

Ανισώσεις 2^{ου} βαθμού

ΦΥΛΛΟ ΘΕΜΑΤΩΝ Α: Live διδασκαλία

Ασκήσεις

Θέμα 1

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

1. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;
3. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = \frac{1}{\sqrt{S-P}}$, S, P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) αντίστοιχα, έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε πραγματικό αριθμό λ .

Λύση

1. $\Delta = (-1)^2 - 4(\lambda - \lambda^2) = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1 - 2\lambda)^2 \geq 0$
Άρα, η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές είτε ίσες είτε άνισες.
2. Για να έχει δύο ρίζες ίσες πρέπει $\Delta = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$.
3. $S = -\frac{\beta}{\alpha} = 1$, $P = \frac{\gamma}{\alpha} = \lambda - \lambda^2$
Η παράσταση A έχει νόημα όταν $S - P > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 1 - (\lambda - \lambda^2) > 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda + \lambda^2 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
Είναι: $\Delta = (-1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3 < 0$ δηλαδή το $1 - \lambda - \lambda^2$ είναι ομόσημο του $\alpha = 1$ άρα θετικό για κάθε λ πραγματικό.

Θέμα 2

Δίνεται πραγματικός αριθμός α , που ικανοποιεί τη σχέση:

$$|\alpha - 2| < 1.$$

1. Να γράψετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του α .
2. Θεωρούμε στη συνέχεια το τριώνυμο: $x^2 - (\alpha - 2)x + \frac{1}{4}$.
 - a. Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να προσδιορίσετε το πρόσημό της.
 - b. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$x^2 - (\alpha - 2)x + \frac{1}{4} > 0.$$

Λύση

1. $|\alpha - 2| < 1 \Leftrightarrow -1 < \alpha - 2 < 1 \Leftrightarrow 2 - 1 < \alpha < 2 + 1 \Leftrightarrow 1 < \alpha < 3$
2. $\Delta = [-(\alpha - 2)]^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} = (\alpha - 2)^2 - 1 = \alpha^2 - 4\alpha + 4 - 1 = \alpha^2 - 4\alpha + 3$
 $\Delta = (-4)^2 - 12 = 4 > 0$
 $\alpha_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2}$
 $\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 3$
Για $\alpha \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$, $\Delta > 0$.
Για $\alpha = 1$ ή $\alpha = 3$, $\Delta = 0$.
Για $\alpha \in (1, 3)$, $\Delta < 0$.

Επομένως, αφού από το ερώτημα (1) είναι $\alpha \in (1,3)$, $\Delta < 0$.

- b. Αφού η διακρίνουσα είναι αρνητική το τριώνυμο είναι για κάθε x ομόσημο του α , άρα είναι **θετικό**.

Θέμα 3

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.
2. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

Αν $3 < \lambda < 12$, τότε:

3. Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες.
4. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

1. $\Delta = (-6)^2 - 4(\lambda - 3) = 36 - 4\lambda + 12 = -4\lambda + 48$.
2. Για να έχει δύο ρίζες άνισες πρέπει να είναι $\Delta > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -4\lambda + 48 > 0 \Leftrightarrow -4\lambda > -48 \Leftrightarrow \lambda < 12$.
3. Είναι $\Delta > 0$ από το προηγούμενο ερώτημα. Ακόμα:

$$P = \frac{\gamma}{\alpha} = \lambda - 3$$

$$3 < \lambda < 12 \Leftrightarrow 3 - 3 < \lambda - 3 < 12 - 3 \Leftrightarrow 0 < \lambda - 3 < 9$$

Δηλαδή, $\lambda - 3 > 0 \Leftrightarrow P > 0$ άρα οι ρίζες είναι ομόσημες.

Επίσης, $S = -\frac{\beta}{\alpha} = 6 > 0$ άρα οι ρίζες είναι θετικές.

4. $x_1, x_2 > 0$ από το προηγούμενο ερώτημα.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	+	○	-	○	+

Επειδή το $\kappa < 0$ σημαίνει ότι $\kappa \in (-\infty, x_1)$ όπου το $f(x)$ είναι θετικό. Άρα, $f(\kappa) > 0$.

$\mu \in (x_1, x_2)$ όπου $f(x) < 0$ και $\mu > 0$ και $f(\mu) < 0$.

Οπότε $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu) > 0$.

Θέμα 4

1. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 5x + 6$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

Δίνεται η εξίσωση

$$\frac{1}{4}x^2 + (2 - \lambda)x + \lambda - 2 = 0 \quad (1) \text{ με παράμετρο } \lambda.$$

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες.
3. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι ρίζες της (1) είναι ομόσημοι αριθμοί.

Λύση

$$1. \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1 > 0$$

Επομένως, το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες τις:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3$$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$	+	○	○	+

$$2. \Delta = (2 - \lambda)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (\lambda - 2) = 4 - 4\lambda + \lambda^2 - \lambda + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$$

Σύμφωνα με το ερώτημα (1) $\lambda^2 - 5\lambda + 6 > 0 \Leftrightarrow \Delta > 0$ για κάθε $\lambda \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ οπότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες.

$$3. P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda - 2}{\frac{1}{4}} = 4(\lambda - 2)$$

Πρέπει, $P > 0 \Leftrightarrow \lambda - 2 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 2$. Επειδή όμως, $\lambda \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ καταλαβαίνουμε ότι $\lambda \in (3, +\infty)$.