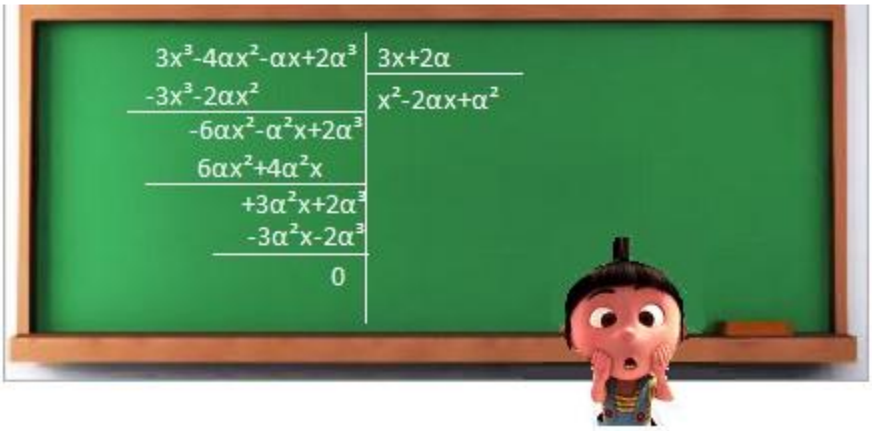
1. Αλγεβρικές Παραστάσεις



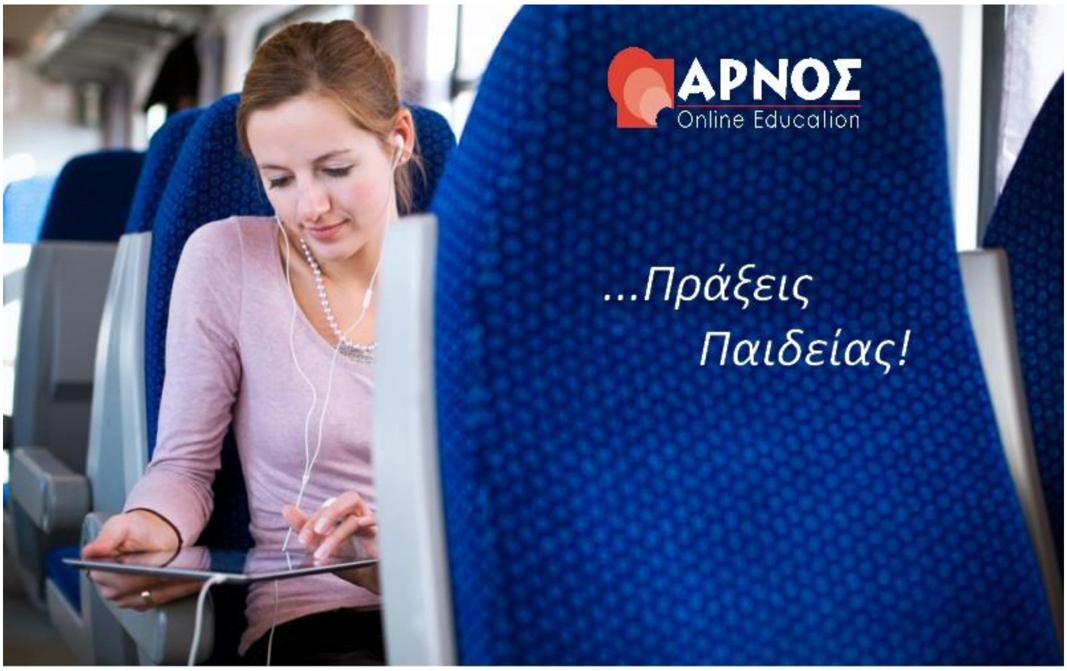
Λύσεις ασκήσεων Μαθηματικών Γ' Γυμνασίου

1.7 Διαίρεση πολυωνύμων

σχ. βιβλίο (σσ. 66-67)

Φροντιστηριακό e-μάθημα

Γυμνάσιο: 9.000 μαθήματα με βίντεο-διδασκαλία
για όλο το σχολικό έτος μόνο με 150 ευρώ!



Μελέτη όπου, όποτε και όσο εσύ θες!

Διδάσκουμε μεθοδικά σε βίντεο τη θεωρία του σχολικού βιβλίου και λύνουμε όλες τις ασκήσεις

Δημιουργούμε συνεχώς νέα βίντεο με διδασκαλία για τις εκπαιδευτικές σου απαιτήσεις

Παίζουμε και μαθαίνουμε με on line test αξιολόγησης & SOS διαγωνίσματα προσομοίωσης για τις εξετάσεις

Λύνουμε απορίες ζωντανά on line καθημερινά 3 μ.μ. - 8 μ.μ.

Λύσεις Ασκήσεων Μαθηματικών Γ΄ Γυμνασίου σχ. βιβλίου (σσ. 66 – 67)

1.7 Διαίρεση πολυωνύμων

Ερωτήσεις κατανόησης

Ερώτηση 1

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

i) Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου με το $4x + 7$ είναι πολυώνυμο

α) $1^{ου}$ βαθμού β) $2^{ου}$ βαθμού γ) $3^{ου}$ βαθμού δ) σταθερό

ii) Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου με το $x^2 - 4x + 9$ δεν μπορεί να είναι α) 5 β) $3x - 2$ γ) $x^2 + 3$ δ) $4x$

iii) Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το $2x^2 + x + 5$ δίνει πηλίκο $x^4 + x - 2$ τότε ο βαθμός του $P(x)$ είναι

α) 4 β) 6 γ) 8 δ) οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός

Απάντηση

i) Σωστή απάντηση **δ.** Γιατί το υπόλοιπο είναι μηδενικού βαθμού, άρα σταθερό

ii) Σωστή απάντηση **γ.** Γιατί το υπόλοιπο είναι είναι μικρότερου βαθμού απο το πολυώνυμο που διαιρείται

iii) Σωστή απάντηση **β.** Προσθέτουμε τον βαθμό του πυλίκου με το βαθμό του διαιρετέου για να βρούμε το βαθμό του διαιρέτη

Ερώτηση 2

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

Βαθμός Διαιρετέου	Βαθμός Διαιρέτη	Βαθμός Πηλίκου
8	3	
7		2
	6	3

Απάντηση

Ακολουθώντας την σχέση Βαθμός Διαιρέτη + Βαθμός πηλίκου = Βαθμός Διαιρετέου

Προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

Βαθμός Διαιρετέου	Βαθμός Διαιρέτη	Βαθμός Πηλίκου
8	3	5
7	5	2
9	6	3

Ερώτηση 3

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

α) Το πηλίκο της διαίρεσης του $(2x+1)(x+3)$ με το $2x+1$ είναι $x+3$

β) Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου με το $x+6$ είναι το x^2+2

γ) Αν διαιρέσουμε ένα πολυώνυμο 6^{ου} βαθμού με ένα πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού τότε το πηλίκο είναι πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού

δ) Το $x-4$ είναι παράγοντας του x^2-16

ε) Το πηλίκο της διαίρεσης $(x^3+1):(x+1)$ είναι το x^2-x+1

Απάντηση

α) Είναι σωστό **(Σ)** Απαλοίφουμε το $2x + 1$

β) Είναι λάθος, **(Λ)** Το υπόλοιπο είναι μικρότερου βαθμού από τον διαιρετέο

γ) Είναι λάθος, **(Λ)** Θα είναι 4^ου^ βαθμού

δ) Είναι σωστό **(Σ)** διότι $x^2 - 16 = (x-4)(x+4)$

ε) Είναι σωστό **(Σ)** Διότι είναι τύπος της μορφής $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να κάνετε τις διαιρέσεις και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης

α) $(2x^3 + x^2 - 3x + 6) : (x + 2)$ **β)** $(6x^3 - x^2 - 10x + 5) : (3x + 1)$

γ) $(6x^4 - x^2 + 2x - 7) : (x - 1)$ **δ)** $(4x^3 + 5x - 8) : (2x - 1)$

ε) $(x^5 - x^4 + 3x^2 + 2) : (x^2 - x + 2)$ **στ)** $(9x^4 - x^2 + 2x - 1) : (3x^2 - x + 1)$

ζ) $(8x^4 - 6x^2 - 9) : (2x^2 - 3)$ **η)** $(3x^5 - 2x^3 - 4) : (3x^2 - 1)$

Λύση

Κάνουμε τις διαιρέσεις σύμφωνα με τον αλγόριθμο της σελίδας 62 και γράφουμε τις ταυτότητες σε μορφή $\Delta(x) = \pi(x)\cdot\delta(x) + \upsilon(x)$.

α)

$2x^3 + x^2 - 3x + 6$ $-2x^3 - 4x^2$	$x + 2$
$-3x^2 - 3x + 6$ $3x^2 + 6x$	$2x^2 - 3x + 3$
$3x + 6$ $-3x - 6$	
0	

Η ταυτότητα διαίρεσης είναι: $2x^3 + x^2 - 3x + 6 = (x + 2)(2x^2 - 3x + 3)$

β)

$6x^3 - x^2 - 10x + 5$ $-6x^3 - 2x^2$	$3x + 1$
$-3x^2 - 10x + 5$ $3x^2 + x$	$2x^2 - x - 3$
$-9x + 5$ $9x + 3$	
8	

Η ταυτότητα διαίρεσης είναι: $6x^3 - x^2 - 10x + 5 = (3x + 1)(2x^2 - x - 3) + 8$

γ)

$6x^4 \quad - x^2 + 2x - 7$ $-6x^4 + 6x^3$	$x - 1$
$6x^3 - x^2 + 2x - 7$ $-6x^3 + 6x^2$	$6x^3 + 6x^2 + 5x + 7$
$5x^2 + 2x - 7$ $-5x^2 + 5x$	
$7x - 7$ $-7x + 7$	
0	

Η ταυτότητα διαίρεσης είναι: $6x^4 - x^2 + 2x - 7 = (x - 1)(6x^3 + 6x^2 + 5x + 7)$

δ)

$4x^3 \quad + 5x - 8$ $-4x^3 + 2x^2$	$2x - 1$
$2x^2 + 5x - 8$ $-2x^2 + x$	$2x^2 + x + 3$
$6x - 8$ $-6x + 3$	
-5	

Η ταυτότητα διαίρεσης είναι: $4x^3 + 5x - 8 = (2x - 1)(2x^2 + x + 3) - 5$

ε)

$x^5 - x^4 \qquad + 3x^2 + 2$	$x^2 - x + 2$
$-x^5 + x^4 - 2x^3$	
$-2x^3 + 3x^2 \qquad + 2$	$x^3 - 2x + 1$
$2x^3 - 2x^2 + 4x$	
$x^2 + 4x + 2$	
$-x^2 + x - 2$	
$5x$	

Η ταυτότητα διαίρεσης είναι: $x^5 - x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2 - x + 2)(x^3 - 2x + 1) + 5x$

στ)

$9x^4 \qquad - x^2 + 2x - 1$	$3x^2 - x + 1$
$-9x^4 + 3x^3 - 3x^2$	
$3x^3 - 4x^2 + 2x - 1$	$3x^2 + x - 1$
$-3x^3 + x^2 - x$	
$-3x^2 + x - 1$	
$3x^2 - x + 1$	
0	

Η ταυτότητα διαίρεσης είναι: $9x^4 - x^2 + 2x - 1 = (3x^2 - x + 1)(3x^2 + x - 1)$

ζ)

$8x^4 - 6x^2 - 9$ $-8x^4 + 12x^2$	$2x^2 - 3$
$6x^2 - 9$ $-6x^2 + 9$	$4x^2 + 3$
0	

Η ταυτότητα διαίρεσης είναι: $8x^4 - 6x^2 - 9 = (2x^2 - 3)(4x^2 + 3)$

η)

$3x^5 - 2x^3 - 4$ $-3x^5 + x^3$	$3x^2 - 1$
$-x^3 \quad - 4$ $x^3 - \frac{1}{3}x$	$x^3 - \frac{1}{3}x$
$-\frac{1}{3}x - 4$	

Η ταυτότητα διαίρεσης είναι: $3x^5 - 2x^3 - 4 = (3x^2 - 1)\left(x^3 - \frac{1}{3}x\right) - 4$

Άσκηση 2

Να συμπληρώσετε τα κενά ώστε να είναι οι διαιρέσεις σωστές.

α)

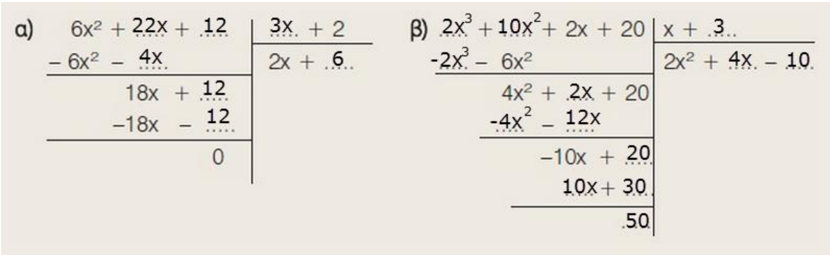
$6x^2$ + ... + ...	..... + 2
$- 6x^2$ −	2x + ...
18x + ...	
−18x −	
0	

β)

..... + ... + 2x + 20	x + ...
..... − $6x^2$	$2x^2$ + ... − .....
$4x^2$ + ... + 20	
..... −	
−10x + ...	
..... + ...	
.....	

Λύση

Η βασική πράξη για να συμπληρώσουμε τα κενά είναι να πολλαπλασιάσουμε Τον διαιρέτη με το πυλίκο ή να διαιρέσουμε τον διαιρετέο ή το πηλίκο απο τον διαιρέτη για να προκύψουν τα επιμέρους μονώνυμα



Άσκηση 3

Ποιο πολυώνυμο διαιρούμενο με το $x^2 - x + 1$ δίνει πηλίκο 2x + 3 και υπόλοιπο 3x + 2

Λύση

Αν P(x) είναι το ζητούμενο πολυώνυμο, τότε με βάση την ταυτότητα της διαίρεσης $Δ(x) = π(x)\cdot δ(x) + υ(x)$. Εδώ $Δ(x) = P(x)$, $π(x) = 2x + 3$, $δ(x) = x^2 - x + 1$ και υ(x) =

Άρα $P(x) = (x^2 - x + 1)(2x + 3) + 3x + 2 = 2x^3 + 3x^2 - 2x^2 - 3x + 2x + 3 + 3x + 2 =$

$= 2x^3 + x^2 + 2x + 5$

Άσκηση 4

Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο Q(x) είναι διαιρέτης του P(x) όταν

α) $P(x) = 6x^3 - 7x^2 + 9x - 18$ και $Q(x) = 2x - 3$

β) $P(x) = 2x^4 - x^2 + 5x - 3$ και $Q(x) = x^2 + x - 1$

Λύση

α) Κάνουμε τη διαίρεση P(x) / Q(x)

$6x^3 - 7x^2 + 9x - 18$ $-6x^3 + 9x^2$	$2x - 3$
$2x^2 + 9x - 18$ $-2x^2 + 3x$	$3x^2 + x + 6$
$12x - 18$ $-12x + 18$	
0	

Η διαίρεση είναι τέλεια. Άρα Q(x) διαιρέτης του P(x).

β)

$2x^4 \quad - x^2 + 5x - 3$ $-2x^4 - 2x^3 + 2x^2$	$x^2 + x - 1$
$-2x^3 + x^2 + 5x - 3$ $2x^3 + 2x^2 - 2x$	$3x^2 + x + 6$
$3x^2 + 3x - 3$ $-3x^2 - 3x + 3$	
0	

Η διαίρεση είναι τέλεια. Άρα Q(x) διαιρέτης του P(x).

Άσκηση 5

α) Να κάνετε την διαίρεση $(x^4-2x^3-8x^2+18x-9):(x^2-9)$

β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $x^4-2x^3-8x^2+18x-9$

Λύση

α) Κάνουμε τη διαίρεση $(x^4-2x^3-8x^2+18x-9):(x^2-9)$

$x^4-2x^3-8x^2+18x-9$ $-x^4\quad\quad+9x^2$	x^2-9
$-2x^3+x^2+18x-9$ $2x^3\quad\quad-18x$	x^2-2x+1
$x^2\quad-9$ $-x^2\quad+9$	
0	

β) Από την διαίρεση που πραγματοποιήσαμε προκύπει το πολυώνυμο

$$x^4-2x^3-8x^2+18x-9=(x^2-9)(x^2-2x+1)=(x-3)(x+3)(x-1)^2$$

Άσκηση 6

α) Να αποδείξετε ότι το $x+1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου

$x^4+4x^3+6x^2+4x+1$

β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $x^4+4x^3+6x^2+4x+1$

Λύση

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι η διαίρεση $(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) : (x + 1)$ είναι τέλεια

$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ $-x^4 - x^3$	$x + 1$
$3x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ $-3x^3 - 3x^2$	$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
$3x^2 + 4x + 1$ $-3x^2 - 3x$	
$x + 1$ $-x - 1$	
0	

Άρα ισχύει ότι $x + 1$ παράγοντας του $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

β) Άρα απο την διαίρεση προκύπτει ότι

$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = (x + 1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = (x + 1)(x + 1)^3 = (x+1)^4$

Άσκηση 7

Ένας μαθητής ήθελε να παραγοντοποιήσει την παράσταση $α^3 + β^3$ και θυμήθηκε ότι αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων από τους οποίους ο ένας είναι ο $α + β$. Επειδή είχε ξεχάσει τον άλλο παράγοντα πως θα μπορούσε να τον βρει ;

Λύση

Για να τον βρει θα μπορούσε να εκτελέσει την διαίρεση $(α^3 + β^3)$: $(α + β)$ ως προς α.

$α^3 \quad + β^3$ $-α^3 - α^2β$	$α + β$
$-α^2β \quad + β^3$ $α^2β + αβ^2$	$α^2 - αβ + β^2$
$αβ^2 + β^3$ $-αβ^2 - β^3$	
0	

Άρα απο την ταυτότητα της μορφής Δ = δπ + υ προκύπετι ότι

$α^3 + β^3 = (α + β)(α^2 - αβ + β^2)$.

Οπότε ο άλλος παράγοντας είναι το: $α^2 - αβ + β^2$

Άσκηση 8

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x^3 + 2)(x^2 - 5) + 4x^2 - 6x + 7$. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης

α) $P(x) : (x^3 + 2)$ **β)** $P(x) : (x^2 - 5)$

Λύση

α) Αφού $Δ = P(x) = (x^3 + 2)(x^2 - 5) + 4x^2 - 6x + 7$ και $δ = (x^3 + 2)$

η διαίρεση $P(x) : (x^3 + 2)$ που είναι της μορφής Δ = δπ + υ έχει

πυλίκο $π = x^2 - 5$ και υπόλοιπο $υ = 4x^2 - 6x + 7$

β) Κανουμε τη διαίρεση με Δ = $4x^2 - 6x + 7$, δ = $x^2 - 5$ για να παραγοντοποιήσουμε το P(x)

$4x^2 - 6x + 7$ $-4x^2 \quad + 20$	$x^2 - 5$
$-6x + 27$	4

Άρα $4x^2 - 6x + 7 = 4(x^2 - 5) - 6x + 27$

Οπότε $P(x) = (x^3 + 2)(x^2 - 5) + 4(x^2 - 5) - 6x + 27 =$

$= (x^2 - 5)(x^3 + 2 + 4) - 6x + 27 = (x^2 - 5)(x^3 + 6) - 6x + 27$

Οπότε για Δ = P(x) , δ(x) = ($x^2 - 5$) προκύπτει ότι π(x) = $x^3 + 6$ και υ(x) = $-6x + 27$.

Άσκηση 9

Να κάνετε την διαίρεση $(6x^3 + α) : (x - 1)$ και να βρείτε την τιμή του α για την οποία είναι τέλεια.

Λύση

$6x^3 \quad + α$ $-6x^3 + 6x^2$	$x - 1$
$6x^2 \quad + α$ $-6x^2 + 6x$	$6x^2 + 6x + 6$
$6x + α$ $-6x + 6$	
$α + 6$	

Άρα πρέπει υ = 0 δηλαδή $α + 6 = 0 \Leftrightarrow α = -6$

Άσκηση 10

Αν ένας παράγοντας του πολυωνύμου $2x^3 - x^2 - 4x + 3$ είναι ο $(x-1)^2$, να βρείτε τον άλλο παράγοντα.

Λύση

Κάνουμε το ανάπτυγμα $(x-1)^2 = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

Διαιρούμε $(2x^3 - x^2 - 4x + 3) / (x^2 - 2x + 1)$

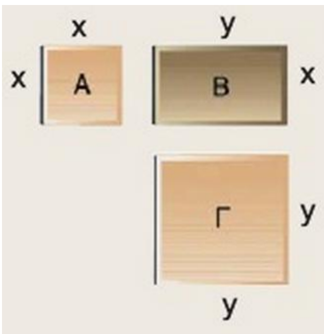
$2x^3 - x^2 - 4x + 3$ $-2x^3 + 4x^2 - 2x$	$x^2 - 2x + 1$
$3x^2 - 6x + 3$ $-3x^2 + 6x - 3$	$2x + 3$
0	

Προκύπτει η συνάρτηση $2x^3 - x^2 - 4x + 3 = (x^2 - 2x + 1)(2x + 3)$, Άρα $2x + 3$ ο δεύτερος παράγοντας

Άσκηση 11

Για την πλακόστρωση του δαπέδου ενός δωματίου που έχει σχήμα ορθογωνίου χρησιμοποιήσαμε 45 πλακάκια τύπου Α, 56 πλακάκια τύπου Β και 16 πλακάκια τύπου Γ.

Αν το πλάτος του δωματίου είναι $5x + 4y$, ποιο είναι το μήκος του ;



Λύση

Το εμβαδόν του δαπέδου είναι το άθροισμα όλων των πλακιδίων

Ανάλογα με το είδος τους

$E = 45x^2 + 56xy + 16y^2$

Διαιρούμε $(45x^2 + 56xy + 16y^2) / (5x + 4y)$ ως προς x

$45x^2 + 56xy + 16y^2$ $-45x^2 - 36xy$	$5x + 4y$
$20xy + 16y^2$ $-20xy - 16y^2$	$9x + 4y$
0	

Προκύπτει ότι $45x^2 + 56xy + 16y^2 = (5x + 4y)(9x + 4y)$

Άρα το μήκος είναι: $9x + 4y$

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης – MED - Μαθηματικός

ΑΡΝΟΣ
Online Education

…Πράξεις Παιδείας!