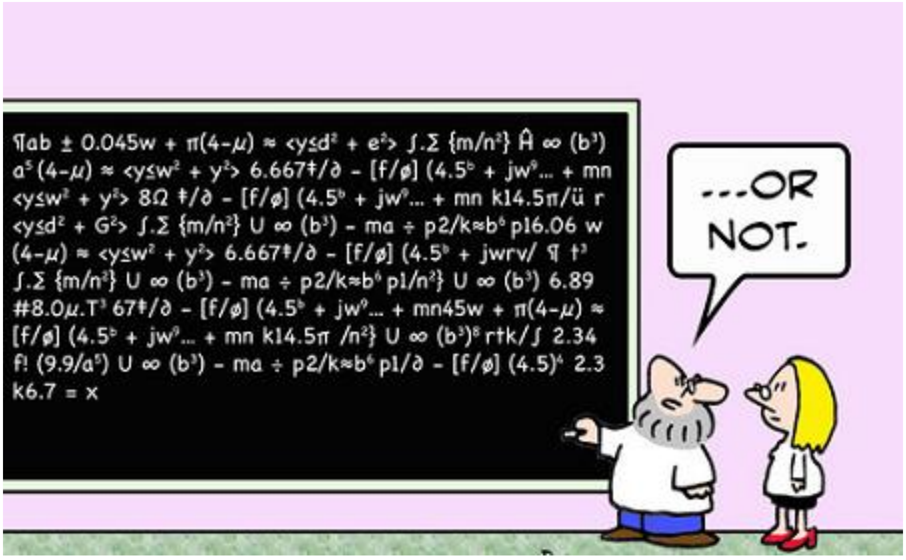
3. Συστήματα γραμμικών εξισώσεων



Λύσεις ασκήσεων Μαθηματικών Γ' Γυμνασίου

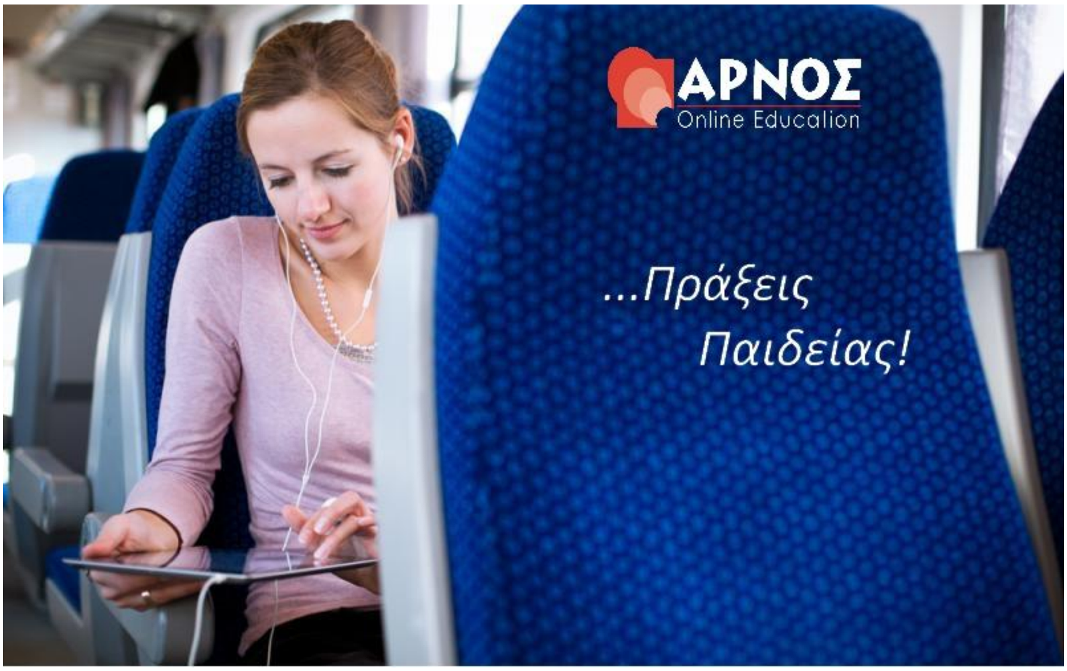
3.3 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

σχ. βιβλίο (σσ. 136-139)

ΑΡΝΟΣ
Online Education

Φροντιστηριακό e-μάθημα

Γυμνάσιο: 9.000 μαθήματα με βίντεο-διδασκαλία
για όλο το σχολικό έτος μόνο με 150 ευρώ!



Μελέτη όπου, όποτε και όσο εσύ θες!

Διδάσκουμε μεθοδικά σε βίντεο τη θεωρία του σχολικού βιβλίου και λύνουμε όλες τις ασκήσεις

Δημιουργούμε συνεχώς νέα βίντεο με διδασκαλία για τις εκπαιδευτικές σου απαιτήσεις

Παίζουμε και μαθαίνουμε με on line test αξιολόγησης & SOS διαγωνίσματα προσομοίωσης για τις εξετάσεις

Λύνουμε απορίες ζωντανά on line καθημερινά 3 μ.μ. - 8 μ.μ.

Λύσεις Ασκήσεων Μαθηματικών Γ΄ Γυμνασίου σχ. βιβλίου (σσ. 136-139)

3.3 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

Ερωτήσεις κατανόησης

Ερώτηση 1

Να βρείτε ποιο από τα παρακάτω ζεύγη είναι λύση του συστήματος $\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=4 \end{cases}$

α) (2, 4) β) (7 , −1) γ) (6, 2) δ) (5, 1)

Απάντηση

$x + y = 6 \Leftrightarrow x = 6 - y$ (1)

$x - y = 4 \Leftrightarrow x = 4 + y$ (2)

Οπότε (1), (2) => $6 - y = 4 + y \Leftrightarrow 2y = 2 \Leftrightarrow y = 1$

Άρα $x = 6 - 1 = 5$. Οπότε η σωστή απάντηση είναι η δ.

Ερώτηση 2

Για την επίλυση του συστήματος $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 2x+y=7 \end{cases}$ με την μέθοδο της αντικατάστασης

είναι προτιμότερο να λύσουμε

α) την πρώτη εξίσωση ως προς x β) την πρώτη εξίσωση ως προς y

γ) την δεύτερη εξίσωση ως προς x δ) την δεύτερη εξίσωση ως προς y

Απάντηση

Η σωστή απάντηση είναι η δ διότι το y στη δεύτερη εξίσωση είναι μόνο του (ο συντελεστής του y σε αυτήν είναι 1) και συνεπώς μπορούμε να αντικαταστήσουμε το y στην πρώτη εξίσωση με το y = 7 – 2x

Ερώτηση 3

Αν στο σύστημα $\begin{cases} 3x+5y=-1 \\ 2x-5y=-9 \end{cases}$ εφαρμόσουμε την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών, ποια από τις παρακάτω εξισώσεις προκύπτει

α) 3x = – 1 β) 2x = – 9 γ) 5x = – 10 δ) 5x = 10

Απάντηση

Προσθέτουμε κατά μέλη την πρώτη με την δεύτερη εξίσωση και προκύπτει ότι 5x = – 10. Άρα η σωστή λύση είναι η γ

Ερώτηση 4

Με ποιους αριθμούς πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τα μέλη κάθε εξίσωσης για να προκύψουν αντίθετοι συντελεστές στον άγνωστο y σε κάθε σύστημα ;

α) $\begin{cases} 5x+4y=9 \\ -3x+2y=1 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 4x-3y=1 \\ 2x+5y=4 \end{cases}$

Απάντηση

α) Πρέπει να πολλαπλασιάσουμε την δεύτερη εξίσωση με - 2

$$\begin{cases} 5x+4y=9 & |\cdot 1 \\ -3x+2y=1 & |\cdot(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+4y=9 \\ 6x-4y=-2 \end{cases}$$

β) Πρέπει να πολλαπλασιάσουμε την πρώτη εξίσωση με 5 και την δεύτερη με 3.

$$\begin{cases} 4x - 3y = 1 & |\cdot 5 \\ 2x + 5y = 4 & |\cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20x - 15y = 1 \\ 6x + 15y = 12 \end{cases}$$

Ερώτηση 5

Με ποια μέθοδο είναι προτιμότερο να λύσουμε καθένα από τα παρακάτω συστήματα

α) $\begin{cases} 7x + 4y = 8 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 2x + 5y = 7 \\ 5x - 5y = 18 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = -5x + 8 \end{cases}$ **δ)** $\begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$

Απάντηση

α) Με την μέθοδο της αντικατάστασης, διότι η δεύτερη εξίσωση δίνει το y ως προς x.

β) Με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών , διότι απαλείφεται το y όταν προσθέσουμε τις δυο εξισώσεις.

γ) Με την μέθοδο της αντικατάστασης, διότι το πρώτο μέλος και των δύο είναι το y.

δ) Με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών, πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση με 2 και την δεύτερη με 3.

Ερώτηση 6

Σε καθένα από τα παρακάτω συστήματα

$(\Sigma_1): \begin{cases} -2x+y=5 \\ 2x-y=3 \end{cases}$ $(\Sigma_2): \begin{cases} 5x-7y=-4 \\ -5x+7y=4 \end{cases}$

αν εφαρμόσουμε την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών , τότε απαλείφονται και οι δύο άγνωστοι. Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για καθένα από τα συστήματα ;

Απάντηση

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις εξισώσεις του πρώτου συστήματος προκύπτει ότι 5 = 3 το οποίο είναι αδύνατο.

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις εξισώσεις του πρώτου συστήματος προκύπτει ότι 0 = 0 το οποίο είναι ταυτότητα για κάθε x, y, άρα το σύστημα είναι αόριστο.

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να λύσετε τα συστήματα

α) $\begin{cases} x-2y=1 \\ y=4 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} x+3y=-2 \\ 2x+y=0 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} 4x-y=10 \\ x+3y=9 \end{cases}$ **δ)** $\begin{cases} 3x+y=-4 \\ x+2y=-3 \end{cases}$

Λύση

α) Με την μέθοδο της αντικατάστασης $\begin{cases} x-2y=1 \\ y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\cdot 4=1 \\ y=4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x-8=1 \\ y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=4 \end{cases}$$

β) Με την μέθοδο της αντικατάστασης $\begin{cases} x+3y=-2 \\ 2x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=-2 \\ y=-2x \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x+3(-2x)=-2 \\ y=-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-6x=-2 \\ y=-2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -5x=-2 \\ y=-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{5} \\ y=-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{5} \\ y=-2\cdot\dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{5} \\ y=-\dfrac{4}{5} \end{cases}$$

γ) Με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών

$$\begin{cases} 4x-y=10 \\ x+3y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x-3y=30 \\ x+3y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x=39 \\ x+3y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x+3y=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3 \\ 3+3y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

δ) Με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών $\begin{cases} 3x+y=-4 \\ x+2y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x-2y=8 \\ x+2y=-3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x=5 \\ x+2y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x+2y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ -1+2y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$$

Άσκηση 2

Να λύσετε τα συστήματα

α) $\begin{cases} 3x-y=7 \\ -2x+y=4 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 5x+2y=6 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} 3x-2y=0 \\ 2x+3y=0 \end{cases}$ **δ)** $\begin{cases} -2x+3y=5 \\ 6x-9y=3 \end{cases}$

Λύση

α) Με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ -2x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ -2x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = 11 \\ -2\cdot 11 + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = 26 \end{cases}$

β) Με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 5x + 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ 5x + 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 9x = 12 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ 2\cdot\frac{4}{3} - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ \frac{8}{3} - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$

γ) Με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 6y = 0 \\ 4x + 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 13x = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

δ) Με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών $\begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ 6x - 9y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 0 = 5 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ Το οποίο είναι αδύνατο.

Άσκηση 3

Να λύσετε τα συστήματα

α) $\begin{cases} \dfrac{2x+y}{4}=3 \\ \dfrac{3x-y}{2}=4 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} \dfrac{x-1}{4}-y=1 \\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4}=-1 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} \dfrac{x-5}{2}+\dfrac{2y+1}{3}=3 \\ \dfrac{x+4}{3}-\dfrac{y-6}{2}=4 \end{cases}$

Λύση

α) $\begin{cases} \dfrac{2x+y}{4}=3 \\ \dfrac{3x-y}{2}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=12 \\ 3x-y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=20 \\ 3x-y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ 3\cdot 4-y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases}$

β) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{4}-y=1 \\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\cdot\dfrac{x-1}{4}-4y=4 \\ 12\cdot\dfrac{x}{6}+12\cdot\dfrac{y}{4}=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1-4y=4 \\ 2x+3y=-12 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x-4y=5 \\ 2x+3y=-12 \end{cases} \begin{cases} 3x-12y=15 \\ 8x+12y=-48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x=-33 \\ x-4y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x-4y=5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x=-3 \\ -3-4y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} \dfrac{x-5}{2}+\dfrac{2y+1}{3}=3 \\ \dfrac{x+4}{3}-\dfrac{y-6}{2}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\cdot\dfrac{x-5}{2}+6\cdot\dfrac{2y+1}{3}=18 \\ 6\cdot\dfrac{x+4}{3}-6\cdot\dfrac{y-6}{2}=24 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 3(x-5)+2(2y+1)=18 \\ 2(x+4)-3(y-6)=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-15+4y+2=18 \\ 2x+8-3y+18=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y=31 \\ 2x-3y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 9x+12y=93 \\ 8x-12y=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17x=85 \\ 2x-3y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ 2x-3y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ 2\cdot5-3y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x=5 \\ -3y=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$

Άσκηση 4

Να λύσετε τα συστήματα

α) $\begin{cases} 4x-3(2x+3y)=20-x+y \\ 2(x-2y)+5(x-2)=3y+4 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} x(y+4)=y(x-6)-15+3x \\ (x-1)(x+2y)=(x+y)^2-y(y+1) \end{cases}$

Λύση

α) $\begin{cases} 4x-3(2x+3y)=20-x+y \\ 2(x-2y)+5(x-2)=3y+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-6x-9y=20-x+y \\ 2x-4y+5x-10=3y+4 \end{cases}$

$\begin{cases} -x-10y=20 \\ 7x-7y=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-10y=20 \\ x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -11y=22 \\ x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x-y=2 \end{cases}$

$\begin{cases} y=-2 \\ x+2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x=0 \end{cases}$

β) $\begin{cases} x(y+4)=y(x-6)-15+3x \\ (x-1)(x+2y)=(x+y)^2-y(y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy+4x=yx-6y-15+3x \\ x^2+2xy-x-2y=x^2+2xy+y^2-y^2-y \end{cases}$

$\begin{cases} 4x-3x+6y=-15 \\ -x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+6y=-15 \\ -x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y=-15 \\ -x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3 \\ -x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y=-3 \\ -x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3 \\ x=3 \end{cases}$

Άσκηση 5

Να λύσετε τα συστήματα

α) $\begin{cases} 1{,}3\alpha-0{,}8\beta=2{,}1 \\ 0{,}9\alpha+0{,}4\beta=0{,}5 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} \frac{\omega}{4}-0{,}2\varphi=1{,}5 \\ 3\omega+1{,}4\varphi=-1 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} 2{,}5x+3{,}2y=-1{,}8 \\ 1{,}6x-2{,}4y=-5{,}6 \end{cases}$

Λύση

α) $\begin{cases} 1{,}3\alpha-0{,}8\beta=2{,}1 \\ 0{,}9\alpha+0{,}4\beta=0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13\alpha-8\beta=21 \\ 9\alpha+4\beta=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13\alpha-8\beta=21 \\ 18\alpha+8\beta=10 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 31\alpha=31 \\ 9\alpha+4\beta=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ 9\alpha+4\beta=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ 9\cdot 1+4\beta=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=-1 \end{cases}$

β) $\begin{cases} \frac{\omega}{4}-0{,}2\varphi=1{,}5 \\ 3\omega+1{,}4\varphi=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega-0{,}8\varphi=6 \\ 3\omega+1{,}4\varphi=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\omega+2{,}4\varphi=-18 \\ 3\omega+1{,}4\varphi=-1 \end{cases}$

$\begin{cases} 3{,}8\varphi=-19 \\ \omega-0{,}8\varphi=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi=-5 \\ \omega-0{,}8\varphi=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi=-5 \\ \omega-0{,}8(-5)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi=-5 \\ \omega=2 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} 2{,}5x + 3{,}2y = -1{,}8 \\ 1{,}6x - 2{,}4y = -5{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x + 32y = -18 \\ 16x - 24y = -56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x + 32y = -18 \\ 2x - 3y = -7 \end{cases}$

$$\begin{cases} 75x + 96y = -54 \\ 64x - 96y = -224 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 139x = -278 \\ 2x - 3y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ 2x - 3y = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ 2\cdot(-2) - 3y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Άσκηση 6

Να λύσετε τα συστήματα

α) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} \frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = \frac{1}{6} \\ \frac{3}{\alpha} + \frac{4}{\beta} = \frac{5}{6} \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} \frac{2}{\omega} - \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{3} \\ \frac{-6}{\omega} + \frac{9}{\varphi} = 1 \end{cases}$

Λύση

α) Εδώ μας συμφέρει να κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών στην πρώτη εξίσωση γιατί αυτή καταλήγει σε γραμμική

$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy\frac{1}{x} - xy\frac{2}{y} = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2x = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ x + 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

β) Εδώ δεν μας συμφέρει να κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών αλλά να αντιμετωπίσουμε το σύστημα ως γραμμικό με αγνώστους αρχικά τα $\frac{1}{\alpha}$ και $\frac{1}{\beta}$ και να λύσουμε με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών

$$\begin{cases}\frac{1}{\alpha}+\frac{2}{\beta}=\frac{1}{6}\\ \frac{3}{\alpha}+\frac{4}{\beta}=\frac{5}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{-2}{\alpha}+\frac{-4}{\beta}=\frac{-2}{6}\\ \frac{3}{\alpha}+\frac{4}{\beta}=\frac{5}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{\alpha}=\frac{3}{6}\\ \frac{3}{\alpha}+\frac{4}{\beta}=\frac{5}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=2\\ \frac{3}{\alpha}+\frac{4}{\beta}=\frac{5}{6}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha=2\\ \frac{3}{2}+\frac{4}{\beta}=\frac{5}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=2\\ \frac{4}{\beta}=\frac{5}{6}-\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=2\\ \frac{4}{\beta}=-\frac{4}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=-6\end{cases}$$

γ) Δεν μας συμφέρει να κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών αλλά να αντιμετωπίσουμε το σύστημα ως γραμμικό με αγνώστους αρχικά τα $\frac{1}{\omega}$ και $\frac{1}{\varphi}$ και να λύσουμε με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών

$$\begin{cases}\frac{2}{\omega}-\frac{1}{\varphi}=\frac{1}{3}\\ \frac{-6}{\omega}+\frac{9}{\varphi}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{6}{\omega}-\frac{3}{\varphi}=\frac{3}{3}\\ \frac{-6}{\omega}+\frac{9}{\varphi}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{6}{\varphi}=2\\ \frac{-6}{\omega}+\frac{9}{\varphi}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi=3\\ \frac{-6}{\omega}+\frac{9}{\varphi}=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varphi=3\\ \frac{-6}{\omega}+\frac{9}{3}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi=3\\ \frac{-6}{\omega}+3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi=3\\ \frac{-6}{\omega}=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi=3\\ \omega=3\end{cases}$$

Άσκηση 6

Να βρείτε το κοινό σημείο των ευθειών $\varepsilon_1: 2x + 5y = 10$, $\varepsilon_2: x - y = 1$

Λύση

Δημιουργούμε σύστημα με τις εξισώσεις των δυο ευθειών και αναζητούμε τη λύση του.

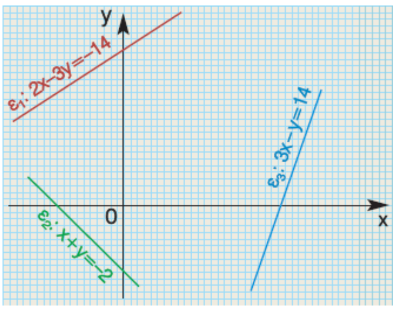
$$\begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ 5x - 5y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 15 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{15}{7} \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{15}{7} \\ \dfrac{15}{7} - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{15}{7} \\ y = \dfrac{8}{7} \end{cases}$$

Οπότε η λύσεις του συστήματος είναι $x = \frac{15}{7}$, $y = \frac{18}{7}$. Άρα το κοινό σημείο είναι το

$$\left(\frac{15}{7}, \frac{8}{7}\right)$$

Άσκηση 8



Οι ευθείες

ε_1: $2x - 3y = -14$

ε_2: $x + y = -2$

ε_3 : $3x - y = 14$

τέμνονται έξω από το χαρτί σχεδίασης .

Μπορείτε να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων τους

Λύση

Το κοινό σημείο των $ε_1$, $ε_2$ έχει συντεταγμένες την λύση του

συστήματος $\begin{cases} 2x - 3y = -14 \\ x + y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -14 \\ 3x + 3y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = -20 \\ x + y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases}$

Οπότε η λύση του συστήματος είναι το σημείο $A(-4\ ,2)$

Λύνουμε $\begin{cases} 2x - 3y = -14 \\ 3x - y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -14 \\ -9x + 3y = -42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -14 \\ -7x = -56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -14 \\ x = 8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 3y = -14 \\ x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y = -30 \\ x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 \\ x = 8 \end{cases}$ προκύπτει ότι το κοινό

σημείο των $ε_1$, $ε_3$ είναι το $B(8, 10)$

Λύνουμε $\begin{cases} x + y = -2 \\ 3x - y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -2 \\ 4x = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -2 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + y = -2 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 3 + y = -2 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + y = -2 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + y = -2 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -5 \\ x = 3 \end{cases}$ προκύπτει ότι το

κοινό σημείο των $ε_2$, $ε_3$ είναι το $Γ(3, -5)$

Άσκηση 9

Αν 3 + 3 + 3+…+ 3 + 5 + 5 + 5 +…+ 5 = 410 και το πλήθος των προσθετέων του πρώτου μέλους είναι 100 να βρείτε πόσες φορές χρησιμοποιήθηκε ο αριθμός 3 και πόσες ο αριθμός 5

Λύση

Έστω x το πλήθος των προσθέσεων του 3 και y το πλήθος των προσθέσεων του 5.

Άρα από την εκφώνηση προκύπτει ότι $3x + 5y = 410$, $x + y = 100$.

Χρησιμοποιούμε την μέθοδο της αντικατάστασης.

$x + y = 100 \Leftrightarrow y = 100 - x \ (1)$

$3x + 5y = 410 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 3x + 5(100 - x) = 410 \Leftrightarrow 3x + 500 - 5x = 410$

$\Leftrightarrow -2x = 410 - 500 \Leftrightarrow -2x = -90 \Leftrightarrow x = 45$ Άρα $y = 100 - 45 = 55$

Οπότε ο αριθμός 3 χρησιμοποιήθηκε 45 φορές και ο αριθμός 5 χρησιμοποιήθηκε 55 φορές.

Άσκηση 10

Αν το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = 7 \\ 2\alpha x - \beta y = 8 \end{cases}$ έχει λύση $x = 1$ και $y = 2$, να βρείτε τις τιμές των α και β.

Λύση

Αντικαθιστούμε $x = 1$ και $y = 2$ διότι είναι λύσεις του συστήματος και έχουμε ότι

$$\begin{cases} \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 2 = 7 \\ 2\alpha \cdot 1 - \beta \cdot 2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 7 \\ 2\alpha - 2\beta = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha = 15 \\ \alpha + 2\beta = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Άσκηση 11

Η ευθεία με εξίσωση $\alpha x + y = \beta$ διέρχεται από τα σημεία Α(1, 2) και Β(−3 , −2). Να βρείτε τις τιμές των α και β

Λύση

Αφού η ευθεία διέρχεται από τα σημεία Α(1, 2) και Β(– 3 , – 2) τότε θα αποτελούν και λύση της εξίσωσης α x + y = β . Οπότε για $x_A = 1$, $y_A = 2$, έχουμε ότι α ·1 + 2 = β και για $x_B = -3$, $y_B = -2$ έχουμε ότι

α ·(– 3) – 2 = β. Οπότε δημιουργούμε το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha+2=\beta \\ -3\alpha-2=\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+2=\beta \\ -3\alpha-2=\alpha+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=1 \\ \alpha=-1 \end{cases}$$

Άσκηση 12

Να βρείτε τους αριθμούς λ , μ ώστε η εξίσωση $x^2 + (\lambda - \mu)x + \mu - 2\lambda = 0$ να έχει ρίζες τους αριθμούς – 1 και 3.

Λύση

Για x = – 1 έχουμε ότι:

$(-1)^2 + (\lambda-\mu)(-1) + \mu - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda + \mu + \mu - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow 2\mu - 3\lambda = -1$ (1)

Για x = 3 έχουμε ότι

$3^2 + (\lambda-\mu)\cdot 3 + \mu - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow 9 + 3\lambda - 3\mu + \mu - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda - 2\mu = -9 \Leftrightarrow$

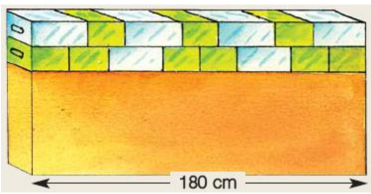
$\lambda = 2\mu - 9$

Άρα (1) => $2\mu - 3(2\mu - 9) = -1 \Leftrightarrow 2\mu - 6\mu + 27 = -1 \Leftrightarrow -4\mu = -28 \Leftrightarrow \mu = 7$

Οπότε λ = 14 – 9 = 5

Άσκηση 13

Στο πάνω μέρος ενός τοίχου μήκους 180 cm έχουν τοποθετηθεί πράσινα και γαλάζια διακοσμητικά τούβλα σε δύο σειρές .



Να υπολογίσετε το μήκος κάθε πράσινου και κάθε γαλάζιου τούβλου

Λύση

Έστω x, y τα μήκη των πράσινων και των γαλάζιων τούβλων αντίστοιχα. Από το σχήμα φαίνεται ότι η πάνω σειρά έχει 3 πράσινα και 4 γαλάζια τούβλα, ενώ η κάτω σειρά έχει 6 πράσινα και δυο γαλάζια. Άρα προκύπτουν οι εξισώσεις

$3x + 4y = 180$ και $6x + 2y = 180$

$6x + 2y = 180 \Leftrightarrow 2y = 180 – 6x \Leftrightarrow 2y = 2(90 – 3x) \Leftrightarrow y = 90 – 3x$ (1)

Οπότε $3x + 4(90 – 3x) = 180 \Leftrightarrow 3x + 360 – 12x = 180 \Leftrightarrow -9x = -180 \Leftrightarrow x = 20$

Άρα (1) => $y = 90 – 60 = 30$

Οπότε τα πράσινα τούβλα έχουν μήκος 20 εκατοστά και τα γαλάζια τούβλα έχουν μήκος 30 εκατοστά.

Άσκηση 14

Συσκευάσαμε 2,5 τόνους ελαιόλαδου σε 800 δοχεία των 2 και

Να βρείτε πόσα δοχεία χρησιμοποιήσαμε από κάθε είδος

Λύση

Έστω x τα δοχεία των 2 κιλών και y τα δοχεία των 5 κιλών.

Τότε σύμφωνα με την εκφώνηση προκύπτει ότι

$x + y = 800$, $2x + 5y = 2500$.

$x + y = 800 \Leftrightarrow x = 800 – y$ (1)

Οπότε $2(800 – y) + 5y = 2500 \Leftrightarrow 1600 – 2y + 5y = 2500 \Leftrightarrow 3y = 900 \Leftrightarrow y = 300$

Άρα $x = 800 – 300 = 500$

Οπότε χρειαζόμαστε 500 δοχεία των 2 κιλών και 300 δοχεία των 5 κιλών.

Άσκηση 15

Ο μέσος όρος της βαθμολογίας ενός μαθητή στη Φυσική και στη Χημεία κατά το πρώτο τρίμηνο ήταν 16. Στο δεύτερο τρίμηνο ο βαθμός της Φυσικής μειώθηκε κατά 2 μονάδες και ο βαθμός της Χημείας αυξήθηκε κατά 4 μονάδες, με αποτέλεσμα οι δύο βαθμοί να γίνουν ίσοι. Ποιους βαθμούς είχε ο μαθητής σε κάθε μάθημα κατά το πρώτο τρίμηνο ;

Λύση

Θεωρούμε x τον βαθμό της χημείας και y τον βαθμό της φυσικής.

Οπότε σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε ότι $\frac{x+y}{2} = 16$ και $y - 2 = x + 4$

$\frac{x+y}{2} = 16 \Leftrightarrow x + y = 32 \Leftrightarrow x = 32 - y$ (1)

Οπότε $y - 2 = 32 - y + 4 \Leftrightarrow 2y = 38 \Leftrightarrow y = 19$

Άρα $19 - 2 = x + 4 \Leftrightarrow x = 13$

Οπότε ο βαθμός της χημείας είναι 13 και της φυσικής 19

Άσκηση 16

Τα κέντρα δύο κύκλων που εφάπτονται εσωτερικά απέχουν 12 cm. Αν οι κύκλοι μετατοπισθούν έτσι ώστε να εφάπτονται εξωτερικά τότε τα κέντρα τους απέχουν 58 cm. Να βρείτε τις ακτίνες των δύο κύκλων .

Λύση

Θεωρώ x και y τις ακτίνες των κύκλων με $x > y$.

Άρα, σύμφωνα με την εκφώνηση, όταν εφάπτονται εσωτερικά θα ισχύει ότι $x - y = 12$ (1)

και όταν εφάπτονται εξωτερικά ισχύει $x + y = 58$ (2)

Άρα (2) => $y + 12 + y = 58 \Leftrightarrow 2y + 12 = 58 \Leftrightarrow 2y = 46 \Leftrightarrow y = 23$

Οπότε (1) => $x - 23 = 12 \Leftrightarrow x = 23 + 12 = 35$

Άσκηση 17

Αν οι μαθητές ενός τμήματος καθίσουν ανά ένας σε κάθε θρανίο, τότε θα μείνουν όρθιοι 8 μαθητές, ενώ αν καθίσουν ανά δύο θα μείνουν 4 θρανία κενά. Να βρείτε πόσοι είναι οι μαθητές και πόσα τα θρανία.

Λύση

Θεωρούμε x τους μαθητές και y τα θρανία.

Σύμφωνα με την υπόθεση όταν κάθονται ένας - ένας θα ισχύει ότι $x = y + 8$ (1)

ενώ όταν κάθονται δύο - δύο θα ισχύει ότι $x = 2(y - 4)$ (2)

(1), (2) => $y + 8 = 2(y - 4) \Leftrightarrow y + 8 = 2y - 8 \Leftrightarrow y = 16$

Άρα $x = 16 + 8 = 24$.

Οπότε υπάρχουν 16 θρανία και 24 μαθητές.

Άσκηση 18

Μία ποτοποιία παρασκεύασε 400 λίτρα ούζο περιεκτικότητας 38% vol αναμειγνύοντας δύο ποσότητες με περιεκτικότητες 32% vol και 48% vol αντίστοιχα. Πόσα λίτρα από κάθε ποσότητα χρησιμοποίησε ;

Λύση

Περιεκτικότητα α% vol σημαίνει α λίτρα οινόπνευμα σε 100 λίτρα ούζο.

Θεωρούμε x την ποσότητα (σε λίτρα) του ούζου με περιεκτικότητα 32 % και y την ποσότητα (σε λίτρα) του ούζου με περιεκτικότητα 48% .

Οπότε προκύπτουν οι εξισώσεις $x + y = 400$ από τη συνολική ποσότητα ούζου και

$\frac{32}{100}x + \frac{48}{100}y = \frac{38}{100}\cdot 400$ από το καθαρό οινόπνευμα.

$$\frac{32}{100}x + \frac{48}{100}y = \frac{38}{100}\cdot 400 \Leftrightarrow 32x + 48y = 38\cdot 400 \Leftrightarrow 2x + 3y = 950$$

Οπότε προκύπτει το σύστημα $\begin{cases} x+y=400 \\ 2x+3y=950 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-2y=-800 \\ 2x+3y=950 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} y=150 \\ 2x+3y=950 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=150 \\ 2x+3\cdot 150=950 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=150 \\ x=250 \end{cases}$$

Άρα χρησιμοποίησε 250 λίτρα ούζου με περιεκτικότητα 32 % και 150 λίτρα ούζου με περιεκτικότητα 48 %

Άσκηση 19

Ένα αυτοκίνητο μετά την ενεργοποίηση των φρένων του συνέχιζε να κινείται με ταχύτητα $\upsilon = \upsilon_o - \alpha t$, όπου t ο χρόνος που μεσολάβησε από την στιγμή του φρεναρίσματος. Αν 2 sec μετά το φρενάρισμα το αυτοκίνητο είχε ταχύτητα 12 m/sec και 2 sec αργότερα είχε ταχύτητα 4 m/sec, να βρείτε την αρχική ταχύτητα υ_o και την επιβράδυνση α . Σε πόσο χρόνο από την στιγμή του φρεναρίσματος θα σταματήσει το αυτοκίνητο ;

Λύση

Σύμφωνα με το νόμο $\upsilon = \upsilon_o - \alpha t$ και την εκφώνηση έχουμε ότι

$12 = \upsilon_o - 2\alpha$ (1) για t = 2

και $4 = \upsilon_o - 4\alpha$ **(2)** για t = 4

Άρα (1) => $\upsilon_o = 12 + 2\alpha$

Οπότε (2) => $4 = 12 + 2\alpha - 4\alpha \Leftrightarrow 2\alpha = 8 \Leftrightarrow \alpha = 4$ m/sec^2

Άρα $\upsilon_o = 12 + 8 = 20$ m/sec

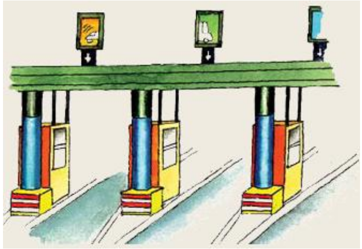
Οπότε ο τύπος της ταχύτητας είναι $\upsilon = 20 - 4t$.

Όταν ακινητοποιηθεί το όχημα θα ισχύει ότι $\upsilon = 0$.

Άρα $20 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = 5$ sec.

Άρα το όχημα θα χρειαστεί 5 δευτερόλεπτα για να σταματήσει.

Άσκηση 20



Από έναν σταθμό διοδίων πέρασαν 945 αυτοκίνητα και μοτοσικλέτες και εισπράχτηκαν 1810 € . Αν ο οδηγός κάθε αυτοκινήτου πλήρωσε 2 € και ο οδηγός κάθε μοτοσικλέτας πλήρωσε 1,2 € , να βρείτε πόσα ήταν τα αυτοκίνητα και πόσες οι μοτοσικλέτες .

Λύση

Θεωρούμε x τα αυτοκίνητα και y τις μοτοσικλέτες οπότε προκύπτει σύμφωνα με την υπόθεση ότι $x + y = 945$ (1) και $2x + 1{,}2y = 1810$ (2)

Άρα (1) => $x = 945 – y$

Οπότε (2) => $2(945 – y) + 1{,}2y = 1810 \Leftrightarrow 1890 – 2y + 1{,}2y = 1810 \Leftrightarrow 0{,}8y = 80$

$\Leftrightarrow y = 100$

Άρα $x = 945 – 100 = 845$

Οπότε από τα διόδια πέρασαν 845 αυτοκίνητα και 100 μοτοσικλέτες.

Άσκηση 21

Σε ένα τηλεοπτικό παιχνίδι σε κάθε παίχτη υποβάλλονται 10 ερωτήσεις και για κάθε σωστή απάντηση προστίθενται βαθμοί ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρούνται βαθμοί . Ένας παίχτης έδωσε 7 σωστές απαντήσεις και συγκέντρωσε 64 βαθμούς , ενώ ένας άλλος έδωσε 4 σωστές απαντήσεις και συγκέντρωσε 28 βαθμούς. Πόσους βαθμούς παίρνει ένας παίχτης για κάθε σωστή απάντηση και πόσοι βαθμοί αφαιρούνται για κάθε λανθασμένη απάντηση ;

Λύση

Θεωρούμε x τους βαθμούς για κάθε σωστή απάντηση και y τους βαθμούς για κάθε λανθασμένη απάντηση.

Άρα, σύμφωνα με τους κανόνες του παιχνιδιού θα ισχύουν :

$7x - 3y = 64$ (1) και $4x - 6y = 28$ (2)

$4x - 6y = 28 \Leftrightarrow 2(2x - 3y) = 28 \Leftrightarrow 2x - 3y = 14 \Leftrightarrow 3y = 2x - 14$

Άρα (1) => $7x - (2x - 14) = 64 \Leftrightarrow 7x - 2x + 14 = 64 \Leftrightarrow 5x = 50 \Leftrightarrow x = 10$

Οπότε $3y = 20 - 14 \Leftrightarrow 3y = 6 \Leftrightarrow y = 2$

Άρα η κάθε σωστή απάντηση δίνει 10 βαθμούς στον παίχτη και κάθε λάθος απάντηση αφαιρεί 2.

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης – MED - Μαθηματικός

ΑΡΝΟΣ
Online Education

…Πράξεις Παιδείας!