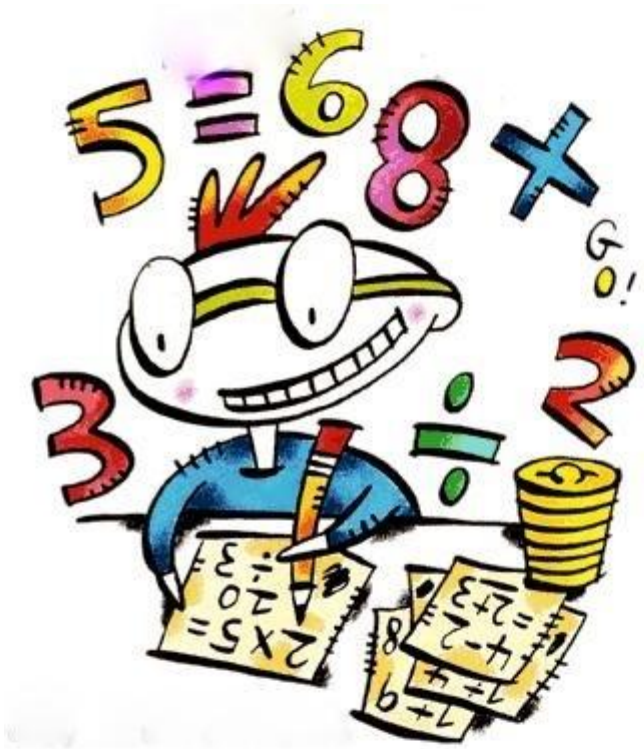
1. Αλγεβρικές Παραστάσεις



Λύσεις ασκήσεων Μαθηματικών Γ' Γυμνασίου

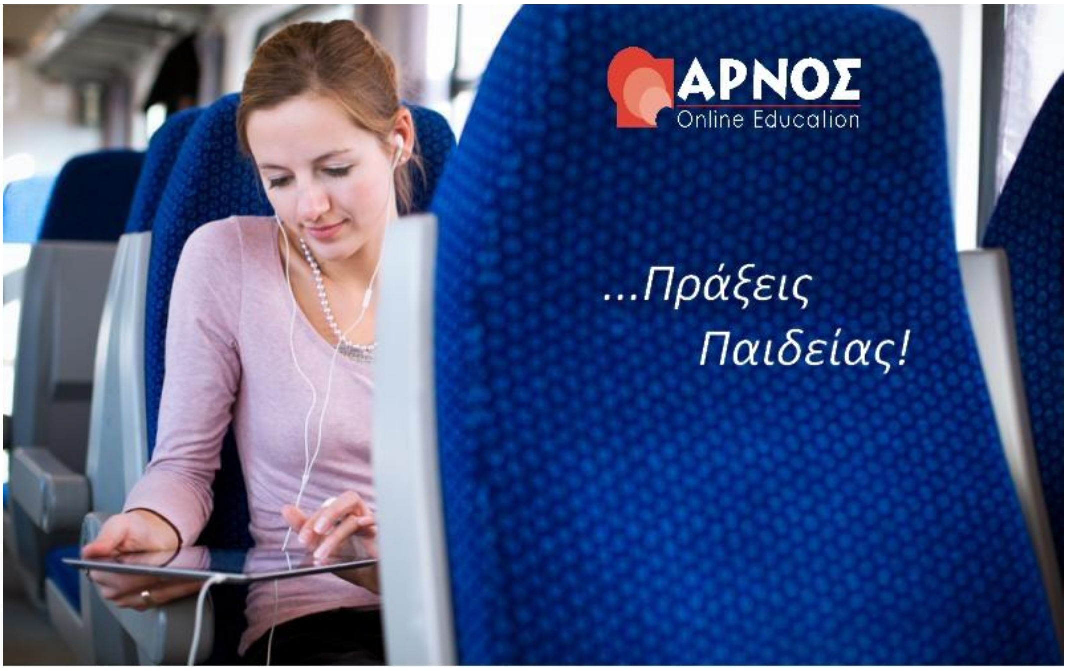
1.3 Πολυώνυμα– Πρόσθεση και αφαίρεση πολυωνύμων

σχ. βιβλίο (σσ. 36-37)

ΑΡΝΟΣ
Online Education

Φροντιστηριακό e-μάθημα

Γυμνάσιο: 9.000 μαθήματα με βίντεο-διδασκαλία
για όλο το σχολικό έτος μόνο με 150 ευρώ!



Μελέτη όπου, όποτε και όσο εσύ θες!

Διδάσκουμε μεθοδικά σε βίντεο τη θεωρία του σχολικού βιβλίου και λύνουμε όλες τις ασκήσεις

Δημιουργούμε συνεχώς νέα βίντεο με διδασκαλία για τις εκπαιδευτικές σου απαιτήσεις

Παίζουμε και μαθαίνουμε με on line test αξιολόγησης & SOS διαγωνίσματα προσομοίωσης για τις εξετάσεις

Λύνουμε απορίες ζωντανά on line καθημερινά 3 μ.μ. - 8 μ.μ.

Λύσεις Ασκήσεων Μαθηματικών Γ΄ Γυμνασίου σχ. βιβλίου (σσ. 36-37)

1.3 Πολυώνυμα – Πρόσθεση- Αφαίρεση πολυωνύμων

Ερωτήσεις κατανόησης

Ερώτηση 1

Ποιες από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι πολυώνυμα ;

α) $4x^3 - 5x^2 + 2x - \frac{1}{x}$ **β)** $3x^4 - 7x^2 - 12$

γ) $\sqrt{2}\, x^2y - 5xy + y^2 + \frac{1}{3}$ **δ)** $x^3 + 2x^2y - \sqrt{x}\, y^2 + 3y^3$

Απάντηση

Πολυώνυμο ονομάζουμε την αλγεβρική παράσταση που αποτελείται από αθροίσματα μη όμοιων μονωνύμων. Προσέξτε ότι τα $\frac{1}{x}$ και $\sqrt{x}$ δεν είναι μονώνυμα.

Πολυώνυμα είναι τα β, γ

Ερώτηση 2

Ποια από τα παρακάτω πολυώνυμα είναι $2^{ου}$ βαθμού ως προς x;

α) $7 - 3x - 2x^2$ **β)** $3x^2 - 5x - 3x^2 + 10$

γ) $4x^3 + x^2 - 3x^3 + 2x - x^3 + 6$ **δ)** $2xy - 3y + 9$

Απάντηση

Βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μία ή περισσότερες μεταβλητές του, είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του.

α) Είναι 2ου βαθμού γιατί το $-2x^2$ είναι ο μεγιστοβάθμιος όρος του

β) $3x^2 - 5x - 3x^2 + 10 = -5x + 10$ Απαλείφεται οι όροι με x^2 (δευτέρου βαθμού) και τελικά δεν είναι.

γ) $4x^3 + x^2 - 3x^3 + 2x - x^3 + 6 = x^2 + 2x + 6$ είναι 2ου βαθμού.

δ) Δεν είναι δευτέρου βαθμού ως προς x

Ερώτηση 3

Ένας μαθητής θέλοντας να υπολογίσει το άθροισμα και τη διαφορά των πολυωνύμων

$4x^3 - 8x^2 + x + 7$ και $x^3 - 6x + 2$ έγραψε

Άθροισμα

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 8x^2 + x + 7 \\ +\quad x^3 \qquad\quad - 6x + 2 \\ \hline 5x^3 - 8x^2 - 5x + 9 \end{array}$$

Διαφορά

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 8x^2 + x + 7 \\ +\ -x^3 \qquad\quad + 6x - 2 \\ \hline 3x^3 - 8x^2 + 7x + 5 \end{array}$$

Είναι σωστός ο τρόπος που εφάρμοσε ; Να τεκμηριώσετε την απάντηση σας.

Απάντηση

Ναι, διότι επιτρέπονται η πρόσθεση και η αφαίρεση όμοιων μεταβλητών ίδιου βαθμού για να απλοποιηθεί η παράσταση. Για τη διαφορά στους όρους του πρώτου προσθέτουμε τους αντίθετους του δεύτερου.

Ερώτηση 4

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Το πολυώνυμο που πρέπει να προσθέσουμε στο $2x^2+5x+7$ για να βρούμε άθροισμα $8x^2+4x-5$ είναι το

α) $6x^2+x-2$ β) $10x^2+9x+2$ γ) $6x^2-x-12$ δ) $-6x^2+x+12$

Απάντηση

Αν $f(x)$ είναι το πολυώνυμο που πρέπει να προσθέσουμε στο $2x^2+5x+7$ για να βρούμε άθροισμα $8x^2+4x-5$τότε πρέπει να ισχύει

$f(x)+2x^2+5x+7 = 8x^2+4x-5$ άρα

$f(x)=8x^2+4x-5-(2x^2+5x+7)$

$f(x)=8x^2+4x-5-2x^2-5x-7$

$f(x)= 6x^2-x-12$

Σωστή απάντηση είναι η γ

Ερώτηση 5

Τα πολυώνυμα $A(x)$, $B(x)$ και $\Gamma(x)$ έχουν βαθμούς 2 , 3 και 2 αντίστοιχα.

α) Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου $A(x)+B(x)$

β) Αν το πολυώνυμο $A(x)+\Gamma(x)$ δεν είναι το μηδενικό τι βαθμό μπορεί να έχει ;

Απάντηση

α) Επειδή το $B(x)$ είναι $3^{ου}$ βαθμού, το πολυώνυμο $A(x)+B(x)$ θα είναι επίσης $3^{ου}$ βαθμού αφού ο όρος του $B(x)$ που είναι $3^{ου}$ βαθμού δεν μπορεί να αναχθεί.

β) Το πολυώνυμο Α(x) + Γ(x) μπορεί να έχει μηδενικό, πρώτο ή δεύτερο βαθμό. Αυτό εξαρτάται από τους συντελεστές των αντίστοιχων όρων. Αν οι συντελεστές των όρων 2ου δεν είναι αντίθετοι το Α(x) + Γ(x) θα είναι 2ου βαθμού. Αν οι συντελεστές των όρων 2ου βαθμού είναι αντίθετοι το Α(x) + Γ(x) θα είναι 1ου ή μηδενικού βαθμού. Αν οι συντελεστές των όρων 2ου και 1ου βαθμού είναι αντίθετοι το Α(x) + Γ(x) μηδενικού βαθμού.

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να γράψετε τα πολυώνυμα κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x

α) $P(x) = 3x - 5x^2 + x^4 + 10 + 2x^3$ **β)** $Q(x) = -6x + 2x^3 + 1$

γ) $A(x) = -3x^2 + 7 + 2x^3 + 7x$ **δ)** $B(x) = x - x^4 - 5$

Λύση

Φθίνουσες δυνάμεις του x σημαίνει από τη μεγαλύτερη στη μικρότερη δύναμη του x.

Έτσι έχουμε:

α) $P(x) = 3x - 5x^2 + x^4 + 10 + 2x^3 = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 3x + 10$

β) $Q(x) = -6x + 2x^3 + 1 = 2x^3 - 6x + 1$

γ) $A(x) = -3x^2 + 7 + 2x^3 + 7x = 2x^3 - 3x^2 + 7x + 7$

δ) $B(x) = x - x^4 - 5 = -x^4 + x - 5$

Άσκηση 2

Δίνεται το πολυώνυμο $A = -2xy^2 + y^3 + 2x^3 - xy^2$

α) Να βρείτε την αριθμητική τιμή του για $x = 2$ και $y = -1$

β) Να γράψετε το πολυώνυμο κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του y. Ποιος είναι ο βαθμός του ως προς x και y ;

Λύση

α) Γράφουμε πιο απλά την παράσταση A κάνοντας αναγωγή ομοίων όρων.

$A = -2xy^2 + y^3 + 2x^3 - xy^2 = -3xy^2 + y^3 + 2x^3$

Θέτουμε όπου $x = 2$ και $y = -1$

Προσοχή: Γίνονται συχνά λάθη στους όρους που έχουν αρνητικό πρόσημο. Γι' αυτό χρησιμοποιούμε παρένθεση.

$A = -3\cdot2\cdot(-1)^2 + (-1)^3 + 2\cdot2^3 = -3\cdot2\cdot1 + (-1) + 2\cdot8 = -6 - 1 + 16 = 9$

β) Φθίνουσες δυνάμεις του y σημαίνει από τη μεγαλύτερη στη μικρότερη δύναμη του y.

$A = y^3 - 3xy^2 + 2x^3$ και είναι 3ου βαθμού ως προς x και y λόγω του όρου: $-3xy^2$

Άσκηση 3

Αν $P(x) = 2x^2 + 2x - 9$, να αποδείξετε ότι

α) $P(-3) = P(2)$ **β)** $3P(1) + P(3) = 0$

Λύση

α) Αντικαθιστούμε το x με τους ακέραιους.

$P(-3) = 2(-3)^2 + 2(-3) - 9 = 2{\cdot}9 + 2(-3) - 9 = 18 - 6 - 9 = 3$

$P(2) = 2{\cdot}2^2 + 2{\cdot}2 - 9 = 2{\cdot}4 + 2{\cdot}2 - 9 = 8 + 4 - 9 = 3$

Άρα $P(-3) = P(2)$

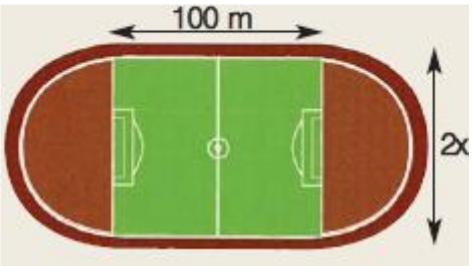
β) Βρίσκουμε τα P(1) και P(3) και τα αντικαθιστούμε στην παράσταση 3P(1) +P(3)

$P(1) = 2{\cdot}1^2 + 2{\cdot}1 - 9 = 2{\cdot}1 + 2{\cdot}1 - 9 = 2 + 2 - 9 = -5$

$P(3) = 2{\cdot}3^2 + 2{\cdot}3 - 9 = 2{\cdot}9 + 2{\cdot}3 - 9 = 18 + 6 - 9 = 15$

Οπότε $3P(1) + P(3) = 3(-5) + 15 = -15 + 15 = 0$

Άσκηση 4



Η επιφάνεια ενός σταδίου αποτελείται από δύο ημικυκλικούς δίσκους και ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που έχει μήκος 100 μέτρα και πλάτος 2x μέτρα

α) Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του, αν το πλάτος είναι ίσο με 60 μέτρα.

Λύση

α) Το στάδιο αποτελείται από ένα ορθογώνιο με μήκος 100 μέτρα και δύο ημικυκλικούς δίσκους ακτίνας x. Εδώ θα πρέπει να θυμηθούμε ότι το μήκος L της περιφέρειας του κύκλου δίνεται από τη σχέση L = 2πx και το εμβαδόν Ε του κυκλικού δίσκου από τη σχέση $Ε = π\cdot x^2$

Η περίμετρος Π του σταδίου είναι

$Π = 2\cdot 100 + 2πx = 200 + 2πx$, με π = 3,14..

και το εμβαδόν Εσ = εμβ. ορθογωνίου +εμβ. των 2 ημικυκλικών δίσκων

Όμως Εημικ.δισκ.$=\frac{\pi x^2}{2}$ Άρα 2Εημικ.δισκ. $= \pi x^2$

Οπότε $Εσ = 2x\cdot 100 + πx^2 = 200x + πx^2$

β) Αν το πλάτος είναι ίσο με 60 μέτρα τότε 2x = 60 άρα x = 30

$Π = 200 + 2π\cdot 30 = 200 + 60π \simeq 200 + 188{,}5 = 388{,}5$ μέτρα

και $E = 200\cdot 30 + π\cdot 30^2 = 6000 + 900π \simeq 6000 + 2827{,}43 = 8827{,}43$ τετρ. μέτρα

Άσκηση 5

Να κάνετε τις πράξεις

α) $(2x^2 - x) - (x^3 - 5x^2 + x - 1)$ **β)** $-3x^2y - (2xy - yx^2) + (3xy - y^3)$

γ) $(2α^2 - 3αβ) - (β^2 + 4αβ) - (α^2 + β^2)$ **δ)** $2ω^2 - [4ω - 3 - (ω^2 + 5ω)]$

ε) $\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + 1\right) - \left(\frac{1}{6}x + x^2 - \frac{1}{3}\right)$ **στ)** $(0{,}4x^3 + 2{,}3 x^2)(+ (3{,}6 x^3 - 0{,}3x^2 + 4)$

Λύση

α) $(2x^2-x)-(x^3-5x^2+x-1) = 2x^2-x-x^3+5x^2-x+1 = -x^3+7x^2-2x+1$

β) $-3x^2y-(2xy-yx^2)+(3xy-y^3) = -3x^2y-2xy+yx^2+3xy-y^3 =$

$= -2x^2y+xy-y^3$

γ) $(2\alpha^2-3\alpha\beta)-(\beta^2+4\alpha\beta)-(\alpha^2+\beta^2) = 2\alpha^2-3\alpha\beta-\beta^2-4\alpha\beta-\alpha^2-\beta^2 =$

$= \alpha^2-7\alpha\beta-2\beta^2$

δ) $2\omega^2-[4\omega-3-(\omega^2+5\omega)] = 2\omega^2-[4\omega-3-\omega^2-5\omega] =$

$= 2\omega^2-4\omega+3+\omega^2+5\omega = 3\omega^2+\omega+3$

ε) $\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+1\right)-\left(\frac{1}{6}x+x^2-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+1-\frac{1}{6}x-x^2+\frac{1}{3} =$

$= \frac{1}{2}x^2-x^2-\frac{9}{12}x-\frac{2}{12}x+\frac{3}{3}+\frac{1}{3} = -\frac{1}{2}x^2-\frac{11}{12}x+\frac{4}{3}$

στ) $(0{,}4x^3+2{,}3x^2)+(3{,}6x^3-0{,}3x^2+4) = 0{,}4x^3+2{,}3x^2+3{,}6x^3-0{,}3x^2+4 =$

$= 4x^3+2x^2+4$

Άσκηση 6

Αν $A(x) = 2x^3-x^2+x-4$, $B(x) = -3x^3+5x-2$ και $\Gamma(x) = 4x^2-3x+8$,

να βρείτε τα πολυώνυμα

α) $A(x)-B(x)$ **β)** $A(x)+\Gamma(x)$ **γ)** $\Gamma(x)-[A(x)+B(x)]$

Λύση

α) $A(x) - B(x) = (2x^3 - x^2 + x - 4) - (-3x^3 + 5x - 2) =$

$= 2x^3 - x^2 + x - 4 + 3x^3 - 5x + 2 = 5x^3 - x^2 - 4x - 2$

β) $A(x) + Γ(x) = (2x^3 - x^2 + x - 4) + (4x^2 - 3x + 8) =$

$= 2x^3 - x^2 + x - 4 + 4x^2 - 3x + 8 = 2x^3 + 3x^2 - 2x + 4$

γ) $Γ(x) - [A(x) + B(x)] = (4x^2 - 3x + 8) - [(2x^3 - x^2 + x - 4) + (-3x^3 + 5x - 2)] =$

$= 4x^2 - 3x + 8 - [2x^3 - x^2 + x - 4 - 3x^3 + 5x - 2] =$

$= 4x^2 - 3x + 8 - 2x^3 + x^2 - x + 4 + 3x^3 - 5x + 2 = x^3 + 5x^2 - 9x + 14$

Άσκηση 7

Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες

α) $(\cdots \ldots - 4x \cdots \ldots) + (x^2 \cdots \ldots + 4) = -6x^2 - 8x + 7$

β) $(-x^3 \cdots \ldots + 8) - (\cdots \ldots + x^2 \cdots \ldots) = x^3 - x^2 + 5x + 9$

Λύση

Προσέχουμε να συμπληρώνουμε τους όρους που λείπουν με τα πρόσημα τους ώστε μετά τις αναγωγές των ομοίων όρων να συμφωνούν τα αποτελέσματα.

α) $(-7x^2 - 4x + 3) + (x^2 - 4x + 4) = -6x^2 - 8x + 7$

β) $(-x^3 + 5x. + 8) - (-2x^3 + x^2 - 1) = x^3 - x^2 + 5x + 9$

Άσκηση 8

Να συμπληρώσετε το παρακάτω τετράγωνο ώστε να είναι μαγικό

(τα τρία πολυώνυμα οριζοντίως ,καθέτως και διαγωνίως να έχουν το ίδιο άθροισμα)

$2x^2+2x-3$	$7x^2+3x-4$	
$9x^2-3x+2$		
$4x^2+4x-5$		

Λύση

Μας καθοδηγεί το άθροισμα των πολυωνύμων της $1^{ης}$ στήλης

$(2x^2 + 2x - 3) + (9x^2 - 3x + 2) + (4x^2 + 4x - 5)$

$= 2x^2 + 2x - 3 + 9x^2 - 3x + 2 + 4x^2 + 4x - 5 = 15x^2 + 3x - 6$

Σε κάθε γραμμή, στήλη και διαγώνιο τα πολυώνυμα πρέπει να δίνουν άθροισμα $15x^2 + 3x - 6$

Σημειώνουμε στον πίνακα με A(x) Q(x) P(x) F(x) και N(x) τα πολυώνυμα που ψάχνουμε.

$2x^2 + 2x - 3$	$7x^2 + 3x - 4$	A(x)
$9x^2 - 3x + 2$	Q(x)	P(x)
$4x^2 + 4x - 5$	F(x)	N(x)

Αν A(x) είναι το πολυώνυμο που λείπει στην $1^η$ γραμμή θα πρέπει:

$(2x^2 + 2x - 3) + (7x^2 + 3x - 4) + A(x) = 15x^2 + 3x - 6$

$A(x) = 15x^2 + 3x - 6 - (2x^2 + 2x - 3) - (7x^2 + 3x - 4)$

$A(x) = 15x^2 + 3x - 6 - 2x^2 - 2x + 3 - 7x^2 - 3x + 4$

$A(x) = 6x^2 - 2x + 1$

Για το Q(x) το μεσαίο πολυώνυμο που λείπει στην $2^η$ γραμμή.

Τότε πρέπει $A(x) + Q(x) + (4x^2 + 4x - 5) = 15x^2 + 3x - 6$ άρα

$Q(x) = 15x^2 + 3x - 6 - A(x) - (4x^2 + 4x - 5)$ από όπου

βρίσκουμε $Q(x) = 5x^2 + x - 2$

Ομοίως δουλεύοντας βρίσκουμε τα P(x), F(x) και N(x)

$P(x) = 15x^2 + 3x - 6 - Q(x) - (9x^2 - 3x + 2) = x^2 + 5x - 6$

$F(x) = 15x^2 + 3x - 6 - Q(x) - (7x^2 + 3x - 4) = 3x^2 - x$

$N(x) = 15x^2 + 3x - 6 - A(x) - P(x) = 8x^2 - 1$

Το μαγικό τετράγωνο συμπληρωμένο είναι:

$2x^2+2x-3$	$7x^2+3x-4$	$6x^2-2x+1$
$9x^2-3x+2$	$5x^2+x-2$	x^2+5x-6
$4x^2+4x-5$	$3x^2-x$	$8x^2-1$

Άσκηση 9

Αν $P(x) = (-5x^2 + 4x - 3) - (x^2 - 2x + 1) + (3x^2 + x)$ και $Q(x) = αx^2 + βx + γ$,

να βρείτε τις τιμές των α , β , γ ώστε τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) να είναι ίσα.

Λύση

Πρέπει οι συντελεστές και τα επιμέρους μονώνυμα να είναι ίσα. Γι’ αυτό αρχικά θα γράψουμε το στην τυπική μορφή.

$P(x) = (-5x^2 + 4x - 3) - (x^2 - 2x + 1) + (3x^2 + x) =$

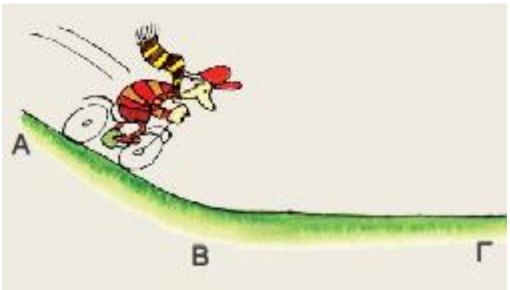
$= -5x^2 + 4x - 3 - x^2 + 2x - 1 + 3x^2 + x = -3x^2 + 7x - 4$

Για να είναι τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) να ίσα, θα πρέπει

$\alpha = -3$ και $\beta = 7$ και $\gamma = -4$

Άσκηση 10

Ένας ποδηλάτης ξεκινάει από το σημείο Α και σε χρόνο t sec κατεβαίνει το δρόμο ΑΒ με επιτάχυνση $\alpha = 2$ m/sec^2 .



Όταν φτάσει στο σημείο Β συνεχίζει να κινείται στον δρόμο ΒΓ για 10 sec με σταθερή ταχύτητα. Να βρείτε την παράσταση που εκφράζει την απόσταση που διάνυσε ο ποδηλάτης.

Ποια απόσταση διάνυσε ο ποδηλάτης αν t = 5 sec ;

Λύση

Στο τμήμα ΑΒ η κίνηση είναι επιταχυνόμενη. Στην ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση **α** και αρχική ταχύτητα υ = 0 ο τύπος που δίνει την απόσταση **s** ως συνάρτηση του χρόνου **t** (όπου είναι ο χρόνος που αρχίζει να μετρά από τη στιγμή που αρχίζει η επιταχυνόμενη κίνηση) είναι:

$\mathbf{s} = \frac{1}{2}\alpha t^2$.   Άρα $AB = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2}\cdot 2t^2 = t^2$.

Ακόμη στην ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση **α** και αρχική ταχύτητα υ = 0 ο τύπος που δίνει την ταχύτητα υ απόσταση **s** ως συνάρτηση του χρόνου **t** είναι: υ = αt . Άρα στο σημείο Β ο ποδηλάτης έχει ταχύτητα υ = αt = 2t.

Στο τμήμα ΒΓ η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή. Στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ο τύπος που δίνει την απόσταση **s** ως συνάρτηση του χρόνου **t** (όπου εδώ είναι ο χρόνος που αρχίζει να μετρά από τη στιγμή που αρχίζει η ευθύγραμμη ομαλή κίνηση) είναι:

s = υt

Επειδή στο σημείο Β ο ποδηλάτης έχει ταχύτητα υ = 2t (όπου είναι το χρονικό διάστημα που διήρκεσε η επιταχυνόμενη κίνηση μετρημένο σε sec)

Άρα ΒΓ **=**2t ·10= 20t

Συνεπώς η απόσταση ΑΒΓ δίνεται από την παράσταση $\mathbf{s_{ολ}} = t^2 + 20t$ (όπου είναι το χρονικό διάστημα που διήρκεσε η επιταχυνόμενη κίνηση)

Για t = 5 sec, τότε $\mathbf{s_{ολ}} = 5^2 + 20 \cdot 5 = 25 + 100 = 125$ m

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης – MED - Μαθηματικός

ΑΡΝΟΣ
Online Education

…Πράξεις Παιδείας!