ΑΡΝΟΣ Studies & Publishing

# ΦΥΕ 24 : ΜΗΧΑΝΙΚΗ

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ 2$^{ΟΥ}$ ΝΟΜΟΥ ΤΟΥ NEWTON (Α΄ ΜΕΡΟΣ)

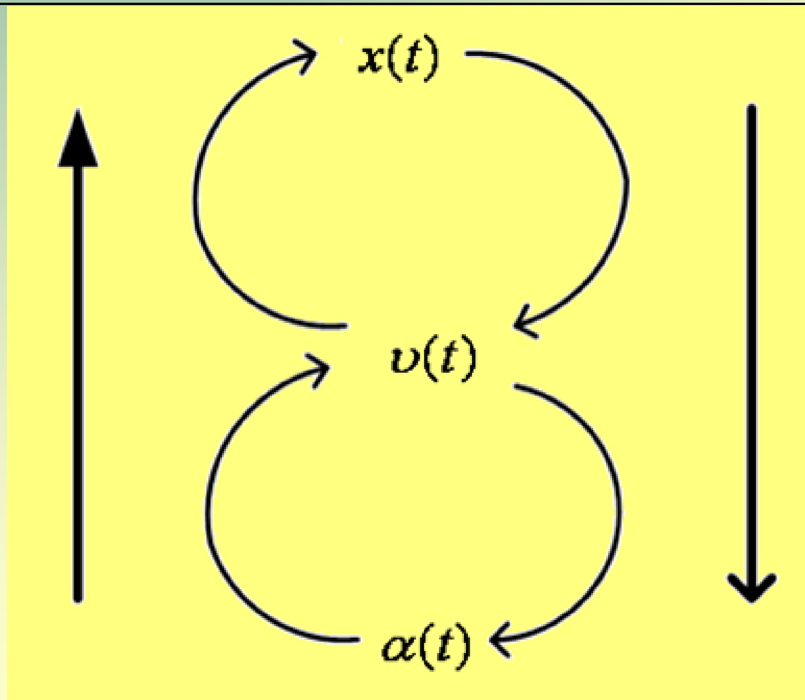



*Γεώργιος Η. Κεφαλιακός*

## Θέση – Ταχύτητα – Επιτάχυνση

Γνωρίζοντας τη θέση *x(t)* ενός κινητού ως συνάρτηση του χρόνου μπορούμε να την παραγωγίσουμε διαδοχικά ως προς το χρόνο, για να υπολογίσουμε την ταχύτητα και την επιτάχυνσή του. Αντίθετα, γνωρίζοντας τη συνάρτηση της επιτάχυνσης *α(t)* και ολοκληρώνοντάς την διαδοχικά μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα και τη θέση του.

Σχηματικά η διαδικασία αυτή φαίνεται στο ακόλουθο διάγραμμα:

| | | |
|---|---|---|
| Χωρισμός Μεταβλητών<br>&<br>Ολοκλήρωση |  | $\upsilon = \dfrac{dx}{dt}$<br>Παραγώγιση<br>$a = \dfrac{d\upsilon}{dt}$ |

## Βασικά Είδη Κίνησης

**Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση (Ε.Ο.Κ.)**: κίνηση που γίνεται σε ευθεία γραμμή με σταθερή ταχύτητα (μηδενική επιτάχυνση)

**Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη (ή Επιβραδυνόμενη) Κίνηση**: κίνηση που γίνεται σε ευθεία γραμμή με σταθερή μη μηδενική επιτάχυνση (ή επιβράδυνση).

| Φορά | ← | | | → | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ταχύτητα | - | | | + | | |
| Επιτάχυνση | - | **0** | + | - | **0** | + |
| Κίνηση | Ε.Ο.Επιταχ. | Ε.Ο. | Ε.Ο.Επιβρ. | Ε.Ο.Επιβρ. | Ε.Ο. | Ε.Ο.Επιταχ. |

## 2ος Νόμος Newton

Η συνολική δύναμη που ενεργεί πάνω στο σώμα είναι ανάλογη της επιτάχυνσής του (στην ειδική περίπτωση που η μάζα του σώματος δεν μεταβάλλεται):

$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ ή σε μια διάσταση: $\Sigma F = ma$, όπου $a = \dfrac{d\upsilon}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$

# Άσκηση 1

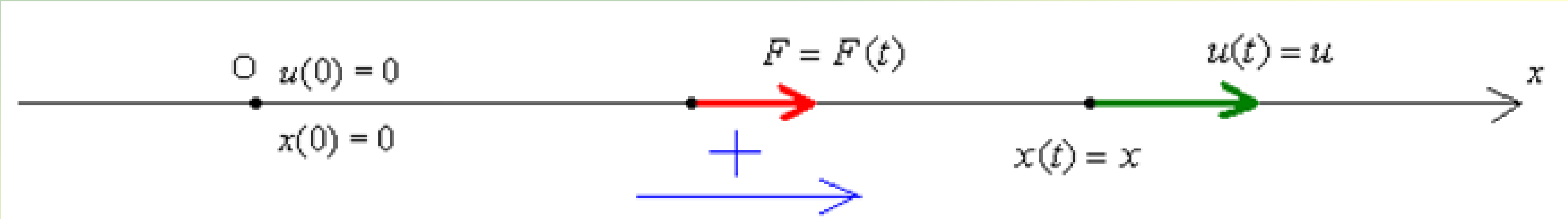
**ΕΑΠ, ΦΥΕ24: 2η ΑΣΚΗΣΗ 1ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2008-09**

Υλικό σημείο μάζας m κινείται κατά μήκος του άξονα x υπό την επίδραση της δύναμης $F = F_0 t / t_0$, με $t > 0$, όπου $F_0, t_0$ είναι σταθερές με μονάδες δύναμης και χρόνου αντιστοίχως. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $x = 0$ και έχει ταχύτητα $u = 0$.

Α) Να βρεθεί η ταχύτητα και η θέση του υλικού σημείου για $t > 0$.
Β) Να διερευνήσετε τα αποτελεσματά σας: 1) αν ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες, 2) αν όλοι οι όροι έχουν τις σωστές διαστάσεις και 3) αν στο όριο $t \to \infty$ δίνουν λογικά και αναμενόμενα αποτελέσματα.

## Υποδειγματική Λύση

Επιλέγουμε τον άξονα $x$ με αρχή το σημείο Ο ($x = 0$) και στην κατεύθυνση της δύναμης $F = F(t)$, την φορά της οποίας λαμβάνουμε ως θετική. Το υλικό σημείο τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση $x(0) = 0$ και έχει ταχύτητα $u(0) = 0$ και άρα κινείται αποκλειστικά λόγω της δράσης της.



Α) Έστω, ότι την τυχούσα χρονική στιγμή $t$ το υλικό σωμα βρίσκεται στη θέση $x(t) = x$ και έχει ταχύτητα $u(t) = u$.

Ο 2ος Νόμος του Νεύτωνα δίνει: $F = ma \Rightarrow F_0 \dfrac{t}{t_0} = m\dfrac{du}{dt} \Rightarrow \dfrac{du}{dt} = \dfrac{F_0}{mt_0}t \quad (1)$

Ολοκληρώνουμε την σχέση (1) από τη χρονική στιγμή $t_0$ έως τη χρονική στιγμή $t$:

$$\int du = \frac{F_0}{mt_0}\int t dt \Rightarrow u(t) = \frac{F_0}{2mt_0}t^2 + c_1 \quad (2)$$

Η εφαρμογή της αρχικής συνθήκης δίνει: $(2) \overset{t=0}{\Rightarrow} u(0) = 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$

Άρα: $\boxed{u(t) = \dfrac{F_0}{2mt_0}t^2}$ (3)

Λαμβάνοντας υπόψη μας τον ορισμό της ταχύτητας μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{dx}{dt} = u(t) = \frac{F_0}{2mt_0}t^2 \Rightarrow \int dx = \frac{F_0}{2mt_0}\int t^2 dt \Rightarrow x(t) = \frac{F_0}{6mt_0}t^3 + c_2 \quad (4)$$

Η εφαρμογή της αρχικής συνθήκης δίνει: $(4) \overset{t=0}{\Rightarrow} x(0) = 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$

Άρα: $\boxed{x(t) = \frac{F_0}{6mt_0}t^3}$ (5)

Β) Ας διερευνήσουμε τα αποτελέσματά μας:

1) Ελέγχουμε τα αποτελέσματα (3) και (5) στην χρονική στιγμή $t = 0$:

$(3) \overset{t=0}{\Rightarrow} u(0) = 0$ ***<u>(επιβεβαιώνεται η αρχική συνθήκη)</u>***

$(5) \overset{t=0}{\Rightarrow} x(0) = 0$ ***<u>(επιβεβαιώνεται η αρχική συνθήκη)</u>***

2) Ελέγχουμε αν οι όροι στα αποτελέσματα (3) και (5) έχουν τις σωστές διαστάσεις:

$$(3) \Rightarrow u(t) = \frac{F_0}{2mt_0} t^2$$

$$(\text{δεξί μέλος}) = \frac{(\text{δύναμη})}{(\text{μάζα})} \frac{(\text{χρόνος})^2}{(\text{χρόνος})} = (\text{επιτάχυνση})(\text{χρόνος}) = (\text{ταχύτητα})$$

Έτσι, το αποτέλεσμά μας έχει σωστές διαστάσεις, δηλ. διαστάσεις ταχύτητας.

$$(5) \Rightarrow x(t) = \frac{F_0}{6mt_0} t^3$$

$$(\text{δεξί μέλος}) = \frac{(\text{δύναμη})}{(\text{μάζα})} \frac{(\text{χρόνος})^3}{(\text{χρόνος})} = (\text{επιτάχυνση})(\text{χρόνος})^2 = (\text{μήκος})$$

Έτσι, το αποτέλεσμά μας έχει σωστές διαστάσεις, δηλ. διαστάσεις μήκους.

3) Τέλος, ας ελέγξουμε αν τα αποτελέσματά μας είναι λογικά στο όριο $t \to \infty$:

Έχουμε: $(3) \Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} u(t) = +\infty$ και $(5) \Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = +\infty$

Τα αποτελέσματα αυτά είναι αναμενόμενα: το σώμα θα τείνει να φτάσει ολοένα και πιο μακριά σε σχέση με την αρχική του θέση και με ολοένα και μεγαλύτερη ταχύτητα μιας και ασκείται συνεχώς πάνω του δύναμη που μάλιστα συνεχώς αυξάνεται κατά μέτρο.

**Παρατήρηση**: Ο απειρισμός της ταχύτητας είναι φυσικά απαράδεκτο αποτέλεσμα, διότι σύμφωνα με την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας του Einstein (που έως τώρα τουλάχιστον ισχύει με βάση όλες τις παρατηρήσεις & πειράματα) κανένα υλικό σώμα μη μηδενικής μάζας δεν μπορεί να κινηθεί με ταχύτητα ίση ή μεγαλύτερη της ταχύτητας του φωτός στο κενό $c_0 \simeq 300000 km/s$.

Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι κάναμε λάθος στους υπολογισμούς μας, αλλά ότι εξαρχής το πρόβλημα-άσκηση, που είναι καθαρά «θεωρητικό»-διδακτικό, ασχολείται με μια μορφή δύναμης που **ΔΕΝ** παρουσιάζεται στη φύση.

# Άσκηση 2

**ΕΑΠ, ΦΥΕ24: 2η ΑΣΚΗΣΗ 1ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2007-08**

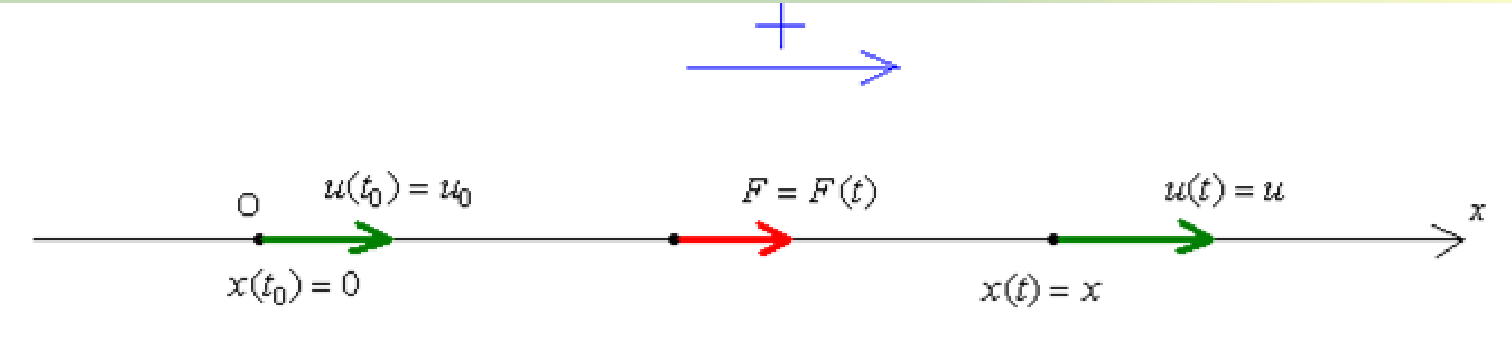
Υλικό σημείο μάζας m κινείται κατά μήκος του άξονα x υπό την επίδραση της δύναμης $F = mu_0 t_0^2 / t^3$, με $t > 0$, όπου $u_0, t_0$ είναι σταθερές με μονάδες ταχύτητας και χρόνου αντιστοίχως. Τη χρονική στιγμή $t = t_0$ το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $x = 0$ και έχει ταχύτητα $u = u_0$.

Α) Να βρεθεί η ταχύτητα και η θέση του υλικού σημείου για $t > t_0$.

Β) Να διερευνήσετε τα αποτελεσματά σας: 1) αν ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες, 2) αν όλοι οι όροι έχουν τις σωστές διαστάσεις και 3) αν στο όριο $t \to \infty$ δίνουν λογικά και αναμενόμενα αποτελέσματα.

## **Υποδειγματική Λύση**

Επιλέγουμε τον άξονα $x$ με αρχή το σημείο Ο ($x = 0$) και στην κατεύθυνση της δύναμης $F = F(t)$, την φορά της οποίας λαμβάνουμε ως θετική. Το υλικό σημείο τη χρονική στιγμή $t_0 > 0$ βρίσκεται στη θέση $x(t_0) = 0$ και έχει ταχύτητα $u(t_0) = u_0$ στην κατεύθυνση της δύναμης μιας και δίνεται ότι κινείται αποκλειστικά λόγω της δράσης της.



Α) Έστω, ότι την τυχούσα χρονική στιγμή $t$ το υλικό σωμα βρίσκεται στη θέση $x(t) = x$ και έχει ταχύτητα $u(t) = u$ .

Ο 2$^{ος}$ Νόμος του Νεύτωνα δίνει: $F = ma \Rightarrow mu_0 \dfrac{t_0^2}{t^3} = m\dfrac{du}{dt} \Rightarrow \dfrac{du}{dt} = \dfrac{u_0 t_0^2}{t^3}$ (1)

Ολοκληρώνουμε την σχέση (1) από τη χρονική στιγμή $t_0$ έως τη χρονική στιγμή $t$ :

$$\int_{u_0}^{u} du = u_0 t_0^2 \int_{t_0}^{t} t^{-3} dt \Rightarrow u - u_0 = u_0 t_0^2 \left[ \frac{t^{-3+1}}{-3+1} \right]_{t_0}^{t} \Rightarrow u - u_0 = -\frac{u_0 t_0^2}{2} \left( \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t_0^2} \right) \Rightarrow$$

$$u - u_0 = \frac{u_0}{2} - \frac{u_0 t_0^2}{2t^2} \Rightarrow u = \frac{3u_0}{2} - \frac{u_0 t_0^2}{2t^2} \Rightarrow u(t) = \frac{u_0}{2} \left[ 3 - \left( \frac{t_0}{t} \right)^2 \right] \quad (2)$$

Λαμβάνοντας υπόψη μας τον ορισμό της ταχύτητας μπορούμε να γράψουμε την σχέση (2) ως:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{u_0}{2}\left(3-\frac{t_0^2}{t^2}\right) \quad (3)$$

Με ολοκλήρωση της σχέσης (3) στο χρονικό διάστημα $\left[t_0,t\right]$ λαμβάνουμε:

$$\int_0^x dx=\frac{u_0}{2}\int_{t_0}^t\left(3-\frac{t_0^2}{t^2}\right)dt=\frac{u_0}{2}\left[3\int_{t_0}^t dt+t_0^2\int_{t_0}^t\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt\right]=\frac{u_0}{2}\left(3\left[t\right]_{t_0}^t+t_0^2\left[\frac{1}{t}\right]_{t_0}^t\right)\Rightarrow$$

$$x=\frac{u_0}{2}\left[3\left(t-t_0\right)+t_0^2\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t_0}\right)\right]\Rightarrow x=\frac{3u_0}{2}t-\frac{3u_0t_0}{2}+\frac{u_0t_0^2}{2t}-\frac{u_0t_0}{2}\Rightarrow$$

$$x(t)=\frac{3u_0}{2}t+\frac{u_0t_0^2}{2t}-2u_0t_0 \quad (4)$$

B) Ας διερευνήσουμε τα αποτελέσματά μας:

1) Ελέγχουμε τα αποτελέσματα (2) και (4) στην χρονική στιγμή $t_0$:

$$(2)\overset{t=t_0}{\Rightarrow} u(t_0)=\frac{u_0}{2}\left[3-\left(\frac{t_0}{t_0}\right)^2\right]=\frac{u_0}{2}\left[3-1^2\right]=u_0$$

***<u>(επιβεβαιώνεται η αρχική συνθήκη)</u>***

$$(4)\overset{t=t_0}{\Rightarrow} x(t_0)=\frac{3u_0}{2}t_0+\frac{u_0t_0^2}{2t_0}-2u_0t_0=0$$

***<u>(επιβεβαιώνεται η αρχική συνθήκη)</u>***

2) Ελέγχουμε αν οι όροι στα αποτελέσματα (2) και (4) έχουν τις σωστές διαστάσεις:

$$(2) \Rightarrow u(t) = \frac{u_0}{2}\left[3 - \left(\frac{t_0}{t}\right)^2\right]$$

Ο όρος στην αγκύλη στο δεξί μέλος της (2) δεν έχει διαστάσεις μιας και περιέχει έναν καθαρό αριθμό και το πηλίκο χρόνου προς χρόνο που επίσης είναι αδιάστατο. Έτσι, το αποτέλεσμά μας έχει σωστές διαστάσεις, δηλ. διαστάσεις ταχύτητας, που τις φέρει ο όρος $u_0$.

$$(4) \Rightarrow x(t) = \frac{3u_0}{2}t + \frac{u_0 t_0^2}{2t} - 2u_0 t_0$$

Ο πρώτος και ο τρίτος όρος στο δεξί μέλος της (4) έχουν διαστάσεις ταχύτητας × χρόνου, άρα μήκους. Ο δεύτερος όρος έχει διαστάσεις ταχύτητας $\times$ $(\text{χρόνου})^2$ / χρόνο, άρα ταχύτητας × χρόνου, δηλ. διαστάσεις μήκους, που είναι οι σωστές διαστάσεις.

3) Τέλος, ας ελέγξουμε αν τα αποτελέσματά μας είναι λογικά στο όριο $t \to \infty$:

Για την ταχύτητα έχουμε:

$$(2) \Rightarrow \lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{t\to\infty} \left\{ \frac{u_0}{2} \left[ 3 - \left( \frac{t_0}{t} \right)^2 \right] \right\} = \frac{3u_0}{2} - \frac{u_0}{2} \underbrace{\lim_{t\to\infty} \left( \frac{t_0}{t} \right)^2}_{0} = \frac{3u_0}{2}$$

Επομένως, η ταχύτητα του υλικού σημείου μετά από άπειρο χρόνο θα είναι 1.5 φορές μεγαλύτερη της αρχικής. Αυτό είναι λογικό, αφού η δύναμη είναι αντιστρόφως ανάλογη του κύβου του χρόνου: $F \sim t^{-3}$ και άρα πολύ γρήγορα γίνεται πολύ μικρή τείνοντας στο 0 σε μεγάλους χρόνους. Άρα σε μεγάλους χρόνους το υλικό σημείο κινείται ελεύθερα έχοντας αποκτήσει σταθερή ταχύτητα.

Για τη θέση του υλικού σημείου έχουμε:

$$(4) \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{3u_0}{2}t + \frac{u_0 t_0^2}{2t} - 2u_0 t_0\right) = \frac{3u_0}{2}\underbrace{\lim_{t\to\infty} t}_{\infty} + \frac{u_0 t_0^2}{2}\underbrace{\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\right)}_{0} - 2u_0 t_0 = \infty$$

Άρα, το υλικό σημείο τείνει να φτάσει στο άπειρο κινούμενο ευθύγραμμα ομαλά και διανύοντας, έτσι, διάστημα ανάλογο του χρόνου και με σταθερά αναλογίας την σταθερή ταχύτητα $3u_0/2$.

# Άσκηση 3

**ΕΑΠ, ΦΥΕ24: 4η ΑΣΚΗΣΗ 1ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2008-09**

Υλικό σημείο μάζας m βρίσκεται ακίνητο στη θέση $x = 0$. Για $t \geq 0$ δρα πάνω του η δύναμη $\vec{F} = \left(F_0 t^4 / t_0^4\right)\hat{i}$ για $0 \leq t \leq t_0$ και $\vec{F} = -\left(F_0 t_0{}^4 / t^4\right)\hat{i}$ για $t > t_0$, όπου $F_0, t_0$ είναι σταθερές με κατάλληλες μονάδες και $\hat{i}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στον άξονα x.

A) Να βρεθεί η ταχύτητα του υλικού σημείου για όλες τις δυνατές τιμές του $t > 0$.

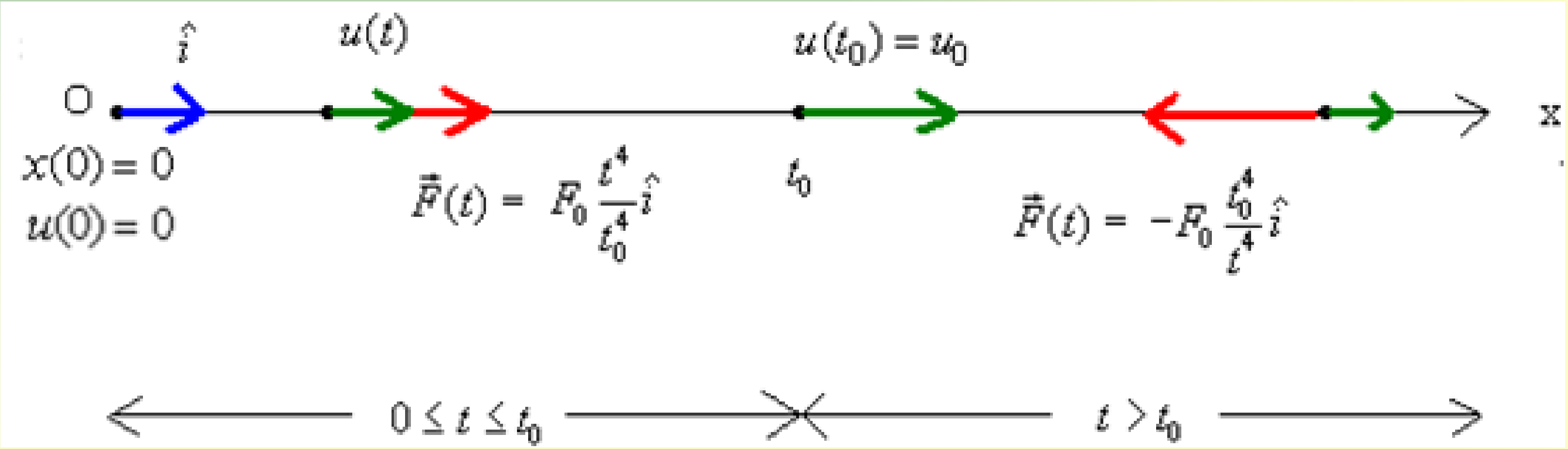
B) Να διερευνήσετε τα αποτελεσματά σας 1) αν ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες, 2) αν έχουν τις σωστές διαστάσεις και 3) αν στο όριο $t \to \infty$ δίνουν λογικά και αναμενόμενα αποτελέσματα.

## Υποδειγματική Λύση

Το υλικό σημείο είναι αρχικά ($t = 0$) ακίνητο, δηλ. $u(0) = 0$, στη θέση $x(0) = 0$. Στη συνέχεια ασκείται πάνω του δύναμη παράλληλα προς τη διεύθυνση x και άρα το σωματίδιο θα κινηθεί κατά μήκος του άξονα x. Η δύναμη που ασκείται στο υλικό σημείο μεταβάλλεται χρονικά σύμφωνα με τη δοθείσα σχέση:

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} F_0 \dfrac{t^4}{t_0^4} \hat{i}, & 0 \le t \le t_0 \\[2ex] -F_0 \dfrac{t_0^4}{t^4} \hat{i}, & t > t_0 \end{cases}$$

Συνεπώς, η δύναμη επιταχύνει το υλικό σημείο στο χρονικό διάστημα $[0,t_0]$ και μάλιστα με συνεχώς αυξανόμενο ρυθμό (αφού το μέτρο της αυξάνεται ανάλογα της τέταρτης δύναμης του χρόνου, δηλ. $F \sim t^4$). Έστω ότι τη χρονική στιγμή $t_0$, η ταχύτητα του σωματιδίου είναι $u(t_0) = u_0$. Για χρονικές στιγμές $t > t_0$ η δύναμη αντιτίθεται στην κίνηση και το επιβραδύνει με συνεχώς μικρότερο ρυθμό, αφού το μέτρο της μειώνεται αντιστρόφως ανάλογα της τέταρτης δύναμης του χρόνου, δηλ. $\vec{F} \sim t^{-4}\left(-\hat{i}\right)$.



Α) Έστω, ότι την τυχούσα χρονική στιγμή $t \leq t_0$ το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $x(t) = x$ και έχει ταχύτητα $u(t) = u$.

Ο 2ος Νόμος του Νεύτωνα δίνει στο χρονικό διάστημα $[0, t_0]$:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow F_0 \frac{t^4}{t_0^4}\hat{i} = m\frac{du}{dt}\hat{i} \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{F_0}{m}\frac{t^4}{t_0^4} \quad (1)$$

Ολοκληρώνουμε την σχέση (1) από τη χρονική στιγμή $0$ έως τη χρονική στιγμή $t$:

$$\int_0^u du' = \frac{F_0}{mt_0^4}\int_0^t t'^4 dt' \Rightarrow u = \frac{F_0}{mt_0^4}\left[\frac{t'^{4+1}}{4+1}\right]_0^t \Rightarrow u = \frac{F_0}{mt_0^4}\frac{t^5}{5} \Rightarrow \boxed{u(t) = \frac{F_0 t_0}{5m}\left(\frac{t}{t_0}\right)^5} \quad (2)$$

Η ταχύτητα του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή $t_0$ (ακριβώς δηλαδή προτού αλλάξει η μορφή της δύναμης που ασκείται σε αυτό) είναι:

$$u_0 = u(t_0) \Rightarrow u_0 = \frac{F_0 t_0}{5m}\left(\frac{t_0}{t_0}\right)^5 \Rightarrow \boxed{u_0 = \frac{F_0 t_0}{5m}} \quad (3)$$

Αντίστοιχα, για χρονικές στιγμές $t > t_0$ ο 2ος Νόμος του Νεύτωνα δίνει:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -F_0 \frac{t_0^4}{t^4}\hat{i} = m\frac{du}{dt}\hat{i} \Rightarrow \frac{du}{dt} = -\frac{F_0}{m}\frac{t_0^4}{t^4} \quad (4)$$

Ολοκληρώνουμε την σχέση (4) από τη χρονική στιγμή $t_0$ στην οποία το υλικό σημείο έχει ταχύτητα $u_0 = F_0 t_0 /(5m)$ έως μια τυχούσα χρονική στιγμή $t > t_0$ στην οποία η ταχύτητά του είναι $u = u(t)$:

$$\int_{u_0}^{u} du' = -\frac{F_0}{m}t_0^4\int_{t_0}^{t} t'^{-4}dt' \Rightarrow u - u_0 = -\frac{F_0}{m}t_0^4\left[\frac{t'^{-4+1}}{-4+1}\right]_{t_0}^{t} \overset{(3)}{\Rightarrow} u - \frac{F_0 t_0}{5m} = \frac{F_0 t_0^4}{3m}\left(\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t_0^3}\right) \Rightarrow$$

$$u - \frac{F_0 t_0}{5m} = \frac{F_0 t_0^4}{3mt^3} - \frac{F_0 t_0}{3m} \Rightarrow u = \frac{F_0 t_0^4}{3mt^3} - \frac{2F_0 t_0}{15m} \Rightarrow \boxed{u(t) = \frac{F_0 t_0}{15m}\left[5\left(\frac{t_0}{t}\right)^3 - 2\right]} \quad (5)$$

B) Ας διερευνήσουμε τα αποτελέσματά μας:

1) Ελέγχουμε το αποτελέσματα (2) στην χρονική στιγμή 0:

$$(2)\overset{t=0}{\Rightarrow} u(0)=\frac{F_0 t_0}{5m}\left(\frac{0}{t_0}\right)^5=0$$

***<u>(επιβεβαιώνεται η αρχική συνθήκη)</u>***

και το αποτέλεσμα (5) στην χρονική στιγμή $t_0$:

$$(5)\overset{t=t_0}{\Rightarrow} u(t_0)=\frac{F_0 t_0}{15m}\left[5\left(\frac{t_0}{t_0}\right)^3-2\right] u(t_0)=\frac{F_0 t_0}{15m}(5-2)=\frac{F_0 t_0}{5m}=u_0$$

***<u>(επιβεβαιώνεται η αρχική συνθήκη)</u>***

2) Ελέγχουμε αν οι όροι στα αποτελέσματα (2) και (5) έχουν τις σωστές διαστάσεις:

$$(2) \Rightarrow u(t) = \frac{F_0 t_0}{5m}\left(\frac{t}{t_0}\right)^5$$

Ο όρος στην παρένθεση στο δεξί μέλος της (2) δεν έχει διαστάσεις μιας και περιέχει το πηλίκο χρόνου προς χρόνο που είναι αδιάστατο. Έτσι, το αποτέλεσμά μας έχει τις σωστές διαστάσεις:

[(δύναμη) / (μάζα)] × (χρόνος) = (επιτάχυνση) × (χρόνος) = (ταχύτητα)

$$(5) \Rightarrow u(t) = \frac{F_0 t_0}{15m}\left[5\left(\frac{t_0}{t}\right)^3 - 2\right]$$

Ο όρος στην αγκύλη στο δεξί μέλος της (5) είναι αδιάστατος αφού περιέχει καθαρούς αριθμούς και έναν όρο (χρόνο) / (χρόνο) στον κύβο που είναι αδιάστατος. Άρα, οι διαστάσεις του δεξιού μέλους είναι και πάλι σωστές, αφού:

[(δύναμη) / (μάζα)] × (χρόνος) = (επιτάχυνση) × (χρόνος) = (ταχύτητα).

3) Το αποτέλεσμα (2) δε χρειάζεται να το εξετάσουμε στο όριο $t \to \infty$ μιας και ισχύει σε πεπερασμένες χρονικές στιγμές, δηλ. στο διάστημα $[0, t_0]$. Ένα τέτοιο αποτέλεσμα σε όλες τις χρονικές στιγμές θα ήταν απαράδεκτο μιας και θα οδηγούσε σε απειρισμό της ταχύτητας.

Ας ελέγξουμε, όμως, αν το αποτέλεσμα (5), που ισχύει για $t > t_0$, δίνει λογικό αποτέλεσμα στο όριο $t \to \infty$:

$$(5) \Rightarrow \lim_{t \to \infty} u(t) = \frac{F_0 t_0}{15m} \lim_{t \to \infty} \left[ 5 \left( \frac{t_0}{t} \right)^3 - 2 \right] = \frac{F_0 t_0}{15m} \left[ 5 \underbrace{\lim_{t \to \infty} \left( \frac{t_0}{t} \right)^3}_{0} - 2 \right] = -\frac{2F_0 t_0}{15m} = -\frac{2u_0}{3}$$

Επομένως, η ταχύτητα του υλικού σημείου μετά από άπειρο χρόνο θα είναι ίση με (-2/3) της μέγιστης ταχύτητας που είχε αποκτήσει αυτό στο τέλος του χρονικού διαστήματος $[0, t_0]$. Ας προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε αυτό το αποτέλεσμα:

Στη χρονική στιγμή $t_0$ το υλικό σημείο έχει αποκτήσει τη μέγιστη ταχύτητα $u_0$ επιταχυνόμενο προς τα δεξιά λόγω της δράσης της δύναμης $\vec{F} = F_0\left(t/t_0\right)^4\hat{i}$ στο χρονικό διάστημα $[0,t_0]$. Στη συνέχεια, όμως, για $t > t_0$ η δύναμη που δρα στο σώμα είναι αντίθετη της φοράς κίνησής του: $\vec{F} = -F_0\left(t_0/t\right)^4\hat{i}$ και συνεπώς το επιβραδύνει. Η δύναμη αυτή δρα σε όλες τις υπόλοιπες χρονικές στιγμές και συνεπώς κάποια χρονική στιγμή $t_1 > t_0$ θα το σταματήσει, δηλαδή:

$$u(t_1) = 0 \overset{(5)}{\Rightarrow} \frac{F_0 t_0}{15m}\left[5\left(\frac{t_0}{t_1}\right)^3 - 2\right] = 0 \Rightarrow 5\left(\frac{t_0}{t_1}\right)^3 = 2 \Rightarrow t_1 = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}t_0$$

Για τις υπόλοιπες χρονικές στιγμές $t > t_1$ η δράση της δύναμης $\vec{F} = -F_0\left(t_0/t\right)^4\hat{i}$ έχει ως αποτέλεσμα την επιτάχυνση του υλικού σημείου προς τα αριστερά πλέον. Ωστόσο, το μέτρο της δύναμης ελαττώνεται αντιστρόφως ανάλογα προς την τέταρτη δύναμη του χρόνου και συνεπώς σε μεγάλους χρόνους η δράση της δύναμης θα είναι αμελητέα και άρα το υλικό σημείο θα κινείται ευθύγραμμα ομαλά προς τα αριστερά. Το αποτέλεσμα $\lim_{t\to\infty} u(t) = -2u_0/3$ επισημαίνει αυτό ακριβώς το γεγονός, αλλά μας πληροφορεί επιπρόσθετα ότι το μέτρο αυτής της σταθερής ταχύτητας είναι $2F_0 t_0/(15m)$, ίσο δηλαδή με (2/3) του μέτρου της μέγιστης ταχύτητας τη στιγμή $t_0$.

ΑΡΝΟΣ Studies & Publishing

Τις απορίες και ερωτήσεις σας στείλτε τις στο e-mail:

**fye24@arnos.co.gr**

Ο καθηγητής κος Κεφαλιακός θα σας απαντήσει
είτε μέσω e-mail είτε στο επόμενο ζωντανό μάθημα

Περιμένουμε τα σχόλια και τις παρατηρήσεις σας

**Τα θετικά μας ενθαρρύνουν, τα αρνητικά μας βελτιώνουν**

**www.tutor.uni-learn.gr**