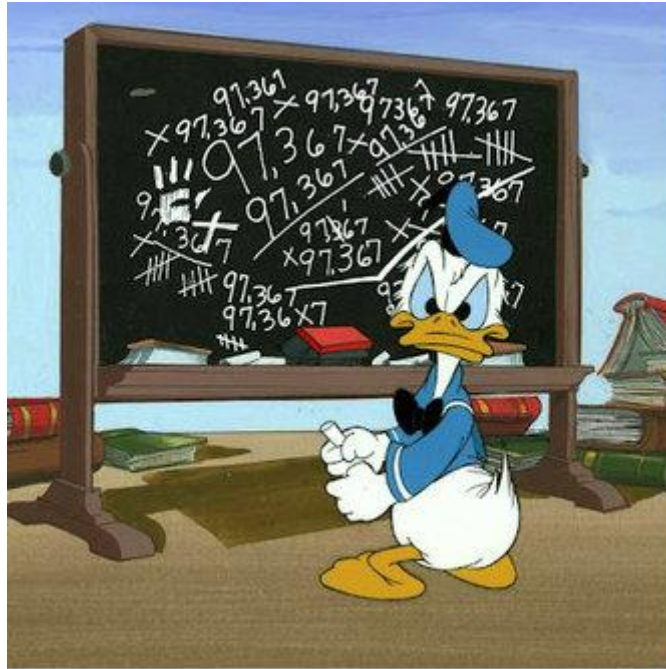


1. Αλγεβρικές Παραστάσεις



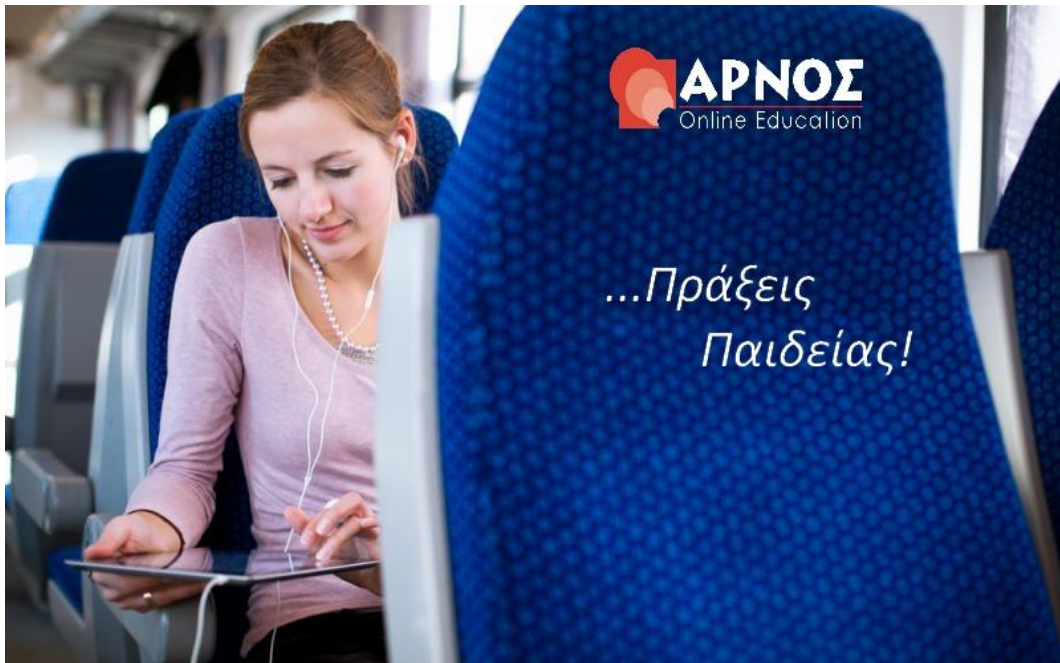
Λύσεις ασκήσεων Μαθηματικών Γ' Γυμνασίου

1.4 Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

σχ. βιβλίο (σσ. 41)

Φροντιστηριακό e-μάθημα

Γυμνάσιο: 9.000 μαθήματα με βίντεο-διδασκαλία για όλο το σχολικό έτος **μόνο με 150 ευρώ!**



Μελέτη όπου, όποτε και όσο εσύ θες!



Διδάσκουμε μεθοδικά σε βίντεο τη θεωρία του σχολικού βιβλίου και λύνουμε όλες τις ασκήσεις

Δημιουργούμε συνεχώς νέα βίντεο με διδασκαλία για τις εκπαιδευτικές σου απαιτήσεις



Παίζουμε και μαθαίνουμε με on line test αξιολόγησης & SOS διαγωνίσματα προσομοίωσης για τις εξετάσεις

Λύνουμε απορίες ζωντανά on line καθημερινά 3 μ.μ. - 8 μ.μ.



Λύσεις Ασκήσεων Μαθηματικών Γ' Γυμνασίου σχ. Βιβλίου (σ. 41)

1.4 Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

Ερωτήσεις κατανόησης

Ερώτηση 1

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παράσταση της στήλης Α το αποτέλεσμα της από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
	1. $x^2 - x$
α. $x(x + 1)$	2. $x^2 + 1$
β. $(x + 1)(x - 1)$	3. $x^2 - 2x + 1$
γ. $x(x - 1)$	4. $x^2 - 2x + 3$
δ. $(x + 1)(1 + x)$	5. $x^2 + x$
ε. $(x + 1)(x + 2)$	6. $x^2 + 3x + 2$
	7. $x^2 - 1$

α	β	γ	δ	ε

Απάντηση

Χρησιμοποιούμε την επιμεριστική ιδιότητα

$$\alpha. x(x + 1) = x^2 + x$$

$$\beta. (x + 1)(x - 1) = x^2 - x + x - 1 = x^2 - 1$$

γ. $x(x-1) = x^2 - x$

δ. $(x+1)(1+x) = x + x^2 + 1 + x = x^2 + 2x + 1$

ε. $(x+1)(x+2) = x^2 + 2x + x + 2 = x^2 + 3x + 2$

Ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής:

α	β	γ	δ	ε
5	7	1	3	6

Ερώτηση 2

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

- α) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει βαθμό 3 και το πολυώνυμο $Q(x)$ έχει βαθμό 2, τότε το πολυώνυμο $P(x) \cdot Q(x)$ έχει βαθμό 6.
- β) Αν το πολυώνυμο $P(x) \cdot Q(x)$ έχει βαθμό 7 και το πολυώνυμο $P(x)$ έχει βαθμό 3, τότε το πολυώνυμο $Q(x)$ έχει βαθμό 4.

Απάντηση

- α) Είναι **λάθος**, γιατί βαθμός του γινομένου δύο πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των δύο πολυωνύμων.
- β) Είναι **σωστό** για τον λόγο που προαναφέραμε

Ερώτηση 3

Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά

α) $x(2x + \dots) = \dots + 4x$

β) $3x^2(\dots - 2) = 3x^3 y - \dots$

γ) $(x+5)(\dots + 3) = 2x^2 + \dots + 10x + \dots$

δ) $(x^2 + y)(x - \dots) = \dots - x^2 y^2 + \dots - y^3$

Απάντηση

Με βάση την επιμεριστική ιδιότητα τα κενά πρέπει να συμπληρωθούν ως εξής:

α) $x(2x + 4) = 2x^2 + 4x$

β) $3x^2(xy - 2) = 3x^3y - 6x^2$

γ) $(x + 5)(2x + 3) = 2x^2 + 3x + 10x + 15$

δ) $(x^2 + y)(x - y^2) = x^3 - x^2y^2 + xy - y^3$

Ερώτηση 4

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

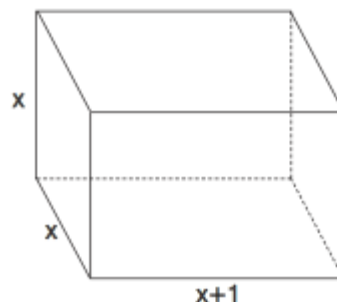
i) Ο όγκος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι

α) $3x + 1$ β) $x^3 + 1$ γ) $x^3 + x^2$ δ) $x^3 + x$

ii) Το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι

α) $6x^2 + 4x + 1$ β) $4x^2 + 6x$

γ) $6x^2 + 4x + 2$ δ) $6x^2 + 4x$



Απάντηση

i) Σωστό είναι το γ διότι ο όγκος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι:

$$V = x \cdot x \cdot (x + 1) = x^2(x + 1) = x^3 + x^2$$

ii) Σωστό είναι το δ διότι εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι:

$$E = 2x(x + 1) + 2x^2 + 2x(x + 1) = 2x^2 + 2x + 2x^2 + 2x^2 + 2x = 6x^2 + 4x$$

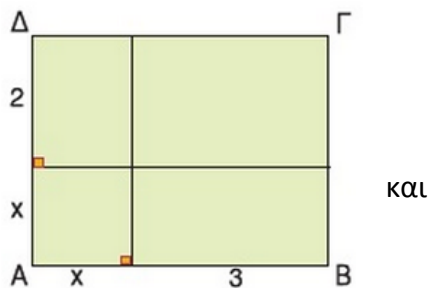
Ερώτηση 5

Ο καθηγητής των μαθηματικών ζήτησε από του μαθητές να γράψουν την αλγεβρική παράσταση που εκφράζει το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ οι μαθητές έδωσαν

τις εξής απαντήσεις

- α) $(x + 2)(x + 3)$ β) $2x \cdot 3x$
 γ) $x^2 + 6$ δ) $x^2 + 5x + 6$

Ποιές από αυτές είναι σωστές ;



Απάντηση

Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι το γινόμενο δυο κάθετων πλευρών του. Άρα έχουμε:

$AB = x + 3, AD = x + 2$, το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι

$$E = (x + 3)(x + 2) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$$

Επομένως σωστές είναι οι α και δ

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να κάνετε τις πράξεις

- α) $-3x^2\gamma(-5x + 2\gamma)$ β) $4x(2x^2 - x + 2) - 8x$
 γ) $-5x(2x - 3) - 3x(2 - 3x)$ δ) $2x\gamma(x^2 - 3\gamma^2) - 4x(x^2\gamma - 2\gamma^3)$

Λύση

$$\alpha) -3x^2y(-5x+2y) = 15x^3y - 6x^2y^2$$

$$\beta) 4x(2x^2-x+2) - 8x = 8x^3 - 4x^2 + 8x - 8x = 8x^3 - 4x^2$$

$$\gamma) -5x(2x-3) - 3x(2-3x) = -10x^2 + 15x - 6x + 9x^2 = -x^2 + 9x$$

$$\delta) 2xy(x^2-3y^2) - 4x(x^2y-2y^3) = 2x^3y - 6xy^3 - 4x^3y + 8xy^3 = -2x^3y + 2xy^3$$

Άσκηση 2

Να κάνετε τις πράξεις

$$\alpha) (2\alpha - 3\beta)(-4\alpha + 2\beta)$$

$$\beta) (x^2 - 2x + 4)(x + 2) - 8$$

$$\gamma) 3x^2(-2x + 3)(5 - x)$$

$$\delta) (4 - 3x)(5 - 2x) - 6x(x - 4)$$

$$\epsilon) (2x^2 - 3x - 4)(-3x^2 + x)$$

$$\sigma\tau) (3x^2 - 2xy - 5y^2)(4y - x)$$

Λύση

$$\alpha) (2\alpha - 3\beta)(-4\alpha + 2\beta) = -8\alpha^2 + 4\alpha\beta + 12\alpha\beta - 6\beta^2 = -8\alpha^2 + 16\alpha\beta - 6\beta^2$$

$$\beta) (x^2 - 2x + 4)(x + 2) - 8 = x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + 4x + 8 - 8 = x^3$$

$$\gamma) 3x^2(-2x + 3)(5 - x) = 3x^2(-10x + 2x^2 + 15 - 3x) = -30x^3 + 6x^4 + 45x^2 - 9x^3 \\ = 6x^4 - 39x^3 + 45x^2$$

$$\delta) (4 - 3x)(5 - 2x) - 6x(x - 4) = 20 - 8x - 15x + 6x^2 - 6x^2 + 24x = x + 20$$

$$\epsilon) (2x^2 - 3x - 4)(-3x^2 + x) = -6x^4 + 2x^3 + 9x^3 - 3x^2 + 12x^2 - 4x = \\ = -6x^4 + 11x^3 + 9x^2 - 4x$$

$$\sigma\tau) (3x^2 - 2xy - 5y^2)(4y - x) = 12x^2y - 3x^3 - 8xy^2 + 2x^2y - 20y^3 + 5xy^2 = \\ = 14x^2y - 3x^3 - 3xy^2 - 20y^3$$

Άσκηση 3

Να κάνετε τις πράξεις

$$\alpha) (3x-2)(x^2-x)(4x-3) \quad \beta) -2x(x^2-x+1)(x-2) - (x-1)(2x-3)(x+2)$$

$$\gamma) (-2x+y)(x^2-3xy) - (3x-y)(4x+y)(-2x-3y)$$

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha) (3x-2)(x^2-x)(4x-3) &= (3x^3-3x^2-2x^2+2x)(4x-3) = (3x^3-5x^2+2x)(4x-3) = \\ &= 12x^4-9x^3-20x^3+15x^2+8x^2-6x = 12x^4-29x^3+23x^2-6x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) -2x(x^2-x+1)(x-2) - (x-1)(2x-3)(x+2) &= \\ &= -2x(x^3-2x^2-x^2+2x+x-2) - (x-1)(2x^2+4x-3x-6) = \\ &= -2x(x^3-3x^2+3x-2) - (x-1)(2x^2+x-6) = \\ &= -2x^4+6x^3-6x^2+4x - (2x^3+x^2-6x-2x^2-x+6) = \\ &= -2x^4+6x^3-6x^2+4x-2x^3-x^2+6x+2x^2+x-6 = \\ &= -2x^4+4x^3-5x^2+11x-6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma) (-2x+y)(x^2-3xy) - (3x-y)(4x+y)(-2x-3y) &= \\ &= -2x^3+6x^2y+yx^2-3xy^2 - (3x-y)(-8x^2-12xy-2xy-3y^2) = \\ &= -2x^3+7x^2y-3xy^2 - (3x-y)(-8x^2-14xy-3y^2) = \\ &= -2x^3+7x^2y-3xy^2 - (-24x^3-42x^2y-9xy^2+8x^2y+14xy^2+3y^3) = \\ &= -2x^3+7x^2y-3xy^2+24x^3+42x^2y+9xy^2-8x^2y-14xy^2-3y^3 = \\ &= 22x^3+41x^2y-8xy^2-3y^3 \end{aligned}$$

Άσκηση 4

Να αποδείξετε τις ισότητες

$$\alpha) (x^2 - 4x + 4)(x^2 + 4x + 4) - x^2(x^2 - 8) - 16 = 0$$

$$\beta) (3\alpha + 8\beta)(\beta - \alpha) - (\alpha + 2\beta)(\beta - 3\alpha) = 6\beta^2$$

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha) (x^2 - 4x + 4)(x^2 + 4x + 4) - x^2(x^2 - 8) - 16 &= \\ = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 4x^3 - 16x^2 - 16x + 4x^2 + 16x + 16 - x^4 + 8x^2 - 16 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) (3\alpha + 8\beta)(\beta - \alpha) - (\alpha + 2\beta)(\beta - 3\alpha) &= \\ = 3\alpha\beta - 3\alpha^2 + 8\beta^2 - 8\alpha\beta - (\alpha\beta - 3\alpha^2 + 2\beta^2 - 6\alpha\beta) &= \\ = 3\alpha\beta - 3\alpha^2 + 8\beta^2 - 8\alpha\beta - \alpha\beta + 3\alpha^2 - 2\beta^2 + 6\alpha\beta &= 6\beta^2 \end{aligned}$$

Άσκηση 5

Αν $P(x) = -2x^2 + 5x - 3$ και $Q(x) = 4x - 5$, να βρείτε τα πολυώνυμα

$$\alpha) P(x) \cdot Q(x) \quad \beta) P(x) \cdot [-3Q(x) + 11x - 12] \quad \gamma) [P(x) - 2] \cdot [Q(x) + 3]$$

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha) P(x) \cdot Q(x) &= (-2x^2 + 5x - 3)(4x - 5) = -8x^3 + 10x^2 + 20x^2 - 25x - 12x + 15 = \\ &= -8x^3 + 30x^2 - 37x + 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) P(x) \cdot [-3Q(x) + 11x - 12] &= (-2x^2 + 5x - 3)[-3(4x - 5) + 11x - 12] = \\ &= (-2x^2 + 5x - 3)[-12x + 15 + 11x - 12] = \\ &= (-2x^2 + 5x - 3)(-x + 3) = 2x^3 - 6x^2 - 9 - 5x^2 + 15x + 3x = \\ &= 2x^3 - 11x^2 + 18x - 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma) [P(x) - 2] \cdot [Q(x) + 3] &= [-2x^2 + 5x - 3 - 2][4x - 5 + 3] = (-2x^2 + 5x - 5)(4x - 2) = \\ &= -8x^3 + 4x^2 + 20x^2 - 10x - 20x + 10 = -8x^3 + 24x^2 - 30x + 10 \end{aligned}$$

Άσκηση 6

Αν $P(x) = 3x(-2x + 4)(x - 1)$ και $Q(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.

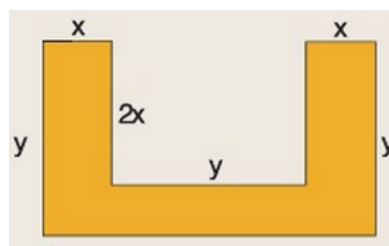
Λύση

$$P(x) = 3x(-2x + 4)(x - 1) = 3x(-2x^2 + 2x + 4x - 4) = 3x(-2x^2 + 6x - 4) = -6x^3 + 18x^2 - 12x$$

Τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα όταν $\alpha = -6, \beta = 18, \gamma = -12$ και $\delta = 0$.

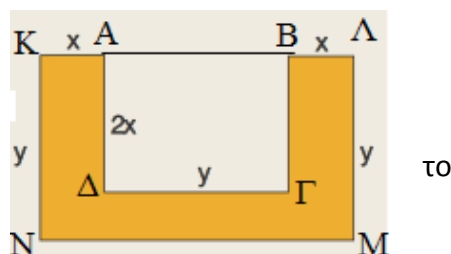
Άσκηση 7

Να βρείτε την πλευρά τετραγώνου που έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του διπλανού σχήματος



Λύση

Το εμβαδόν του σχήματος προκύπτει όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα αν από το εμβαδόν του ορθογώνιου ΚΛΜΝ αφαιρέσουμε εμβαδόν του ορθογώνιου ΑΒΓΔ



Όμως $AB = y, AD = 2x, ΚΛ = 2x + y$ και

$$KN = y$$

Άρα εμβαδόν ορθογώνιου ΚΛΜΝ:

$$(ΚΛΜΝ) = ΚΝ \cdot ΚΛ = y \cdot (2x + y) = y^2 + 2xy$$

Και εμβαδόν ορθογώνιου (ΑΒΓΔ):

$$(ΑΒΓΔ) = 2 \cdot x \cdot y$$

Οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = 2xy + y^2 - 2xy = y^2$.

Άσκηση 8

Ένα οικόπεδο έχει σχήμα ορθογωνίου με πλάτος x μέτρα και μήκος μεγαλύτερο από το πλάτος κατά 5 μέτρα. Αν το μήκος ελαττωθεί κατά 3 μέτρα και το πλάτος ελαττωθεί κατά 1 μέτρο, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου θα μειωθεί κατά $4x + 2$ τετραγωνικά μέτρα.

Λύση

Οι αρχικές διαστάσεις του ορθογωνίου είναι: x και $x + 5$.

Οπότε το αρχικό εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = x(x + 5) = x^2 + 5x$

Οι τελικές διαστάσεις του ορθογωνίου γίνονται $x - 1$ (αφού θα ελαττωθεί κατά 1 μέτρο) και $x + 5 - 3$ (αφού θα ελαττωθεί κατά 3 μέτρα) και θα γίνει $x + 2$ μέτρα.

Το εμβαδόν του ορθογωνίου τελικά θα είναι:

$$E' = (x - 1)(x + 2) = x^2 + 2x - x - 2 = x^2 + x - 2$$

Η διαφορά των εμβαδών είναι:

$$E - E' = x^2 + 5x - (x^2 + x - 2) = x^2 + 5x - x^2 - x + 2 = 4x + 2$$

Άρα το εμβαδόν του οικοπέδου θα μειωθεί κατά $4x + 2$ τετραγωνικά μέτρα.

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης – ΜΕΔ - Μαθηματικός



...Πράξεις Παιδείας!