ΦΥΕ 24 : ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ 2ΟΥ ΝΟΜΟΥ ΤΟΥ NEWTON (Β΄ ΜΕΡΟΣ)

Γεώργιος Η. Κεφαλιακός

Άσκηση 1

ΕΑΠ, ΦΥΕ24: 4^{η} ΑΣΚΗΣΗ 1^{ης} ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2007-08

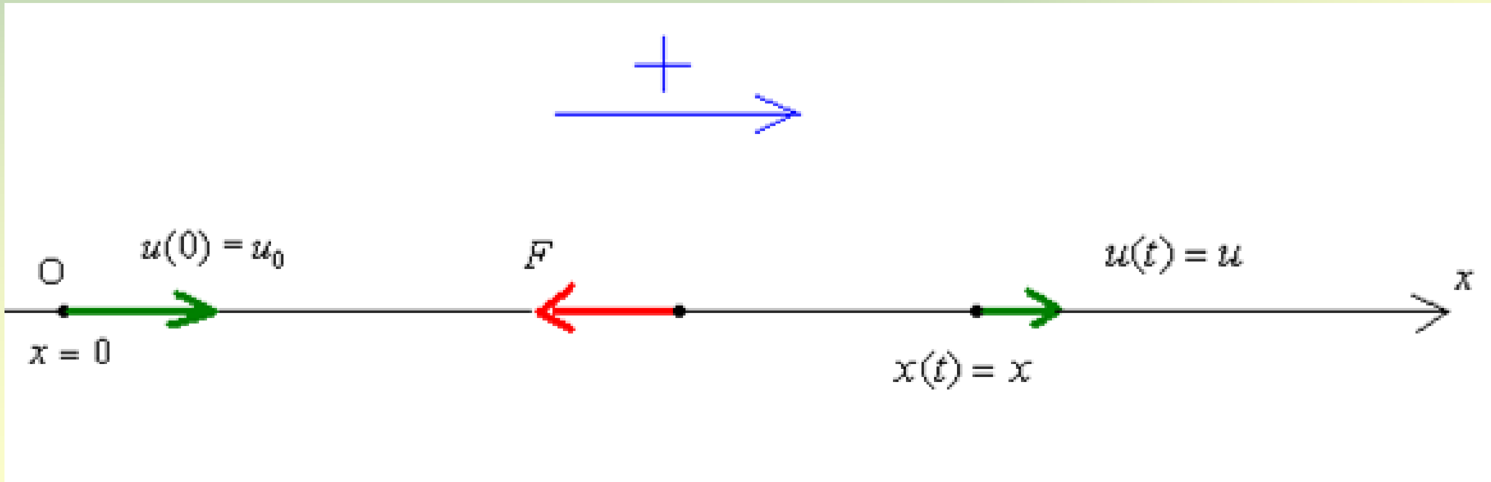
Υλικό σημείο μάζας m κινείται κατά μήκος του άξονα x υπό την επίδραση δύναμης F, που **αντιτίθεται** στην κίνηση και είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας με σταθερά αναλογίας β >0. Βαρύτητα δεν υπάρχει.

Α) Να βρεθεί η ταχύτητα και η θέση του υλικού σημείου για $t > 0$, αν για $t = 0$ είναι $u = u_0 > 0$

Β) Να διερευνήσετε τα αποτελεσματά σας: 1) αν ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες, 2) αν έχουν τις σωστές διαστάσεις και 3) αν στο όριο $t \to \infty$ δίνουν λογικά και αναμενόμενα αποτελέσματα.

Υποδειγματική Λύση

Επιλέγουμε τον άξονα x ως τον άξονα κίνησης με αρχή το σημείο O στο οποίο βρίσκεται αρχικά το υλικό σημείο και το οποίο είμαστε ελεύθεροι να επιλέξουμε ως το $x=0$. Η θέση $x(t)$ που θα υπολογίσουμε στη συνέχεια θα δηλώνει τη σχετική, ως προς την αρχική, θέση του υλικού σημείου. Επιλέγουμε ως θετική τη φορά προς τα δεξιά. Η αρχική ταχύτητα είναι $u(0)=u_0>0$ και άρα το υλικό σημείο κινείται προς τα δεξιά. Η μόνη δύναμη που επιδρά στο υλικό σημείο είναι η αντίσταση $F(u)=-\beta u^2<0$ που το επιβραδύνει.



Α) Έστω, ότι την τυχούσα χρονική στιγμή t το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $x(t) = x$ και έχει ταχύτητα $u(t) = u$.

Ο 2ος Νόμος του Νεύτωνα δίνει:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -\beta u^2 = m\frac{du}{dt} \Rightarrow \frac{du}{dt} = -\frac{\beta}{m}u^2 \quad (1)$$

Ολοκληρώνουμε την σχέση (1) από τη χρονική στιγμή 0 έως τη χρονική στιγμή t:

$$\int_{u_0}^{u}\left(-\frac{1}{u^2}\right)du = \frac{\beta}{m}\int_0^t dt \Rightarrow \left[\frac{1}{u}\right]_{u_0}^{u} = \frac{\beta}{m}t \Rightarrow \frac{1}{u} - \frac{1}{u_0} = \frac{\beta}{m}t \Rightarrow \frac{1}{u} = \frac{1}{u_0} + \frac{\beta}{m}t \Rightarrow$$

$$\frac{1}{u} = \frac{m + \beta u_0 t}{m u_0} \Rightarrow u(t) = \frac{m u_0}{m + \beta u_0 t} \quad (2)$$

Λαμβάνοντας υπόψη μας τον ορισμό της ταχύτητας μπορούμε να γράψουμε την σχέση (2) ως:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{mu_0}{m + \beta u_0 t} \quad (3)$$

Με ολοκλήρωση στο διάστημα $\left[0, t\right]$ λαμβάνουμε: $\int_0^x dx = \int_0^t \frac{mu_0}{m + \beta u_0 t} dt \quad (4)$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (4) κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής:

$y = m + \beta u_0 t$, οπότε $dy = \beta u_0 dt \Rightarrow dt = \frac{dy}{\beta u_0}$

Τα όρια της ολοκλήρωσης θα γίνουν:

$t_1 = 0 \Rightarrow y_1 = m$ και $t_2 = t \Rightarrow y_2 = m + \beta u_0 t$.

Έτσι:

$$(4)\xRightarrow{y=m+\beta u_0 t}\int_0^x dx=\int_m^{m+\beta u_0 t}\frac{mu_0}{y}\frac{dy}{\beta u_0}\Rightarrow x=\frac{m}{\beta}\int_m^{m+\beta u_0 t}\frac{dy}{y}\Rightarrow$$

$$x=\frac{m}{\beta}\left[\ln\left(m+\beta u_0 t\right)-\ln m\right]\Rightarrow x(t)=\frac{m}{\beta}\ln\left(\frac{m+\beta u_0 t}{m}\right)\quad(5)$$

Η σχέση (5) δίνει τη σχετική, ως προς την αρχική, θέση του υλικού σημείου.

Β) Ας διερευνήσουμε τα αποτελέσματά μας:

1) Ελέγχουμε τα αποτελέσματα (2) και (5) στην χρονική στιγμή 0:

$$(2)\overset{t=0}{\Rightarrow} u(0)=\frac{mu_0}{m+\beta u_0 0}=\frac{mu_0}{m}=u_0$$

(επιβεβαιώνεται η αρχική συνθήκη)

$$(5)\overset{t=0}{\Rightarrow} x(0)=\frac{m}{\beta}\ln\left(\frac{m+\beta u_0 0}{m}\right)=\frac{m}{\beta}\ln 1=0$$

(επιβεβαιώνεται η αρχική συνθήκη)

2) Η σταθερά β λαμβάνοντας υπόψη μας τη σχέση $F=-\beta u^2$ έχει διαστάσεις:

$$\frac{(\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\eta)}{(\tau\alpha\chi\acute{\upsilon}\tau\eta\tau\alpha)^2}=\frac{(\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha)\times(\varepsilon\pi\iota\tau\acute{\alpha}\chi\upsilon\nu\sigma\eta)}{(\tau\alpha\chi\acute{\upsilon}\tau\eta\tau\alpha)^2}=\frac{(\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha)\times\frac{(\tau\alpha\chi\acute{\upsilon}\tau\eta\tau\alpha)}{(\chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma)}}{(\tau\alpha\chi\acute{\upsilon}\tau\eta\tau\alpha)^2}=\frac{(\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha)}{(\tau\alpha\chi\acute{\upsilon}\tau\eta\tau\alpha)\times(\chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma)}=\frac{(\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha)}{(\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma)}$$

Ελέγχουμε αν οι όροι στα αποτελέσματα (2) και (5) έχουν τις σωστές διαστάσεις.

Η (2) γράφεται ισοδύναμα ως: $u(t)=\dfrac{u_0}{1+\left(\beta u_0 t/m\right)}$

Ο όρος $\beta u_0 t/m$ στον παρονομαστή είναι αδιάστατος διότι:

$$\frac{\beta u_0 t}{m} \rightarrow \frac{\dfrac{(\mu άζα)}{(\mu ήκος)}\times(\tau αχύτητα)\times(\chi ρόνος)}{(\mu άζα)}=\frac{(\tau αχύτητα)\times(\chi ρόνος)}{(\mu ήκος)}=(\alpha διάστατο)$$

Έτσι, το αποτέλεσμά της σχέσης (2) έχει σωστές διαστάσεις, δηλ. διαστάσεις ταχύτητας, που τις φέρει ο όρος u_0.

Η (5) γράφεται ισοδύναμα ως: $x(t)=\dfrac{m}{\beta}\ln\left(1+\dfrac{\beta u_0 t}{m}\right)$

Ο όρος $\beta u_0 t/m$ μέσα στο λογάριθμο είναι αδιάστατος, όπως δείξαμε και πριν. Ο όρος m/β εκτός του λογαρίθμου, από την άλλη, έχει τις σωστές διαστάσεις:

$$\frac{m}{\beta} \rightarrow \frac{(\mu άζα)}{(\mu άζα)/(\mu ήκος)}=(\mu ήκος)$$

3) Τέλος, ας ελέγξουμε αν τα αποτελέσματά μας είναι λογικά στο όριο $t \to \infty$:

Για την ταχύτητα έχουμε:

$$(2) \Rightarrow \lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{mu_0}{m+\beta u_0 t}\right) = 0$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι λογικό, αφού η δύναμη της αντίστασης επιβραδύνει συνεχώς το σώμα. Ωστόσο, δεν μπορεί να το σταματήσει σε πεπερασμένο χρόνο μιας και το μέτρο της είναι αντιστρόφως ανάλογο του τετραγώνου της ταχύτητας κι έτσι όσο μικραίνει η ταχύτητα του σώματος ελαττώνεται ραγδαία και η δύναμη με αποτέλεσμα να συνεχίζει να μειώνεται μεν η ταχύτητα, αλλά με πολύ αργό ρυθμό σε μεγάλους χρόνους.

Για τη θέση του υλικού σημείου έχουμε:

$$(4) \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{m}{\beta}\ln\left(\frac{m+\beta u_0 t}{m}\right)\right] = \infty$$

αφού $\lim_{\tau\to\infty}(\ln\tau) = +\infty$ (που προκύπτει από τις ιδιότητες της λογαριθμικής συνάρτησης η οποία είναι μη φραγμένη και γνησίως αύξουσα)

Άρα, το υλικό σημείο τείνει να φτάσει στο άπειρο που είναι επίσης λογικό μιας και η δύναμη αδυνατεί να το σταματήσει σε πεπερασμένο χρόνο.

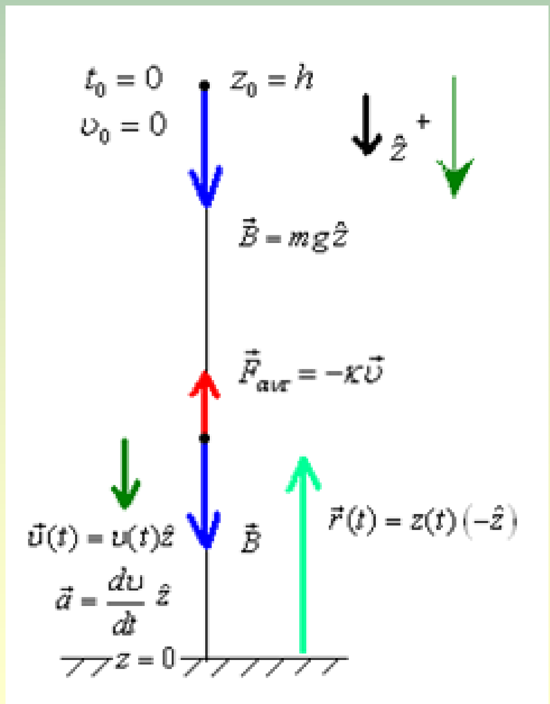
Άσκηση 2

(5η Άσκηση 1ης Εργασίας 2007-08 με πρόσθετα ερωτήματα)

Ένας αλεξιπτωτιστής αφήνεται να πέσει ελεύθερα χωρίς αρχική ταχύτητα από κάποιο ύψος h. Άν θεωρήσουμε ότι το αλεξίπτωτό του ανοίγει ακαριαία και ότι η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη της ταχύτητας με σταθερά αναλογίας $\kappa > 0$, να βρείτε την ταχύτητα πτώσης του αλεξιπτωτιστή συναρτήσει του χρόνου. Ποια είναι η οριακή ταχύτητα που θα αποκτήσει ο αλεξιπτωτιστής και μετά από πόσο χρόνο θα την αποκτήσει; Σχεδιάστε το διάγραμμα της ταχύτητας πτώσης συναρτήσει του χρόνου. Εφαρμόστε για $\kappa = 100Nts/m$, $g = 10m/s^2$ και $m = 100kg$. Αν ο αλεξιπτωτιστής φθάνει στο έδαφος μετά από 1 λεπτό, ποια είναι η ταχύτητά του λίγο πριν ακουμπήσει στο έδαφος και ποιο το ύψος h από το οποίο αφέθηκε;

Υποδειγματική Λύση

Ορίζουμε ως z τον άξονα της κίνησης και θεωρούμε θετική τη φορά προς τα κάτω ορίζοντας το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{z}$ με φορά προς τα κάτω. Ο αλεξιπτωτιστής αρχικά $(t=0)$ έχει μηδενική ταχύτητα και αρχίζει να κινείται προς τα κάτω υπό την επίδραση του βάρους του: $\vec{B}=m\vec{g}=mg\hat{z}$. Αποκτά, έτσι, ταχύτητα $\vec{\upsilon}(t)=\upsilon(t)\hat{z}$ και του ασκείται πλέον, εκτός από το βάρος του, και η αντίσταση του αέρα που δρα αντίθετα της φοράς κίνησης κι έτσι: $\vec{F}_{\alpha\nu\tau}=-\kappa\vec{\upsilon}=-\kappa\upsilon\hat{z}$.



Ο 2ος Νόμος του Νεύτωνα γράφεται:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow$$

$$\vec{B} + \vec{F}_{\alpha\nu\tau} = m\vec{a} \Rightarrow$$

$$mg\hat{z} - \kappa\upsilon\hat{z} = m\frac{d\upsilon}{dt}\hat{z} \Rightarrow$$

$$mg - \kappa\upsilon = m\frac{d\upsilon}{dt} \quad (1)$$

Όσο η ταχύτητα πτώσης του αλεξιπτωτιστή αυξάνεται, η αντίσταση του αέρα επίσης αυξάνεται και ο αλεξιπτωτιστής πέφτει μεν, αλλά με ολοένα και μικρότερη επιτάχυνση. Αν υποθέσουμε ότι είναι δυνατό σε κάποια χρονική στιγμή η ταχύτητά του να πάρει τέτοια τιμή, ώστε η αντίσταση του αέρα να εξουδετερώσει το βάρος, τότε ο αλεξιπτωτιστής θα σταματήσει πλέον να επιταχύνεται και θα συνεχίσει την πτώση του με τη σταθερή οριακή ταχύτητα $\upsilon_{o\rho} = \upsilon_{\max}$:

$$\frac{d\upsilon}{dt} = 0 \Leftrightarrow mg = \kappa\upsilon_{o\rho} \Leftrightarrow \upsilon_{o\rho} = \frac{mg}{\kappa} \quad (2)$$

Σε μια τυχαία χρονική στιγμή μπορούμε να γράψουμε την (1) με τη βοήθεια της (2) ως:

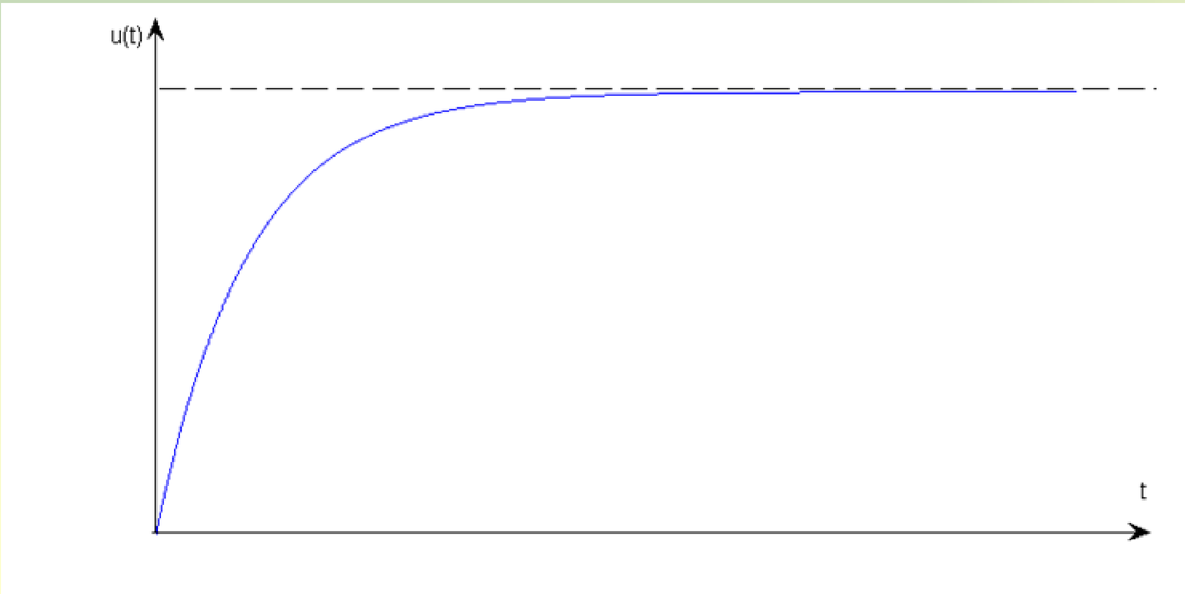
$$m\frac{d\upsilon}{dt} = mg - \kappa\upsilon \Rightarrow \frac{m}{\kappa}\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{mg}{\kappa} - \upsilon \Rightarrow \frac{m}{\kappa}\frac{d\upsilon}{dt} = \upsilon_{o\rho} - \upsilon > 0 \quad (3)$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία εξίσωση παίρνουμε:

$$\int_0^{\upsilon} \frac{d\upsilon}{\upsilon_{o\rho} - \upsilon} = \frac{\kappa}{m}\int_0^t dt \Rightarrow \left[-\ln\left(\upsilon_{o\rho} - \upsilon\right)\right]_0^{\upsilon} = \frac{\kappa}{m}t \Rightarrow -\ln\left(\upsilon_{o\rho} - \upsilon\right) + \ln\upsilon_{o\rho} = \frac{\kappa}{m}t \Rightarrow$$

$$\ln\left(\upsilon_{o\rho} - \upsilon\right) - \ln\upsilon_{o\rho} = -\frac{\kappa}{m}t \Rightarrow \ln\left(\frac{\upsilon_{o\rho} - \upsilon}{\upsilon_{o\rho}}\right) = -\frac{\kappa}{m}t \Rightarrow \frac{\upsilon_{o\rho} - \upsilon}{\upsilon_{o\rho}} = e^{-\kappa t/m} \Rightarrow$$

$$\upsilon_{o\rho} - \upsilon = \upsilon_{o\rho}e^{-\kappa t/m} \Rightarrow \upsilon = \upsilon_{o\rho} - \upsilon_{o\rho}e^{-\kappa t/m} \Rightarrow \boxed{\upsilon(t) = \upsilon_{o\rho}\left(1 - e^{-\kappa t/m}\right)} \quad (4)$$



Το διάγραμμα της ταχύτητας με το χρόνο φαίνεται δίπλα:

Η ταχύτητα πλησιάζει ασυμπτωτικά την τιμή $\upsilon_{o\rho}$ και αυστηρά δε θα τη φτάσει παρά μόνο μετά από άπειρο χρόνο! Ωστόσο, πρακτικά σε χρόνο ίσο με $5m/\kappa$ θα την έχει φτάσει, αφού τότε: $\upsilon(t) = \left(1 - e^{-5}\right)\upsilon_{o\rho} = 0,993 \cdot \upsilon_{o\rho}$, δηλ. το σώμα θα έχει ταχύτητα ίση με το 99.3% της οριακής τιμής.

Αντικαθιστώντας: $m = 100kg$, $g = 10m/s^2$ και $\kappa = 100Nt\ \mathrm{s}/m$ παίρνουμε ότι:

$$(2) \Rightarrow \upsilon_{o\rho} = \frac{mg}{\kappa} \Rightarrow \upsilon_{o\rho} = \frac{\cancel{100}kg 10m/s^2}{\cancel{100}\ Nt\ s/m} = \frac{10Nt}{Nt\ s/m} = 10m/s$$

ενώ η σταθερά στο εκθετικό της (4) είναι ίση με: $\kappa/m = 1s^{-1}$.

Με αντικατάσταση των αριθμητικών σταθερών στην (4) παίρνουμε ότι η ταχύτητα πτώσης του αλεξιπτωτιστή συναρτήσει του χρόνου είναι:

$\upsilon(t) = 10\left(1 - e^{-t}\right)\ m/s$, όπου ο χρόνος t πρέπει να είναι σε δευτερόλεπτα (s).

Στο έδαφος, όπου φθάνει ο αλεξιπτωτιστής μετά από 1*min*=60*s*, η ταχύτητά του θα είναι ίση με:

$$\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda} = 10\left(1 - e^{-60}\right) m/s = 10 m/s$$

δηλαδή, ουσιαστικά, ο αλεξιπτωτιστής φθάνει στο έδαφος με την οριακή ταχύτητα που ισούται με 10*m/s*, αφού ο όρος e^{-60} είναι εξαιρετικά μικρός: $e^{-60} \simeq 8{,}8 \cdot 10^{-27}$.

Για να κατανοήσουμε περισσότερο πόσο γρήγορα η ταχύτητα του αλεξιπτωτιστή πλησιάζει την οριακή τιμή 10*m/s* καταγράφουμε στον παρακάτω πίνακα τις τιμές της ταχύτητάς του τα πρώτα 10 δευτερόλεπτα με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων σε μονάδες *m/s*:

$t(s)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$u(m/s)$	0	6,321	8,647	9,502	9,817	9,933	9,975	9,991	9,997	9,999	10,000

Αν και ο αλεξιπτωτιστής ποτέ δεν αποκτά αυστηρά την οριακή ταχύτητα, πρακτικά η ταχύτητά του πλησιάζει εξαιρετικά αυτή την οριακή τιμή στα πρώτα μόλις δευτερόλεπτα της πτώσης του.

Λαμβάνοντας υπόψη μας τον ορισμό της ταχύτητας:

$$\vec{\upsilon}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\Rightarrow \upsilon(t)\hat{z}=\frac{d}{dt}\left[z(t)\left(-\hat{z}\right)\right]\Rightarrow \upsilon(t)=-\frac{dz}{dt}$$

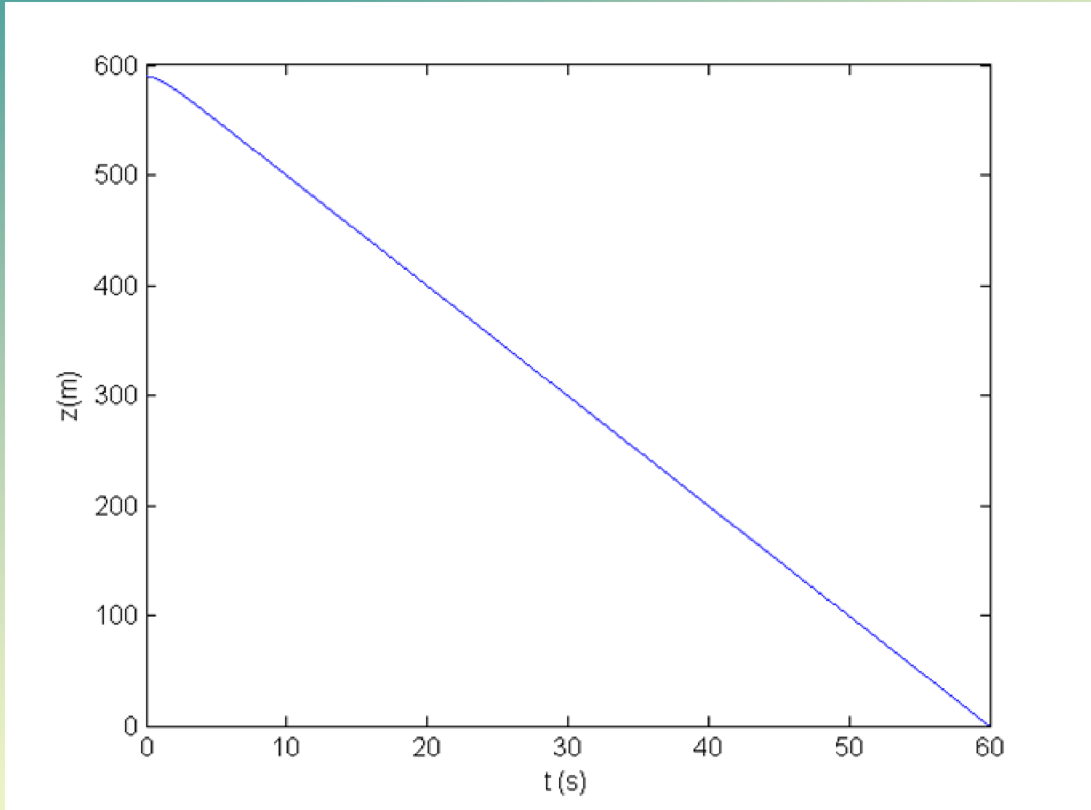
Το αρνητικό πρόσημο δεν θα πρέπει να σας ενοχλεί και οφείλεται στο ότι μετράμε την κατακόρυφη θέση του σώματος από κάτω προς τα πάνω, ενώ το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται από πάνω προς τα κάτω.

Έτσι: $\upsilon(t)=-\dfrac{dz}{dt}=\upsilon_{o\rho}\left(1-e^{-\kappa t/m}\right)$ και ολοκληρώνοντας παίρνουμε:

$$\int_h^z dz=-\upsilon_{o\rho}\int_0^t\left(1-e^{-\kappa t/m}\right)dt\Rightarrow z-h=-\upsilon_{o\rho}\left[t+\frac{e^{-\kappa t/m}}{\kappa/m}\right]_0^t\Rightarrow$$

$$z-h=-\upsilon_{o\rho}\left(t+\frac{m}{\kappa}e^{-\kappa t/m}-\frac{m}{\kappa}\right)\overset{(2)}{\Rightarrow}\quad \boxed{z(t)=h-\frac{mg}{\kappa}\left(t+\frac{m}{\kappa}e^{-\kappa t/m}-\frac{m}{\kappa}\right)}$$

οπότε: $\underset{t=60s}{\overset{z=0}{\Rightarrow}} h = \frac{mg}{\kappa}\left(t + \frac{m}{\kappa}e^{-\kappa t/m} - \frac{m}{\kappa}\right) = 10\left(t + e^{-t} - 1\right) \overset{t=60s}{=} 590m$



Το διάγραμμα της κατακόρυφης θέσης του αλεξιπτωτιστή συναρτήσει του χρόνου φαίνεται δίπλα.

Ο αλεξιπτωτιστής πέφτει από ύψος 590 μέτρων και στα πρώτα 5 δευτερόλεπτα έχει αποκτήσει σχεδόν την οριακή ταχύτητα των 10m/s (το 99.3%). Τότε η θέση του είναι: $z(5) \simeq 550m$, δηλαδή έχει διανύσει μόλις 40m.

Στα υπόλοιπα 550m ο αλεξιπτωτιστής πέφτει πρακτικά ευθύγραμμα ομαλά με την ταχύτητα των 10m/s αισθανόμενος πρακτικά μηδενική επιτάχυνση. Παρατηρείστε ότι η $z(t)$ προσεγγίζεται πολύ καλά με ευθεία μετά τα πρώτα 5 δευτερόλεπτα γεγονός που αποδεικνύει ισοδύναμα το τελευταίο συμπέρασμα.

Άσκηση 3

ΕΑΠ, ΦΥΕ24: 5η ΑΣΚΗΣΗ 1ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2008-09

Υλικό σημείο μάζας m κινείται κατά μήκος του άξονα x υπό την επίδραση δυο δυνάμεων, μιας που **αντιτίθεται** στην κίνηση και είναι ανάλογη της ταχύτητας με σταθερά αναλογίας $\beta > 0$ και μιας σταθερής δύναμης $F_0 > 0$. Βαρύτητα δεν υπάρχει.

Α) Να βρεθεί η ταχύτητα του υλικού σημείου για $t > 0$, αν για $t = 0$ είναι $u = u_0 > 0$.

Β) Να διερευνήσετε τα αποτελεσματά σας: 1) αν ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες, 2) αν έχουν τις σωστές διαστάσεις και 3) αν στο όριο $t \to \infty$ δίνουν λογικά και αναμενόμενα αποτελέσματα.

Υποδειγματική Λύση

Α) Επιλέγουμε τον άξονα x ως τον άξονα κίνησης με αρχή το σημείο Ο στο οποίο βρίσκεται αρχικά το υλικό σημείο και το οποίο είμαστε ελεύθεροι να επιλέξουμε ως το $x = 0$. Η θέση $x(t)$ θα δηλώνει τη σχετική, ως προς την αρχική, θέση του υλικού σημείου. Επιλέγουμε ως θετική τη φορά προς τα δεξιά. Η αρχική ταχύτητα είναι $u(0) = u_0 > 0$ και άρα το υλικό σημείο κινείται προς τα δεξιά. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο υλικό σημείο είναι δύο:

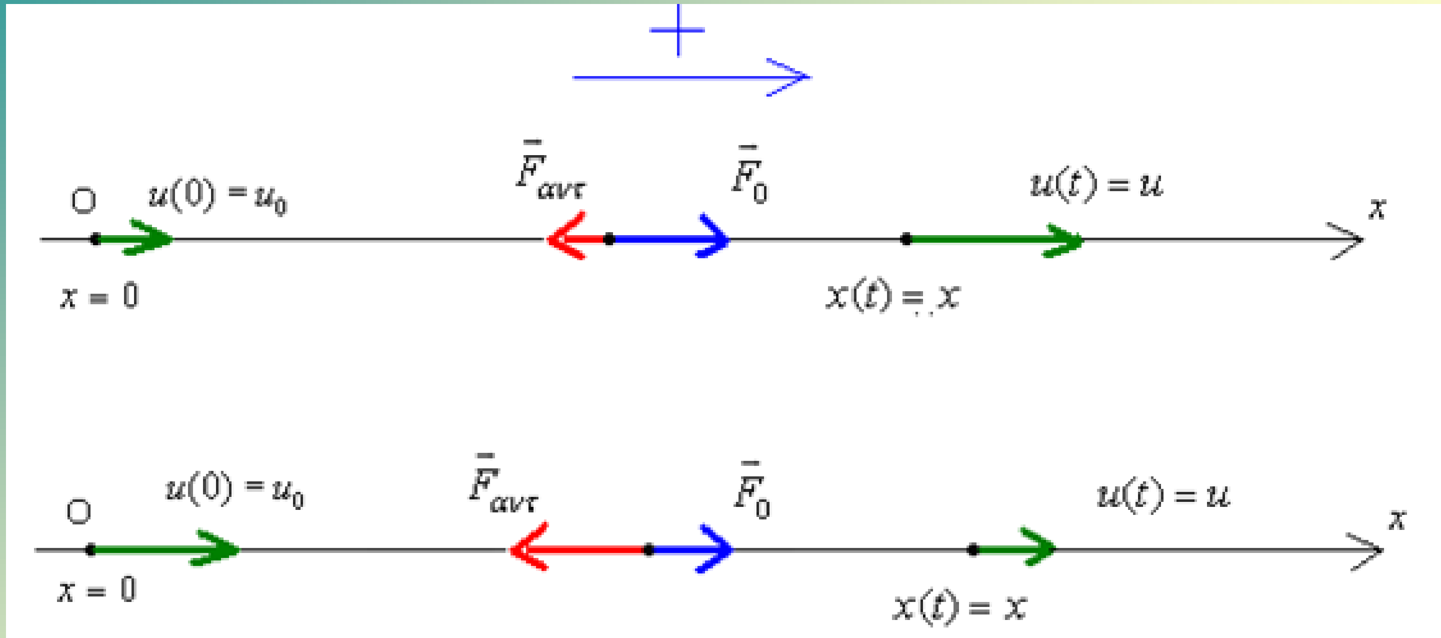
α) η σταθερή δύναμη $\vec{F}_0 = F_0 \hat{i}$ (προς τα δεξιά)

β) η αντίσταση $\vec{F}_{\alpha\nu\tau} = -\beta\vec{u} = -\beta u\hat{i}$ (προς τα αριστερά – αντίθετα της κίνησης)

Η λύση του προβλήματος, όπως θα δούμε, είναι συγκεκριμένη όσο αφορά την συναρτησιακή μορφή της ταχύτητας. **ΟΜΩΣ**, ως προς τη φυσική του προβλήματος διακρίνουμε δυο διαφορετικές περιπτώσεις ανάλογα με το αν η αρχική ταχύτητα είναι μικρή ή μεγάλη. Όταν αναφερόμαστε στη φυσική σε μικρά και μεγάλα μεγέθη εννοούμε **σχετικά** με κάτι άλλο.

Εδώ με τον όρο «μικρή αρχική ταχύτητα» εννοούμε την ταχύτητα για την οποία αρχικά η αντίσταση είναι μικρότερη κατά μέτρο από την σταθερή δύναμη, δηλ. $\beta u_0 < F_0 \Leftrightarrow u_0 < F_0 / \beta$. Σε αυτήν την περίπτωση η συνισταμένη δύναμη είναι προς τα δεξιά και άρα το σώμα επιταχύνεται προς τα δεξιά. Όσο όμως αυξάνεται η ταχύτητά του τόσο αυξάνεται και η αντίσταση και άρα μειώνεται η συνισταμένη δύναμη και άρα η επιτάχυνσή του. Αναμένουμε ότι κάποια στιγμή η αντίσταση θα εξισορροπήσει την σταθερή δύναμη οπότε και θα μηδενιστεί η συνισταμένη δύναμη και το σώμα θα συνεχίζει να κινείται πλέον με σταθερή ταχύτητα $u_{o\rho} = u_{\max} = F_0 / \beta$ (αυστηρά αυτό δεν θα συμβεί παρά μόνο οριακά καθώς περνά ο χρόνος).

Από την άλλη, με τον όρο «μεγάλη αρχική ταχύτητα» εννοούμε την ταχύτητα για την οποία αρχικά η αντίσταση είναι μεγαλύτερη κατά μέτρο από την σταθερή δύναμη, δηλ. $\beta u_0 > F_0 \Leftrightarrow u_0 > F_0 / \beta$. Σε αυτήν την περίπτωση η συνισταμένη δύναμη είναι προς τα αριστερά και άρα το σώμα επιβραδύνεται. Όσο όμως μειώνεται η ταχύτητά του τόσο μειώνεται και η αντίσταση και άρα μειώνεται κατά μέτρο η συνισταμένη δύναμη και άρα η επιβράδυνσή του. Αναμένουμε ότι κάποια στιγμή η αντίσταση θα εξισορροπηθεί από την σταθερή δύναμη οπότε και θα μηδενιστεί η συνισταμένη δύναμη και το σώμα θα συνεχίζει να κινείται πλέον με σταθερή ταχύτητα $u_{o\rho} = u_{\min} = F_0 / \beta$ (αυστηρά αυτό δεν θα συμβεί παρά μόνο οριακά καθώς περνά ο χρόνος).



Το σημαντικό από όλη την παραπάνω ανάλυση είναι να κατανοήσουμε την σημασία της αρχικής συνθήκης και το ότι η συνισταμένη δύναμη θα διατηρήσει την αρχική φορά της σε όλες τις χρονικές στιγμές.

Ας λύσουμε τώρα το πρόβλημα:

Ο 2ος Νόμος του Νεύτωνα γράφεται:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}_0 + \vec{F}_{\alpha\nu\tau} = m\vec{a} \Rightarrow F_0\hat{i} - \beta u\hat{i} = m\frac{du}{dt}\hat{i} \Rightarrow \boxed{F_0 - \beta u = m\frac{du}{dt}} \quad (1)$$

Χωρίζουμε τις μεταβλητές και ολοκληρώνουμε:

$$\int \frac{du}{F_0 - \beta u} = \frac{1}{m}\int dt \Rightarrow \frac{1}{(-\beta)}\ln\left|F_0 - \beta u\right| = \frac{t}{m} + c_1 \quad (2)$$

Ας εφαρμόσουμε την αρχική συνθήκη για να προσδιορίσουμε την σταθερά ολοκλήρωσης:

$$(2) \underset{u=u_0}{\overset{t=0}{\Rightarrow}} \frac{1}{(-\beta)}\ln\left|F_0 - \beta u_0\right| = \frac{0}{m} + c_1 \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{\beta}\ln\left|F_0 - \beta u_0\right| \quad (3)$$

οπότε η (2) γράφεται με τη βοήθεια της (3) ως:

$$-\frac{1}{\beta}\ln\left|F_0-\beta u\right|=\frac{t}{m}-\frac{1}{\beta}\ln\left|F_0-\beta u_0\right|\Rightarrow-\frac{1}{\beta}\left[\ln\left|F_0-\beta u\right|-\ln\left|F_0-\beta u_0\right|\right]=\frac{t}{m}\Rightarrow$$

$$\ln\left|\frac{F_0-\beta u}{F_0-\beta u_0}\right|=-\frac{\beta}{m}t\Rightarrow\boxed{\left|\frac{F_0-\beta u(t)}{F_0-\beta u_0}\right|=e^{-\beta t/m}}$$ **ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΤΟ ΑΠΟΛΥΤΟ**

Αν θέλουμε να είμαστε τυπικοί θα πρέπει να κατανοούμε και να σεβόμαστε τα απόλυτα όποτε εμφανίζονται και να τα «βγάζουμε» με <u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u>.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση αν δεν βάζαμε απόλυτα ΔΕΝ θα κάναμε λάθος από **<u>τύχη</u>**, διότι τελικά η ποσότητα μέσα στο απόλυτο αποδεικνύεται ότι είναι θετική. Ας το δούμε αυτό:

Με βάση την φυσική ανάλυση που προηγήθηκε, εξηγήσαμε ότι αν αρχικά η ταχύτητα είναι μικρή, δηλαδή τέτοια ώστε $\beta u_0 < F_0$, τότε και σε κάθε άλλη χρονική στιγμή θα είναι $\beta u(t) < F_0$. Ομοίως, αν αρχικά η ταχύτητα είναι μεγάλη, δηλαδή τέτοια ώστε $\beta u_0 > F_0$, τότε και σε κάθε άλλη χρονική στιγμή θα είναι $\beta u(t) > F_0$.

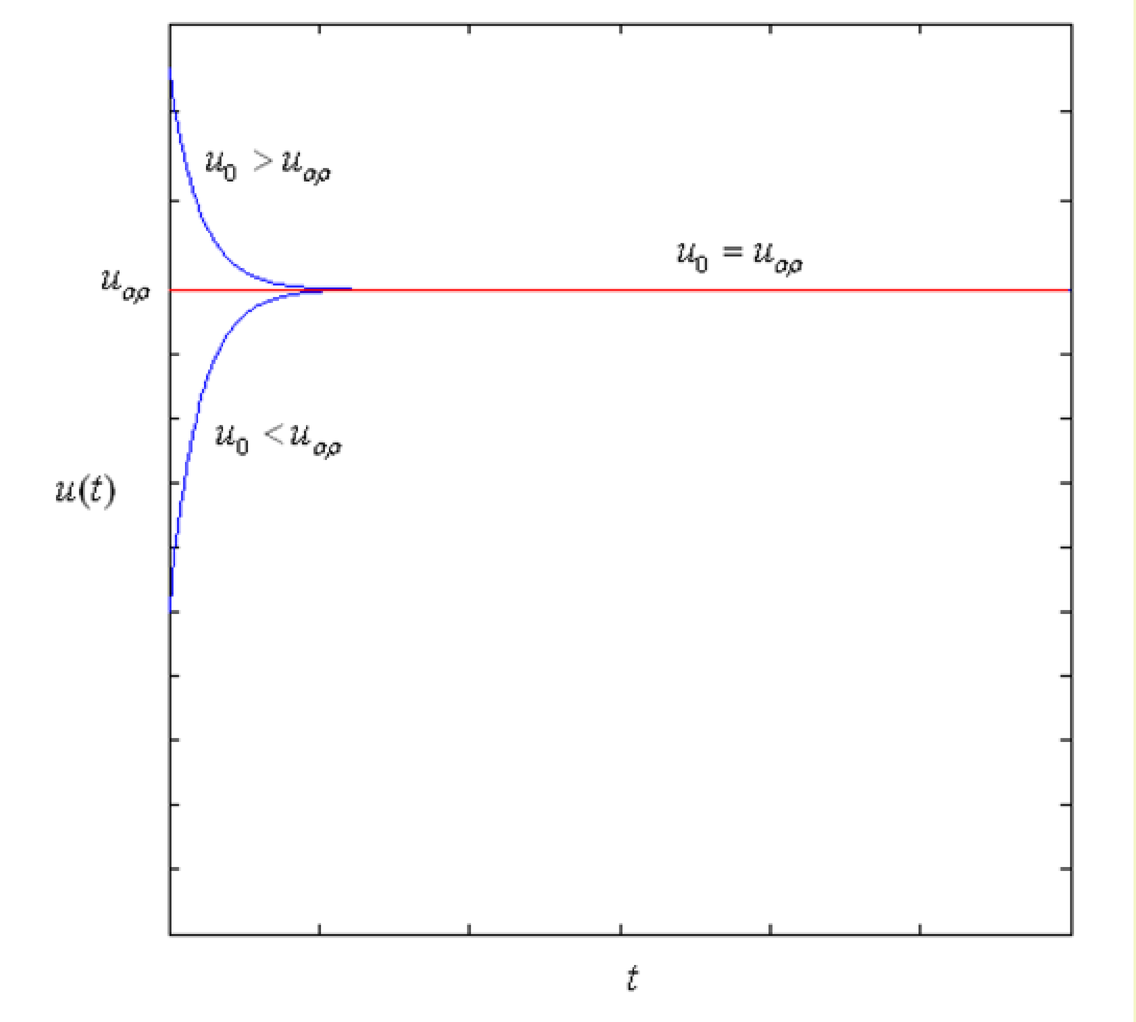
Άρα: $\dfrac{F_0 - \beta u(t)}{F_0 - \beta u_0} > 0 \;\; \forall t > 0$ και ανεξάρτητα από την αρχική ταχύτητα!!!

Έτσι:

$$\frac{F_0 - \beta u(t)}{F_0 - \beta u_0} = e^{-\beta t/m} \Leftrightarrow F_0 - \beta u(t) = \left(F_0 - \beta u_0\right) e^{-\beta t/m} \Leftrightarrow u(t) = \frac{F_0}{\beta} + \left(u_0 - \frac{F_0}{\beta}\right) e^{-\beta t/m}$$

ή πιο κομψά: $u(t) = u_{o\rho} + \left(u_0 - u_{o\rho}\right) e^{-\beta t/m}$ (4), όπου $u_{o\rho} = \lim_{t\to\infty} u(t) = \dfrac{F_0}{\beta}$

Παρατηρείστε, ωστόσο, ότι ο συντελεστής $\left(u_0 - u_{o\rho}\right)$ του εκθετικού καθορίζει την ποιοτική εξέλιξη του φαινομένου! Αν $u_0 < u_{o\rho}$ η ταχύτητα αυξάνεται τείνοντας στην μέγιστη τιμή της που είναι η $u_{o\rho}$. Αν, όμως, $u_0 > u_{o\rho}$ η ταχύτητα μειώνεται τείνοντας στην ελάχιστη τιμή της που είναι η $u_{o\rho}$. Τέλος, στην ειδική περίπτωση $u_0 = u_{o\rho}$ το υλικό σημείο κινείται με σταθερή ταχύτητα ίση με τη $u_{o\rho}$, διότι από την πρώτη κιόλας χρονική στιγμή η αντίσταση και η σταθερή δύναμη αλληλοεξουδετερώνονται, οπότε η συνισταμένη δύναμη είναι και παραμένει συνεχώς μηδενική!



Παρατηρείστε, τέλος, ότι αν $u_0 \neq u_{o\rho}$, η ταχύτητα ποτέ δεν αποκτά αυστηρά την οριακή τιμή της, αλλά πρακτικά την προσεγγίζει εξαιρετικά γρήγορα!

Β) Ας διερευνήσουμε τα αποτελέσματά μας:

1) Ελέγχουμε το αποτέλεσμα (4) στην χρονική στιγμή $t=0$:

$$(4)\overset{t=0}{\Rightarrow} u(0)=u_{o\rho}+\left(u_0-u_{o\rho}\right)e^0=u_0$$ ***(επιβεβαιώνεται η αρχική συνθήκη)***

2) Ελέγχουμε αν οι όροι στο αποτέλεσμα (4) έχουν τις σωστές διαστάσεις:

Όντως, το αποτέλεσμά μας έχει σωστές διαστάσεις, δηλ. διαστάσεις ταχύτητας, διότι:

$u_{o\rho}=\lim\limits_{t\to\infty}u(t)=\dfrac{F_0}{\beta}$ έχει διαστάσεις ταχύτητας.

3) Τέλος, ας ελέγξουμε αν τα αποτελέσματά μας είναι λογικά στο όριο $t\to\infty$:

Έχουμε: $\lim\limits_{t\to\infty}u(t)=\dfrac{F_0}{\beta}\equiv u_{o\rho}$. Το αποτέλεσμα αυτό είναι επίσης λογικό και αναμενόμενο, αφού η αντίσταση τείνει να εξισορροπήσει την F_0.

Τις απορίες και ερωτήσεις σας στείλτε τις στο e-mail:

fye24@arnos.co.gr

Ο καθηγητής κος Κεφαλιακός θα σας απαντήσει
είτε μέσω e-mail είτε στο επόμενο ζωντανό μάθημα

Περιμένουμε τα σχόλια και τις παρατηρήσεις σας

Τα θετικά μας ενθαρρύνουν, τα αρνητικά μας βελτιώνουν

www.tutor.uni-learn.gr