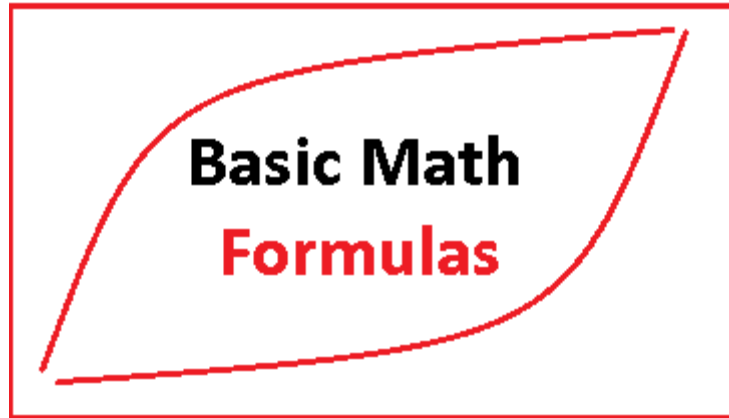


1. Αλγεβρικές Παραστάσεις



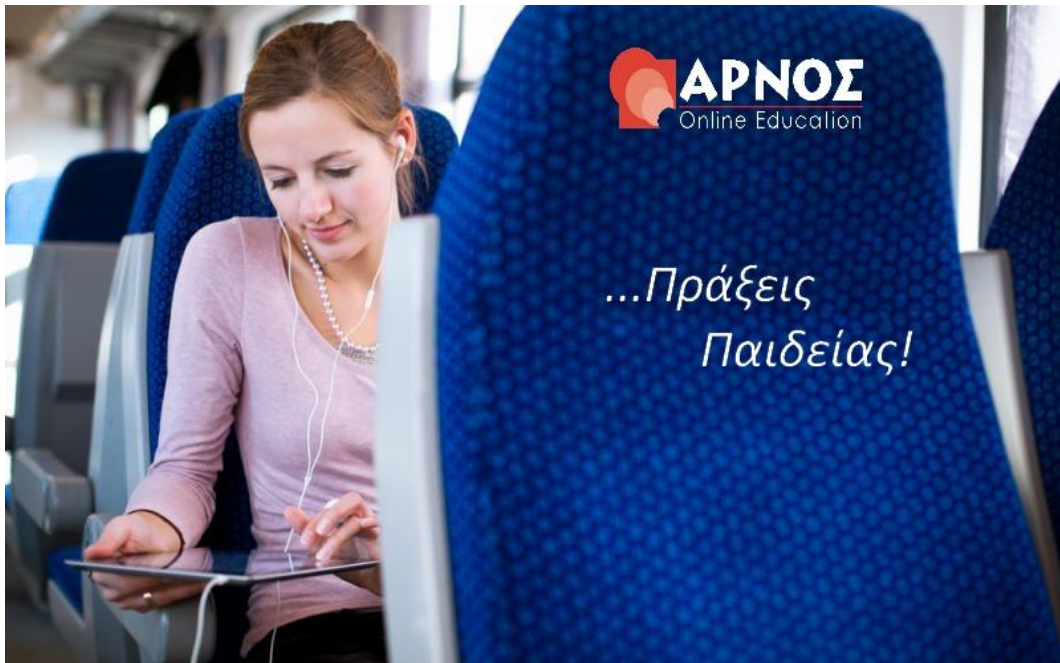
Λύσεις ασκήσεων Μαθηματικών Γ' Γυμνασίου

1.5 Αξιοσημείωτες ταυτότητες

σχ. βιβλίο (σσ. 49-51)

Φροντιστηριακό e-μάθημα

Γυμνάσιο: 9.000 μαθήματα με βίντεο-διδασκαλία για όλο το σχολικό έτος **μόνο με 150 ευρώ!**



Μελέτη όπου, όποτε και όσο εσύ θες!



Διδάσκουμε μεθοδικά σε βίντεο τη θεωρία του σχολικού βιβλίου και λύνουμε όλες τις ασκήσεις

Δημιουργούμε συνεχώς νέα βίντεο με διδασκαλία για τις εκπαιδευτικές σου απαιτήσεις



Παίζουμε και μαθαίνουμε με on line test αξιολόγησης & SOS διαγωνίσματα προσομοίωσης για τις εξετάσεις

Λύνουμε απορίες ζωντανά on line καθημερινά 3 μ.μ. - 8 μ.μ.



Λύσεις Ασκήσεων Μαθηματικών Γ' Γυμνασίου σχ. βιβλίου (σσ. 49 -51)

1.5 Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Ερωτήσεις κατανόησης

Ερώτηση 1

Ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι ταυτότητες ;

- α) $0x = 0$ β) $x + y = 0$ γ) $\alpha^2\alpha = \alpha^3$
δ) $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ ε) $\alpha\beta = 0$

Απάντηση

- α. Είναι, διότι οποιοσδήποτε αριθμός πολλαπλασιαστεί με το 0, δίνει γινόμενο 0
β. Δεν είναι. Οι x, y αρκεί να είναι αντίθετοι
γ. Είναι, διότι $\alpha^2\alpha = \alpha^{2+1} = \alpha^3$ (ιδιότητες δυνάμεων παραγρ. 1.1.B)
δ. Είναι, διότι $(x + 3)^2 = (x+3)(x+3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$
ε. Δεν είναι, γιατί δεν ισχύει για κάθε α, β .

Ερώτηση 2

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση .

i) Το ανάπτυγμα του $(x + \alpha)^2$ είναι

- α) $x^2 + \alpha^2$ β) $x^2 - 2x\alpha + \alpha^2$ γ) $x^2 + \alpha x + \alpha^2$ δ) $x^2 + 2x\alpha + \alpha^2$

ii) Το ανάπτυγμα του $(2\alpha + 1)^2$ είναι

- α) $2\alpha^2 + 4\alpha + 1$ β) $4\alpha^2 + 1$ γ) $4\alpha^2 + 4\alpha + 1$ δ) $4\alpha^2 + 2\alpha + 1$

iii) Το ανάπτυγμα του $(y - 2)^2$ είναι

- α) $y^2 - 2y + 4$ β) $y^2 - 4$ γ) $y^2 - 4y + 4$ δ) $4^2 + 4y + 4$

Απάντηση

i) δ διότι $(x + \alpha)^2 = (x + \alpha)(x + \alpha) = x^2 + \alpha x + \alpha x + \alpha^2 = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2$

ii) γ διότι $(2\alpha + 1)^2 = (2\alpha + 1)(2\alpha + 1) = 4\alpha^2 + 2\alpha + 2\alpha + 1 = 4\alpha^2 + 4\alpha + 1$

iii) γ διότι $(\gamma - 2)^2 = (\gamma - 2)(\gamma - 2) = \gamma^2 - 2\gamma - 2\gamma + 4 = \gamma^2 - 4\gamma + 4$

Οι απαντήσεις μπορούν και να δοθούν με την ανάπτυξη της αντίστοιχης ταυτότητας.

Ερώτηση 3

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

α) $(x - \gamma)^2 = x^2 - 2x(-\gamma) + (-\gamma)^2$

β) $(-\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

γ) $(5\omega + 4)^2 = 25\omega^2 + 16$

δ) $(3x - \gamma)^2 = 3x^2 - 2 \cdot 3x \cdot \gamma + \gamma^2$

Απάντηση

α) Είναι **λάθος**, γιατί $x^2 - 2x(-\gamma) + (-\gamma)^2 = x^2 + 2x\gamma + \gamma^2 \neq (x - \gamma)^2$

β) Είναι **σωστό**, γιατί $(-\alpha + \beta)^2 = (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

γ) Είναι **λάθος**, γιατί $(5\omega + 4)^2 = 25\omega^2 + 40\omega + 16$

δ) Είναι **λάθος**, γιατί $(3x - \gamma)^2 = 9x^2 - 2 \cdot 3x \cdot \gamma + \gamma^2$

Ερώτηση 4

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

i) Το ανάπτυγμα του $(x + 1)^3$ είναι

α) $x^3 + 3 \cdot x \cdot 1 + 1^3$

β) $x^3 + 1^3$

γ) $x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 + 1^3$

δ) $x^3 + x^2 \cdot 1 + x \cdot 1^2 + 1^3$

ii) Το ανάπτυγμα του $(\beta - 2)^3$ είναι

α) $x^3 - 3 \cdot \beta \cdot 2 + 2^3$

β) $\beta^3 - 2^3$

γ) $\beta^3 - \beta^2 \cdot 2 + \beta \cdot 2^2 - 2^3$

δ) $\beta^3 - 3 \cdot \beta^2 \cdot 2 + 3 \cdot \beta \cdot 2^2 - 2^3$

Απάντηση

Υπολογίζουμε τα αναπτύγματα με βάση τη θεωρία και προκύπτει ότι:

i) γ (θεωρία $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$)

ii) δ (θεωρία $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$)

Ερώτηση 5

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

α) $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3$

β) $(2x + 3)^3 = 2x^3 + 3 \cdot 2x^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2x \cdot 3^2 + 3^3$

γ) $(3x - 1)^3 = (3x)^3 - 3 \cdot (3x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot (3x) \cdot 1^2 + 1^3$

δ) $(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Απάντηση

α) Είναι **λάθος**, γιατί $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

β) Είναι **λάθος**, γιατί $(2x+3)^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2x \cdot 3^2 + 3^3$

γ) Είναι **λάθος**, γιατί $(3x-1)^3 = (3x)^3 - 3 \cdot (3x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot (3x) \cdot 1^2 - 1^3$

δ) Είναι **σωστό**, διότι $(x+2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Ερώτηση 6

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

i) Το ανάπτυγμα του $(y-3)(y+3)$ είναι

α) y^2-3 β) $9-y^2$ γ) y^2-9 δ) $3-y^2$

ii) Το ανάπτυγμα του $(y+x)(x-y)$ είναι

α) y^2-x^2 β) x^2-y^2 γ) $(x-y)^2$ δ) x^2+y^2

iii) Το ανάπτυγμα του $(\omega-2\alpha)(\omega+2\alpha)$ είναι

α) $\omega^2-2\alpha^2$ β) $\omega^2+4\alpha^2$ γ) $4\alpha^2-\omega^2$ δ) $\omega^2-4\alpha^2$

iv) Το ανάπτυγμα του $(5-x)(5^2+5x+x^2)$ είναι

α) 5^3+x^3 β) x^3-5^3 γ) 5^3-x^3 δ) $25-x^3$

v) Το ανάπτυγμα του $(x+2\alpha)(x^2-2\alpha x+4\alpha^2)$ είναι

α) $x^3+2\alpha^3$ β) $x^3-(2\alpha)^3$ γ) $x^3-2\alpha^3$ δ) $x^3+8\alpha^3$

Απάντηση

i) γ Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά

ii) β Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά

iii) δ Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά

iv) γ Διαφορά κύβων

v) δ $x^3+8\alpha^3 = x^3+(2\alpha)^3$ Άθροισμα κύβων

Ερώτηση 7

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παράσταση της στήλης Α το ανάπτυγμά της από τη στήλη Β

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $(x + y)(y - x)$	1. $x^2 - 2xy + y^2$
β. $(x + y)^2$	2. $x^3 - y^3$
γ. $(y - x)^2$	3. $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
δ. $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$	4. $y^2 - x^2$
ε. $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$	5. $x^2 + 2xy + y^2$
στ. $(x - y)^3$	6. $x^2 - y^2$
	7. $x^3 + y^3$
	8. $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

α	β	γ	δ	ε	στ

Απάντηση

α. $(x + y)(y - x) = y^2 - x^2$ οπότε α - 4

β. $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ οπότε β - 5

γ. $(y - x)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ οπότε γ - 1

δ. $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$ οπότε δ - 2

ε. $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$ οπότε ε - 7

στ. $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ οπότε στ - 8

α	β	γ	δ	ε	στ
4	5	1	2	7	8

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να βρείτε τα αναπτύγματα

$$\begin{array}{llll} \alpha) (x+2)^2 & \beta) (y+5)^2 & \gamma) (2\omega+1)^2 & \delta) (\kappa+2\lambda)^2 \\ \epsilon) (3\gamma+2\beta)^2 & \sigma\tau) (x^2+1)^2 & \zeta) (y^2+y)^2 & \eta) (2x^2+3x)^2 \\ \theta) (x+\sqrt{2})^2 & \iota) (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 & \ια) \left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^2 & \ιβ) \left(\omega+\frac{4}{\omega}\right)^2 \end{array}$$

Λύση

Αναπτύσσουμε προσεκτικά σύμφωνα με τα θεωρητικά πρότυπα

Τετράγωνο αθροίσματος $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

$$\alpha) (x+2)^2 = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$\beta) (y+5)^2 = y^2 + 2 \cdot y \cdot 5 + 5^2 = y^2 + 10y + 25$$

$$\gamma) (2\omega+1)^2 = (2\omega)^2 + 2 \cdot 2\omega \cdot 1 + 1^2 = 4\omega^2 + 4\omega + 1$$

$$\delta) (\kappa+2\lambda)^2 = \kappa^2 + 2 \cdot \kappa \cdot 2\lambda + (2\lambda)^2 = \kappa^2 + 4\kappa\lambda + 4\lambda^2$$

$$\epsilon) (3\gamma+2\beta)^2 = (3\gamma)^2 + 2 \cdot 3\gamma \cdot 2\beta + (2\beta)^2 = 9\gamma^2 + 12\beta\gamma + 4\beta^2$$

$$\sigma\tau) (x^2+1)^2 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 1 + 1^2 = x^4 + 2x^2 + 1$$

$$\zeta) (y^2+y)^2 = (y^2)^2 + 2 \cdot y^2 \cdot y + y^2 = y^4 + 2y^3 + y^2$$

$$\eta) (2x^2+3x)^2 = (2x^2)^2 + 2(2x^2)(3x) + (3x)^2 = 4x^4 + 12x^3 + 9x^2$$

$$\theta) (x+\sqrt{2})^2 = x^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot x + (\sqrt{2})^2 = x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$$

$$\iota) (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2 = x + 2\sqrt{xy} + y$$

$$\text{ια)} \left(\alpha + \frac{1}{2} \right)^2 = \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{4}$$

$$\text{ιβ)} \left(\omega + \frac{4}{\omega} \right)^2 = \omega^2 + 2 \cdot \omega \cdot \frac{4}{\omega} + \left(\frac{4}{\omega} \right)^2 = \omega^2 + 8 + \frac{16}{\omega^2}$$

Άσκηση 2

Να βρείτε τα αναπτύγματα

$$\text{α)} (x - 3)^2 \quad \text{β)} (y - 5)^2 \quad \text{γ)} (3\omega - 1)^2 \quad \text{δ)} (2\kappa - \lambda)^2$$

$$\text{ε)} (3\gamma - 2\beta)^2 \quad \text{στ)} (x^2 - 2)^2 \quad \text{ζ)} (y^2 - y)^2 \quad \text{η)} (2x^2 - 5x)^2 \quad \text{θ)} (x - \sqrt{3})^2$$

$$\text{ι)} (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \quad \text{ια)} \left(\alpha - \frac{3}{2} \right)^2 \quad \text{ιβ)} \left(\omega - \frac{2}{\omega} \right)^2$$

Λύση

Αναπτύσσουμε προσεκτικά σύμφωνα με τα θεωρητικά πρότυπα

Τετράγωνο διαφοράς $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

$$\text{α)} (x - 3)^2 = x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$\text{β)} (y - 5)^2 = y^2 - 2 \cdot y \cdot 5 + 5^2 = y^2 - 10y + 25$$

$$\text{γ)} (3\omega - 1)^2 = (3\omega)^2 - 2 \cdot 3\omega \cdot 1 + 1^2 = 9\omega^2 - 6\omega + 1$$

$$\text{δ)} (2\kappa - \lambda)^2 = (2\kappa)^2 - 2 \cdot 2\kappa \cdot \lambda + \lambda^2 = 4\kappa^2 - 4\kappa\lambda + \lambda^2$$

$$\text{ε)} (3\gamma - 2\beta)^2 = (3\gamma)^2 - 2 \cdot 3\gamma \cdot 2\beta + (2\beta)^2 = 9\gamma^2 - 12\beta\gamma + 4\beta^2$$

$$\text{στ)} (x^2 - 2)^2 = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 2 + 2^2 = x^4 - 4x^2 + 4$$

$$\text{ζ)} (y^2 - y)^2 = (y^2)^2 - 2 \cdot y^2 \cdot y + y^2 = y^4 - 2y^3 + y^2$$

$$\text{η)} (2x^2 - 5x)^2 = (2x^2)^2 - 2(2x^2)(5x) + (5x)^2 = 4x^4 - 20x^3 + 25x^2$$

$$\theta) (x - \sqrt{3})^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$$

$$\iota) (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{xy} + y$$

$$\kappa\alpha) \left(\alpha - \frac{3}{2}\right)^2 = \alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \alpha^2 - 3\alpha + \frac{9}{4}$$

$$\kappa\beta) \left(\omega - \frac{2}{\omega}\right)^2 = \omega^2 - 2 \cdot \omega \cdot \frac{2}{\omega} + \left(\frac{2}{\omega}\right)^2 = \omega^2 - 4 + \frac{4}{\omega^2}$$

Άσκηση 3

Χρησιμοποιώντας την κατάλληλη ταυτότητα να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$$\alpha) (\sqrt{3}+1)^2 \quad \beta) (\sqrt{6}+\sqrt{5})^2 \quad \gamma) (\sqrt{2}-3)^2 \quad \delta) (1-\sqrt{7})^2$$

Λύση

Αναπτύσσουμε προσεκτικά σύμφωνα με τα θεωρητικά πρότυπα:

Τετράγωνο αθροίσματος $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

ή τετράγωνο διαφοράς $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

$$\alpha) (\sqrt{3}+1)^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} \cdot 1 + 1^2 = 3 + 2\sqrt{3} + 1 = 4 + 2\sqrt{3}$$

$$\beta) (\sqrt{6}+\sqrt{5})^2 = (\sqrt{6})^2 + 2\sqrt{6}\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 6 + 2\sqrt{30} + 5 = 11 + 2\sqrt{30}$$

$$\gamma) (\sqrt{2}-3)^2 = (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} \cdot 3 + 3^2 = 2 - 6\sqrt{2} + 9 = 11 - 6\sqrt{2}$$

$$\delta) (1-\sqrt{7})^2 = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{7} + (\sqrt{7})^2 = 1 - 2\sqrt{7} + 7 = 8 - 2\sqrt{7}$$

Άσκηση 4

Να συμπληρώσετε τις ισότητες

$$\alpha) (x \dots \dots)^2 = \dots + \dots + 9$$

$$\beta) (\dots \dots 4)^2 = y^2 - \dots \dots \dots$$

$$\gamma) (\dots - \dots)^2 = 16x^2 \dots 8x\alpha \dots \dots$$

$$\delta) (\dots \dots 2\omega)^2 = \dots - 4x^2\omega \dots \dots$$

Λύση

Τα κενά θα συμπληρωθούν με αριθμούς, μεταβλητές και σύμβολα + ή - ώστε να προκύπτουν σωστές ισότητες.

$$\alpha) (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$\beta) (y - 4)^2 = y^2 - 8y + 16$$

$$\gamma) (4x - \alpha)^2 = 16x^2 - 8x\alpha + \alpha^2$$

$$\delta) (x^2 - 2\omega)^2 = x^4 - 4x^2\omega + 4\omega^2$$

Άσκηση 5

Να βρείτε τα αναπτύγματα

$$\alpha) (x + 1)^3$$

$$\beta) (y + 4)^3$$

$$\gamma) (2\alpha + 1)^3$$

$$\delta) (3\alpha + 2\beta)^3$$

$$\epsilon) (x^2 + 3)^3$$

$$\sigma\tau) (y^2 + y)^3$$

$$\zeta) (x - 2)^3$$

$$\eta) (y - 5)^3$$

$$\theta) (3\alpha - 1)^3$$

$$\iota) (2x - 3y)^3$$

$$\iota\alpha) (y^2 - 2)^3$$

$$\iota\beta) (\omega^2 - 2\omega)^3$$

Λύση

Αναπτύσσουμε προσεκτικά σύμφωνα με τα θεωρητικά πρότυπα

αθροίσματος. $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ ή $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

διαφοράς κύβων

α) $(x + 1)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 + 1^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

β) $(y + 4)^3 = y^3 + 3 \cdot y^2 \cdot 4 + 3 \cdot y \cdot 4^2 + 4^3 = y^3 + 12y^2 + 48y + 64$

γ) $(2\alpha + 1)^3 = (2\alpha)^3 + 3 \cdot (2\alpha)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2\alpha \cdot 1^2 + 1^3 = 8\alpha^3 + 12\alpha^2 + 6\alpha + 1$

δ) $(3\alpha + 2\beta)^3 = (3\alpha)^3 + 3 \cdot (3\alpha)^2 \cdot (2\beta) + 3 \cdot 3\alpha \cdot (2\beta)^2 + (2\beta)^3 =$
 $= 27\alpha^3 + 54\alpha^2\beta + 36\alpha\beta^2 + 8\beta^3$

ε) $(x^2 + 3)^3 = (x^2)^3 + 3 \cdot (x^2)^2 \cdot 3 + 3 \cdot x^2 \cdot 3^2 + 3^3 = x^6 + 9x^4 + 27x^2 + 27$

στ) $(y^2 + y)^3 = (y^2)^3 + 3 \cdot (y^2)^2 \cdot y + 3 \cdot y^2 \cdot y^2 + y^3 = y^6 + 3y^5 + 3y^4 + y^3$

ζ) $(x - 2)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 - 2^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

η) $(y - 5)^3 = y^3 - 3 \cdot y^2 \cdot 5 + 3 \cdot y \cdot 5^2 - 5^3 = y^3 - 15y^2 + 75y - 125$

θ) $(3\alpha - 1)^3 = (3\alpha)^3 - 3 \cdot (3\alpha)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 3\alpha \cdot 1^2 - 1^3 = 27\alpha^3 - 27\alpha^2 + 9\alpha - 1$

ι) $(2x - 3y)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot (3y) + 3 \cdot 2x \cdot (3y)^2 - (3y)^3 =$
 $= 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$

ια) $(y^2 - 2)^3 = (y^2)^3 - 3 \cdot (y^2)^2 \cdot 2 + 3 \cdot y^2 \cdot 2^2 - 2^3 = y^6 - 6y^4 + 12y^2 - 8$

ιβ) $(\omega^2 - 2\omega)^3 = (\omega^2)^3 - 3 \cdot (\omega^2)^2 \cdot (2\omega) + 3 \cdot \omega^2 \cdot (2\omega)^2 - (2\omega)^3 =$
 $= \omega^6 - 6\omega^5 + 12\omega^4 - 8\omega^3$

Άσκηση 6

Να βρείτε τα αναπτύγματα

α) $(x-1)(x+1)$ β) $(y-2)(y+2)$ γ) $(3-\omega)(3+\omega)$

δ) $(x+4)(4-x)$ ε) $(x-y)(-x-y)$ στ) $(-x+y)(-x-y)$

ζ) $(2x+7y)(2x-7y)$ η) $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ θ) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$

Λύση

Αναπτύσσουμε προσεκτικά σύμφωνα με τα θεωρητικά πρότυπα :

Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$

$$\alpha) (x-1)(x+1) = x^2 - 1^2 = x^2 - 1$$

$$\beta) (y-2)(y+2) = y^2 - 2^2 = y^2 - 4$$

$$\gamma) (3-\omega)(3+\omega) = 3^2 - \omega^2 = 9 - \omega^2$$

$$\delta) (x+4)(4-x) = 4^2 - x^2 = 16 - x^2$$

$$\epsilon) (x-y)(-x-y) = -(x-y)(x+y) = -(x^2 - y^2) = y^2 - x^2$$

$$\sigma\tau) (-x+y)(-x-y) = (x-y)(x+y) = x^2 - y^2$$

$$\zeta) (2x+7y)(2x-7y) = (2x)^2 - (7y)^2 = 4x^2 - 49y^2$$

$$\eta) (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = x^2 - (\sqrt{2})^2 = x^2 - 2$$

$$\theta) (\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = x - y$$

Άσκηση 7

Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο

$$P(x) = (x-3)^2 + (3x+1)^2 - 10(x-1)(x+1) \text{ είναι σταθερό}$$

Λύση

Αρκεί να αποδείξω ότι έχει την ίδια τιμή για κάθε x .

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-3)^2 + (3x+1)^2 - 10(x-1)(x+1) = \\ &= x^2 - 6x + 9 + 9x^2 + 6x + 1 - 10(x^2 - 1) = \\ &= x^2 - 6x + 9 + 9x^2 + 6x + 1 - 10x^2 + 10 = 20 \text{ Άρα είναι σταθερό} \end{aligned}$$

Άσκηση 8

- α) Να αποδείξετε ότι $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^4 + \beta^4) = \alpha^8 - \beta^8$
 β) Να υπολογίσετε το γινόμενο $9 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 10001$

Λύση

α) $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^4 + \beta^4) = (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^4 + \beta^4) =$
 $= (\alpha^4 - \beta^4)(\alpha^4 + \beta^4) = \alpha^8 - \beta^8$

β) Το $9 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 10001$ γράφεται και $(10 - 1)(10 + 1)(100 + 1)(10000 + 1)$.

Για $\alpha = 10, \beta = 1$ από το α) προκύπτει ότι:

$$(10 - 1)(10 + 1)(100 + 1)(10000 + 1) = 10^8 - 1.$$

Άρα $9 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 10001 = 10^8 - 1$

Άσκηση 9

Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα που έχουν άρρητους παρονομαστές σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητούς παρονομαστές

α) $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$ β) $\frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ γ) $\frac{5}{3+\sqrt{2}}$ δ) $\frac{12}{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}$

Λύση

Πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με τη "συζυγή" παράσταση του παρονομαστή.

Παράσταση	Συζυγής παράσταση
$\sqrt{\alpha} + \beta$	$\sqrt{\alpha} - \beta$
$\alpha + \sqrt{\beta}$	$\alpha - \sqrt{\beta}$
$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$
$\kappa\sqrt{\alpha} + \lambda\sqrt{\beta}$	$\kappa\sqrt{\alpha} - \lambda\sqrt{\beta}$

Προφανώς ο πίνακας μπορεί να γραφεί και αντίστροφα.

$$\alpha) \frac{1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5})^2-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$\beta) \frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{6(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})} = \frac{6(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3} = \frac{6(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{4} = \frac{3(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{2}$$

$$\gamma) \frac{5}{3+\sqrt{2}} = \frac{5(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \frac{5(3-\sqrt{2})}{9-2} = \frac{5(3-\sqrt{2})}{7}$$

$$\delta) \frac{12}{2\sqrt{3}+\sqrt{6}} = \frac{12(2\sqrt{3}-\sqrt{6})}{(2\sqrt{3}+\sqrt{6})(2\sqrt{3}-\sqrt{6})} = \frac{12(2\sqrt{3}-\sqrt{6})}{4 \cdot 3 - 6} = \frac{12(2\sqrt{3}-\sqrt{6})}{6} =$$
$$= 4\sqrt{3} - 2\sqrt{6}$$

Άσκηση 10

Να βρείτε τα αναπτύγματα

$$\alpha) (x-3)(x^2+3x+9) \quad \beta) (y+2)(y^2-2y+4)$$

$$\gamma) (2\omega+1)(4\omega^2-2\omega+1) \quad \delta) (1-\alpha)(1+\alpha+\alpha^2)$$

Λύση

Αναπτύσσουμε προσεκτικά σύμφωνα με τα θεωρητικά πρότυπα

$$\text{Διαφορά κύβων } (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$$

$$\text{Άθροισμα κύβων } (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 + \beta^3$$

$$\alpha) (x-3)(x^2+3x+9) = x^3 - 3^3 = x^3 - 27$$

$$\beta) (y+2)(y^2-2y+4) = y^3 + 2^3 = y^3 + 8$$

$$\gamma) (2\omega+1)(4\omega^2-2\omega+1) = (2\omega)^3 + 1^3 = 8\omega^3 + 1$$

$$\delta) (1-\alpha)(1+\alpha+\alpha^2) = 1^3 - \alpha^3 = 1 - \alpha^3$$

Άσκηση 11

Να κάνετε τις πράξεις

$$\alpha) (x - 4)^2 + (2x + 5)^2$$

$$\beta) (x^2 - 1)^2 - (x^2 - 3)(x^2 + 3)$$

$$\gamma) (x + y)^2 - (x - 2y)(x + 2y) + (2x - y)^2 \quad \delta) (3x - 4)^2 + (3x + 4)^2 - 2(3x - 4)(3x + 4)$$

$$\epsilon) (2\alpha + 1)^3 + (2\alpha - 1)^3$$

$$\sigma\tau) (\alpha + 2)^3 - (\alpha + 2)(\alpha^2 - 2\alpha + 4)$$

$$\zeta) (\alpha^2 + \alpha)^3 - (\alpha^2 - \alpha)^3$$

$$\eta) (4\alpha - 1)^3 - \alpha(8\alpha + 1)(8\alpha - 1)$$

Λύση

Αναπτύσσουμε τις ταυτότητες και κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

$$\alpha) (x - 4)^2 + (2x + 5)^2 = x^2 - 8x + 16 + 4x^2 + 20x + 25 = 5x^2 + 12x + 41$$

$$\beta) (x^2 - 1)^2 - (x^2 - 3)(x^2 + 3) = x^4 - 2x^2 + 1 - (x^4 - 9) = x^4 - 2x^2 + 1 - x^4 + 9 = -2x^2 + 10$$

$$\begin{aligned} \gamma) (x + y)^2 - (x - 2y)(x + 2y) + (2x - y)^2 &= \\ &= x^2 + 2xy + y^2 - (x^2 - 4y^2) + 4x^2 - 4xy + y^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 4y^2 + 4x^2 - 4xy + y^2 = 4x^2 - 2xy + 6y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta) (3x - 4)^2 + (3x + 4)^2 - 2(3x - 4)(3x + 4) &= \\ &= 9x^2 - 24x + 16 + 9x^2 + 24x + 16 - 2(9x^2 - 16) = \\ &= 9x^2 - 24x + 16 + 9x^2 + 24x + 16 - 18x^2 + 32 = 64 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon) (2\alpha + 1)^3 + (2\alpha - 1)^3 &= (2\alpha)^3 + 3(2\alpha)^2 + 3 \cdot 2\alpha + 1 + (2\alpha)^3 - 3(2\alpha)^2 + 3 \cdot 2\alpha - 1 = \\ &= 8\alpha^3 + 6\alpha + 8\alpha^3 + 6\alpha = 16\alpha^3 + 12\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma\tau) (\alpha + 2)^3 - (\alpha + 2)(\alpha^2 - 2\alpha + 4) &= \alpha^3 + 3\alpha^2 \cdot 2 + 3\alpha \cdot 2^2 + 2^3 - (\alpha^3 + 2^3) = \\ &= \alpha^3 + 6\alpha^2 + 12\alpha + 8 - \alpha^3 - 8 = 6\alpha^2 + 12\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta) (\alpha^2 + \alpha)^3 - (\alpha^2 - \alpha)^3 &= (\alpha^2)^3 + 3\alpha^4 \cdot \alpha + 3\alpha^2 \cdot \alpha^2 + \alpha^3 - [(\alpha^2)^3 - 3\alpha^4 \cdot \alpha + 3\alpha^2 \cdot \alpha^2 - \alpha^3] = \\ &= \alpha^6 + 3\alpha^5 + 3\alpha^4 + \alpha^3 - \alpha^6 + 3\alpha^5 - 3\alpha^4 + \alpha^3 = 6\alpha^5 + 2\alpha^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta) (4\alpha - 1)^3 - 8(8\alpha + 1)(8\alpha - 1) &= (4\alpha)^3 - 3(4\alpha)^2 + 3(4\alpha) - 1 - \alpha(64\alpha^2 - 1) = \\ &= 64\alpha^3 - 48\alpha^2 + 12\alpha - 1 - 64\alpha^3 + \alpha = -48\alpha^2 + 13\alpha - 1\end{aligned}$$

Άσκηση 12

Να αποδείξετε ότι

$$\alpha) (x - 2y)^2 - (2x - y)^2 + 3x^2 = 3y^2$$

$$\beta) (\alpha - 3\beta)^2 + (3\alpha + 2\beta)(3\alpha - 2\beta) - (3\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + 4\beta^2$$

$$\gamma) (x - 1)(x + 1)^3 - 2x(x - 1)(x + 1) = x^4 - 1$$

$$\delta) (\alpha^2 + \beta^2)^2 - (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^2$$

$$\epsilon) (\alpha - 4)^2 + (2\alpha - 3)^2 = \alpha^2 + (2\alpha - 5)^2$$

$$\sigma\tau) (2x^2 + 2x)^2 + (2x + 1)^2 = (2x^2 + 2x + 1)^2$$

Λύση

Μέθοδος Α: Μπορούμε να κάνουμε πράξεις στο ένα μέλος της ισότητας και να καταλήξουμε στο άλλο. **(α,β,γ)**

Μέθοδος Β: Μπορούμε να κάνουμε πράξεις στο ένα μέλος της ισότητας και να καταλήξουμε σε κάποια σχέση που δεν μπορεί να γραφεί απλούστερα. Κάνουμε το ίδιο και στο άλλο μέλος και φτάνουμε στην ίδια παράσταση **(δ,ε)**

Μέθοδος Γ: Μπορούμε να κάνουμε πράξεις στα δύο μέλη της ισότητας και με ισοδυναμίες να καταλήξουμε σε ισότητα που προφανώς θα ισχύει **(στ)**

$$\begin{aligned}\alpha) (x-2y)^2 - (2x-y)^2 + 3x^2 &= x^2 - 4xy + 4y^2 - (4x^2 - 4xy + y^2) + 3x^2 = \\ &= x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x^2 + 4xy - y^2 + 3x^2 = 3y^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta) (\alpha-3\beta)^2 + (3\alpha+2\beta)(3\alpha-2\beta) - (3\alpha-\beta)^2 &= \\ &= \alpha^2 - 6\alpha\beta + 9\beta^2 + 9\alpha^2 - 4\beta^2 - (9\alpha^2 - 6\alpha\beta + \beta^2) = \\ &= \alpha^2 - 6\alpha\beta + 9\beta^2 + 9\alpha^2 - 4\beta^2 - 9\alpha^2 + 6\alpha\beta - \beta^2 = \alpha^2 + 4\beta^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma) (x-1)(x+1)^3 - 2x(x-1)(x+1) &= (x-1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 2x(x^2 - 1) = \\ &= x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x - x^3 - 3x^2 - 3x - 1 - 2x^3 + 2x = x^4 - 1\end{aligned}$$

$$\delta) (\alpha^2 + \beta^2)^2 - (2\alpha\beta)^2 = \alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 - 4\alpha^2\beta^2 = \alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4$$

$$(\alpha^2 - \beta^2)^2 = \alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4$$

$$\text{Άρα } (\alpha^2 + \beta^2)^2 - (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^2$$

$$\epsilon) (\alpha-4)^2 + (2\alpha-3)^2 = \alpha^2 - 8\alpha + 16 + 4\alpha^2 - 12\alpha + 9 = 5\alpha^2 - 20\alpha + 25$$

$$\alpha^2 + (2\alpha-5)^2 = \alpha^2 + 4\alpha^2 - 20\alpha + 25 = 5\alpha^2 - 20\alpha + 25$$

$$\text{Άρα } (\alpha-4)^2 + (2\alpha-3)^2 = \alpha^2 + (2\alpha-5)^2$$

στ) Στο δεύτερο μέλος αναπτύσσουμε σύμφωνα με την ταυτότητα

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha \quad (\text{εφαρμογής 1, σ. 45})$$

$$(2x^2 + 2x)^2 + (2x + 1)^2 = (2x^2 + 2x + 1)^2 \Leftrightarrow$$

$$4x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 4x^2 + 4x + 1 = 4x^4 + 4x^2 + 1 + 8x^3 + 4x^2 + 4x \Leftrightarrow$$

$$4x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x + 1 = 4x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x + 1$$

που προφανώς ισχύει.

Άσκηση 13

Αν $x = 3 + \sqrt{5}$ και $y = 3 - \sqrt{5}$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις

α) xy β) $x^2 - y^2$ γ) $x^2 + y^2$ δ) $x^3 + y^3$

Λύση

α) $xy = (3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5}) = 9 - 5 = 4$

β) $x^2 - y^2 = (3 + \sqrt{5})^2 - (3 - \sqrt{5})^2 = 9 + 6\sqrt{5} + 5 - (9 - 6\sqrt{5} + 5) =$
 $= 9 + 6\sqrt{5} + 5 - 9 + 6\sqrt{5} - 5 = 12\sqrt{5}$

γ) Σύμφωνα με την θεωρία ($\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$, εφαρμογή 2, σ.45)

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5})^2 - 2 \cdot 4 = 36 - 8 = 28$$

δ) Σύμφωνα με την θεωρία ($\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$ εφαρμογή 2, σ.45)

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = (3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5})^3 - 3 \cdot 4 \cdot (3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5}) =$$
$$= 216 - 72 = 144$$

Άσκηση 14

α) Να αποδείξετε ότι $\left(\alpha + \frac{5}{\alpha}\right)^2 - \left(\alpha - \frac{5}{\alpha}\right)^2 = 20$

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό $x = \left(2005 + \frac{1}{401}\right)^2 - \left(2005 - \frac{1}{401}\right)^2$

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha) \left(\alpha + \frac{5}{\alpha}\right)^2 - \left(\alpha - \frac{5}{\alpha}\right)^2 &= \alpha^2 + 10 + \frac{25}{\alpha^2} - \left(\alpha^2 - 10 + \frac{25}{\alpha^2}\right) = \\ &= \alpha^2 + 10 + \frac{25}{\alpha^2} - \alpha^2 + 10 - \frac{25}{\alpha^2} = 20 \end{aligned}$$

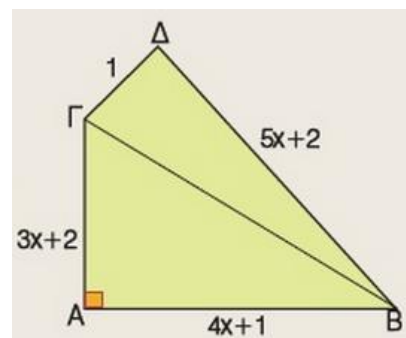
β) Επειδή η προηγούμενη ταυτότητα ισχύει για κάθε αριθμό α , θέτουμε όπου α το 2005 και θα ισχύει επίσης ότι:

$$\left(2005 + \frac{5}{2005}\right)^2 - \left(2005 - \frac{5}{2005}\right)^2 = 20$$

Άρα $\left(2005 + \frac{1}{401}\right)^2 - \left(2005 - \frac{1}{401}\right)^2 = 20$ άρα $x = 20$

Άσκηση 15

Αν το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο, να αποδείξετε ότι και το τρίγωνο BΓΔ είναι ορθογώνιο



Λύση

Το ΑΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο εφαρμόζουμε το

Πυθαγόρειο θεώρημα.

$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 =$$

$$= (4x + 1)^2 + (3x + 2)^2 = 16x^2 + 8x + 1 + 9x^2 + 12x + 4 = 25x^2 + 20x + 5$$

Ελέγχουμε την ορθότητα του ΒΓΔ

$$ΓΔ^2 = 1$$

$$ΒΔ^2 = (5x + 2)^2 = 25x^2 + 20x + 4$$

$$\text{Οπότε } ΓΔ^2 + ΒΔ^2 = 1 + 25x^2 + 20x + 4 =$$

$$= 25x^2 + 20x + 5 =$$

$$= ΒΓ^2$$

Άρα ΒΓΔ είναι επίσης ορθογώνιο..

Άσκηση 16

Σκεφτείτε δύο αριθμούς διαφορετικούς από το 0.

Βρείτε το τετράγωνο του αθροίσματός τους.

Βρείτε το τετράγωνο της διαφοράς τους.

Αφαιρέστε από το τετράγωνο του αθροίσματος το τετράγωνο της διαφοράς.

Διαιρέστε το τελικό αποτέλεσμα με το γινόμενο των αριθμών που αρχικά σκεφτήκατε.

Το αποτέλεσμα που βρήκατε είναι ο αριθμός 4 ανεξάρτητα από τους αριθμούς που σκεφτήκατε. Μπορείτε να το εξηγήσετε ;

Λύση

Έστω $\alpha, \beta \neq 0$

Τετράγωνο του αθροίσματός τους = $(\alpha + \beta)^2$

Τετράγωνο της διαφοράς τους = $(\alpha - \beta)^2$

Διαφορά = $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2$

$$\text{Διαιρούμε με το γινόμενο} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2}{\alpha\beta} = \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)}{\alpha\beta} =$$

$$\frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{4\alpha\beta}{\alpha\beta} = 4$$

Άρα το αποτέλεσμα είναι 4 ανεξαρτήτως των αριθμών που έχουμε επιλέξει.

Άσκηση 17

α) Να αποδείξετε ότι $\beta\gamma = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - (\beta - \gamma)^2}{2}$

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου που έχει υποτείνουσα 10cm και οι κάθετες πλευρές του διαφέρουν κατά 2cm

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha) \quad \frac{\beta^2 + \gamma^2 - (\beta - \gamma)^2}{2} &= \frac{\beta^2 + \gamma^2 - (\beta^2 - 2\beta\gamma + \gamma^2)}{2} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \beta^2 + 2\beta\gamma - \gamma^2}{2} = \\ &= \frac{2\beta\gamma}{2} = \beta\gamma \end{aligned}$$

β) Αν β και γ είναι οι κάθετες πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου τότε το

εμβαδόν του είναι $E = \frac{\beta\gamma}{2}$ και με βάση την προηγούμενη ταυτότητα $E =$

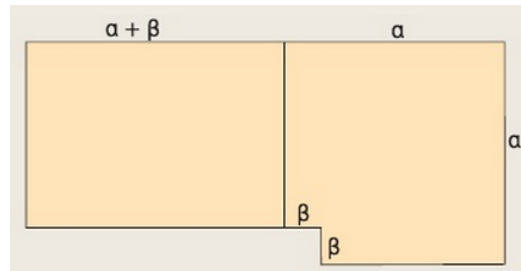
$$\frac{\beta^2 + \gamma^2 - (\beta - \gamma)^2}{4} \quad (1)$$

Το Πυθαγόρειο θεώρημα δίνει $\beta^2 + \gamma^2 = 10^2 = 100$

Η (1) δίνει $E = \frac{100 - 2^2}{4} = 24\text{cm}^2$.

Άσκηση 18

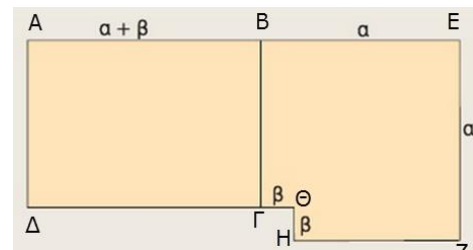
Ένας πατέρας μοίρασε ένα οικόπεδο στα δύο του παιδιά όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα δύο οικόπεδα είχαν το ίδιο εμβαδόν ή κάποιο παιδί αδικήθηκε ;



Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

Λύση

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ότι το οικόπεδο ΑΒΓΔ έχει διαστάσεις $AB = a + \beta$ και $BΓ = a - \beta$
Επομένως εμβαδόν $E = (a + \beta)(a - \beta) = a^2 - \beta^2$
Το οικόπεδο ΒΓΘΖΕ προκύπτει



αν από τετράγωνο πλευράς a αφαιρέσουμε τετράγωνο πλευράς β .

Επομένως το εμβαδόν E' του ΒΓΘΖΕ είναι $E' = a^2 - \beta^2$.

Άρα $E = (a + \beta)(a - \beta) = a^2 - \beta^2 = E'$ Τα δύο οικόπεδα έχουν το ίδιο εμβαδόν.

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσσης – ΜΕΔ - Μαθηματικός



...Πράξεις Παιδείας!