}e^{-\kappa t}-\cancel{\frac{g}{\kappa^2}}-\cancel{\frac{g}{\kappa^2}\kappa t}-\frac{g}{\kappa^2}e^{-\kappa(t-\tau)}+\frac{g}{\kappa^2}\kappa\tau+\cancel{\frac{g}{\kappa^2}}\Rightarrow$$

$$\Delta y=\frac{g}{\kappa^2}\left(\kappa\tau+e^{-\kappa t}-e^{-\kappa(t-\tau)}\right)\Rightarrow\Delta y=\frac{g\tau}{\kappa}+\frac{g}{\kappa^2}e^{-\kappa t}\left(1-e^{\kappa\tau}\right)$$