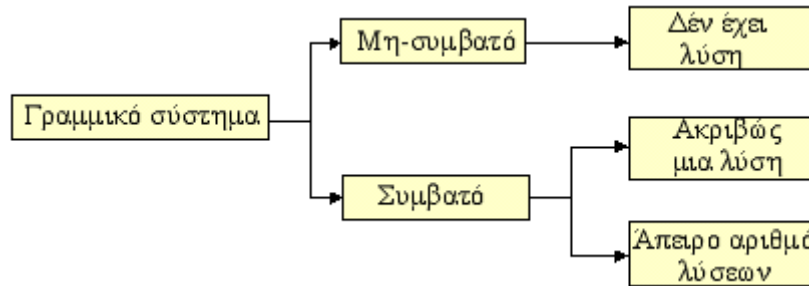


3. Συστήματα γραμμικών εξισώσεων



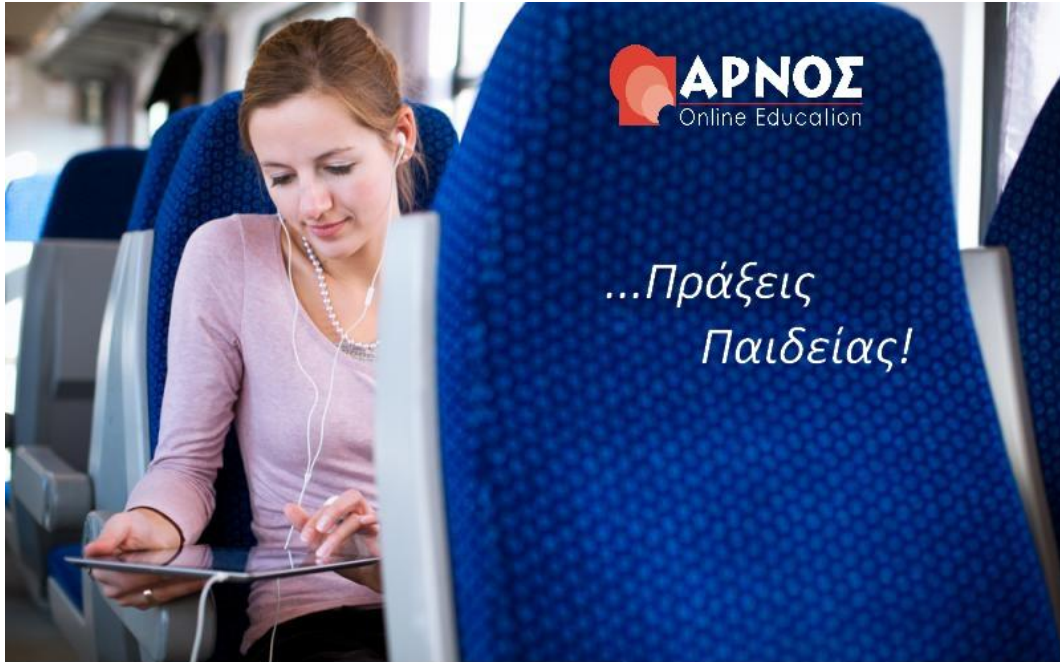
Λύσεις ασκήσεων Μαθηματικών Γ' Γυμνασίου

3.2 Η έννοια του γραμμικού συστήματος & Η γραφική επίλυσή του

σχ. βιβλίο (σσ. 131-132)

Φροντιστηριακό e-μάθημα

Γυμνάσιο: 9.000 μαθήματα με βίντεο-διδασκαλία για όλο το σχολικό έτος **μόνο με 150 ευρώ!**



Μελέτη όπου, όποτε και όσο εσύ θες!



Διδάσκουμε μεθοδικά σε βίντεο τη θεωρία του σχολικού βιβλίου και λύνουμε όλες τις ασκήσεις

Δημιουργούμε συνεχώς νέα βίντεο με διδασκαλία για τις εκπαιδευτικές σου απαιτήσεις



Παίζουμε και μαθαίνουμε με on line test αξιολόγησης & SOS διαγωνίσματα προσομοίωσης για τις εξετάσεις

Λύνουμε απορίες ζωντανά on line καθημερινά 3 μ.μ. - 8 μ.μ.



Λύσεις Ασκήσεων Μαθηματικών Γ' Γυμνασίου σχ. βιβλίου (σσ. 131-132)

3.2 Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυση του

Ερωτήσεις κατανόησης

Ερώτηση 1

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

το σύστημα $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ έχει ως λύση τις συντεταγμένες του σημείου

α) Α(-3, 2) β) Β(1, -1) γ) Γ(1, -4) δ) Δ(2, -3)

Απάντηση

Το σημείο που αποτελεί λύση του συστήματος επαληθεύει και τις δυο εξισώσεις.

Παρατηρούμε ότι για $x = 2$, $y = -3$ έχουμε ότι:

$$2 - (-3) = 5 \Leftrightarrow 2 + 3 = 5 \text{ που ισχύει}$$

$$2 \cdot 2 - 3 = 1 \Leftrightarrow 4 - 3 = 1 \text{ που ισχύει}$$

Άρα η σωστή απάντηση είναι η (δ)

Ερώτηση 2

Αν οι εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος παριστάνονται με τις ευθείες ε_1 και ε_2 , να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ζεύγος ευθειών της στήλης Α, το σωστό συμπέρασμα από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. Οι ευθείες ε_1 , ε_2 τέμνονται.	1. Το σύστημα είναι αδύνατο.
β. Οι ευθείες ε_1 , ε_2 είναι παράλληλες.	2. Το σύστημα έχει μία μόνο λύση.
γ. Οι ευθείες ε_1 , ε_2 συμπίπτουν.	3. Το σύστημα είναι αδύνατο.

Απάντηση

α. Οι ευθείες θα έχουν ένα σημείο τομής, άρα το σύστημα θα έχει μια λύση. Οπότε

α -> 2

β. Οι ευθείες δεν τέμνονται, οπότε το σύστημα δεν έχει λύση. Άρα β -> 3

γ. Οι ευθείες ταυτίζονται, άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Άρα είναι αόριστο.

Τότε γ -> 1

α	β	γ
2	3	1

Ερώτηση 3

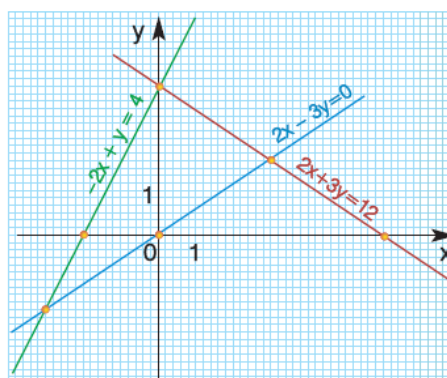
Με την βοήθεια του διπλανού σχήματος

να βρείτε τη λύση σε κάθε ένα από τα

παρακάτω συστήματα

$$\alpha) \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ -2x + y = 4 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} y = 0 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases} \quad \delta) \begin{cases} x = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$



Απάντηση

Η γραφική λύση του συστήματος είναι οι συντεταγμένες του σημείου τομής

των αντιστοίχων ευθειών. Η αλγεβρική λύση που δίνουμε ουσιαστικά είναι για

επιβεβαίωση της απάντησης.

α) Η γραφική λύση του συστήματος είναι οι συντεταγμένες του σημείου τομής των αντιστοίχων ευθειών. Εδώ το σημείο τομής φαίνεται να είναι το $(-3, -2)$

Αλγεβρική λύση
$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$$

$$2x - 3y = 0 \Leftrightarrow 2x = 3y \quad (1)$$

$$-2x + y = 4 \Leftrightarrow 2x = y - 4 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 3y = y - 4 \Leftrightarrow 2y = -4 \Leftrightarrow y = -2$$

$$\text{Οπότε } 2x = 3(-2) \Leftrightarrow 2x = -6 \Leftrightarrow x = -3$$

Λύση του συστήματος είναι το $(-3, -2)$

β) Εδώ το σημείο τομής φαίνεται να είναι το $(3, 2)$

Αλγεβρική λύση
$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$$

$$2x - 3y = 0 \Leftrightarrow 2x = 3y \quad (1)$$

$$2x + 3y = 12 \Leftrightarrow 2x = 12 - 3y \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 3y = 12 - 3y \Leftrightarrow 6y = 12 \Leftrightarrow y = 2$$

$$\text{Οπότε } 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$$

Λύση του συστήματος είναι το $(3, 2)$

γ) Εδώ το σημείο τομής φαίνεται να είναι το $(6, 0)$

Αλγεβρική λύση
$$\begin{cases} y = 0 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$$

$$y = 0 \quad (1)$$

$$2x + 3y = 12 \quad (2)$$

$$\text{Οπότε } (1), (2) \Rightarrow 2x + 0 = 12 \Leftrightarrow 2x = 12 \Leftrightarrow x = 6$$

Λύση του συστήματος είναι το $(6, 0)$

δ) Εδώ το σημείο τομής φαίνεται να είναι το (0, 0)

$$\text{Αλγεβρική λύση } \begin{cases} x = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$x = 0 \quad (1)$$

$$2x - 3y = 0 \quad (2)$$

$$\text{Οπότε } (1), (2) \Rightarrow 0 - 3y = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

Λύση του συστήματος είναι το (0, 0)

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να λύσετε γραφικά τα συστήματα

$$\alpha) \begin{cases} x = 3 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} y = 3 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} 3x - y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$\epsilon) \begin{cases} 3x + 6y = 9 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$$

$$\sigma\tau) \begin{cases} 2x - y = 10 \\ 4x - 2y = 1 \end{cases}$$

Λύση

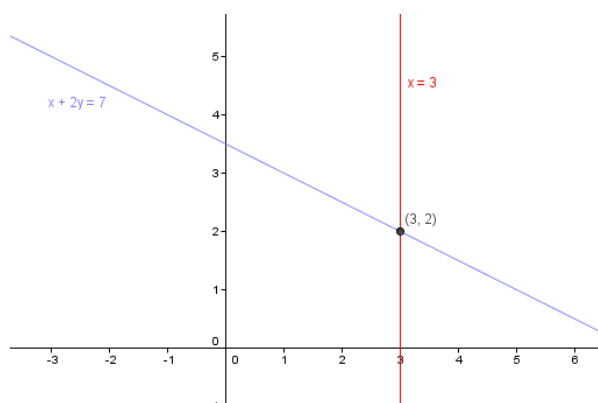
$$\alpha) \begin{cases} x = 3 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

Σχεδιάζουμε τις ευθείες

$$x = 3, \quad x + 2y = 7$$

Η λύση του συστήματος είναι οι συντεταγμένες του σημείου τομής

Άρα η λύση του συστήματος είναι το σημείο (3, 2)

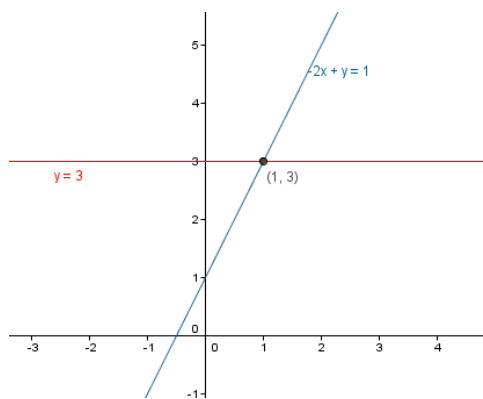


$$\beta) \begin{cases} y = 3 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$$

Σχεδιάζουμε τις ευθείες $y = 3$, $-2x + y = 1$.

Η λύση του συστήματος είναι το σημείο

(1, 3)



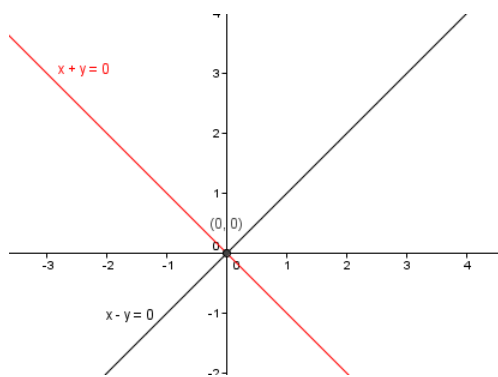
$$\gamma) \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Σχεδιάζουμε τις ευθείες

$x + y = 0$ και $x - y = 0$

Η λύση του συστήματος είναι το

σημείο (0, 0)



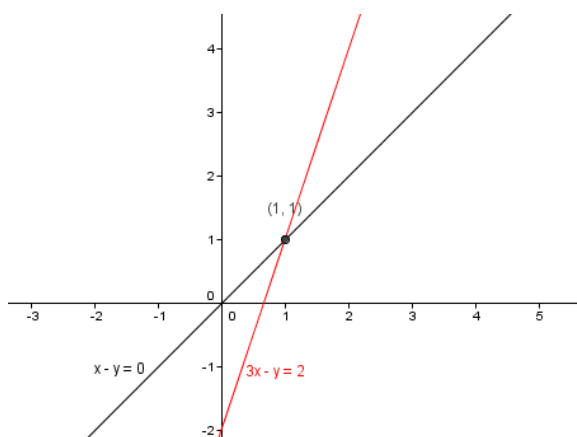
$$\delta) \begin{cases} 3x - y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Σχεδιάζουμε τις ευθείες

$3x - y = 2$ και $x - y = 0$

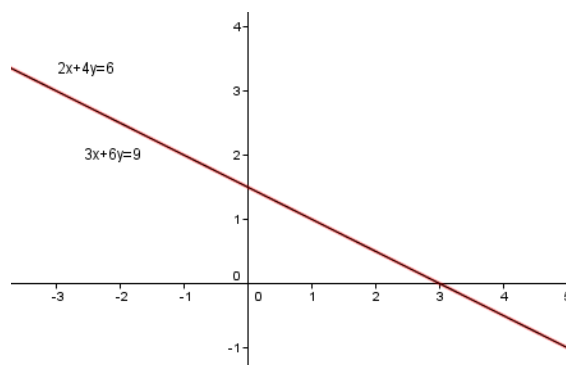
Η λύση του συστήματος είναι το

σημείο (1, 1)



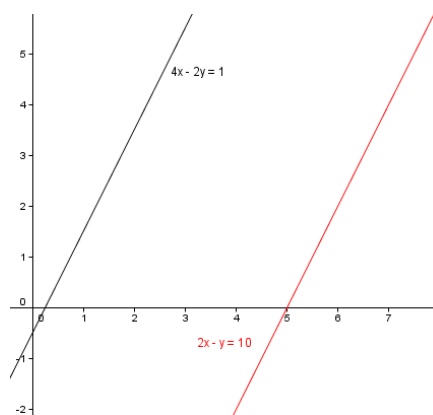
$$\epsilon) \begin{cases} 3x + 6y = 9 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$$

Σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των ευθειών και βλέπουμε ότι συμπίπτουν, άρα του σύστημα είναι αόριστο.



$$\sigma\tau) \begin{cases} 2x - y = 10 \\ 4x - 2y = 1 \end{cases}$$

Σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των ευθειών και παρατηρούμε ότι οι ευθείες είναι παράλληλες. Άρα το σύστημα είναι αδύνατο



Άσκηση 2

Να προσδιορίσετε γραφικά το πλήθος των λύσεων σε κάθε ένα από τα παρακάτω συστήματα

$$\alpha) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x - 6y = 4 \end{cases}$$

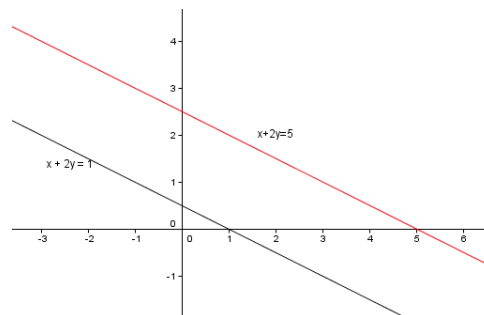
$$\gamma) \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$$

Λύση

$$\alpha) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

Σχεδιάζουμε τις ευθείες
 $x + 2y = 5$, $x + 2y = 1$

Οι ευθείες είναι παράλληλες. Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.



$$\beta) \begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x - 6y = 4 \end{cases}$$

$$2x - 6y = 4 \Leftrightarrow 2(x - 3y) = 4 \Leftrightarrow x - 3y = 4$$

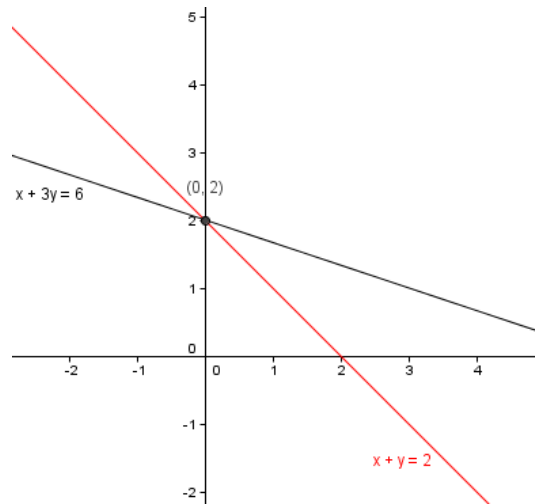
Οι ευθείες συμπίπτουν. Άρα το σύστημα είναι αόριστο.

$$\gamma) \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$$

Οι γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών τέμνονται σε ένα σημείο.

Άρα το σύστημα έχει μία μόνο λύση

[η λύση του συστήματος είναι το σημείο (0, 2)]



Άσκηση 3

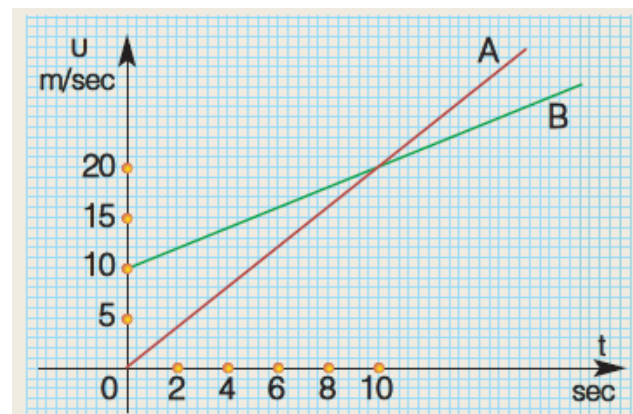
Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου δύο αυτοκινήτων A και B.

Να βρείτε

α) Την αρχική ταχύτητα κάθε αυτοκινήτου

β) Σε πόσο χρόνο μετά την εκκίνηση

τους τα δύο αυτοκίνητα θα έχουν την ίδια ταχύτητα και πόση θα είναι αυτή



Λύση

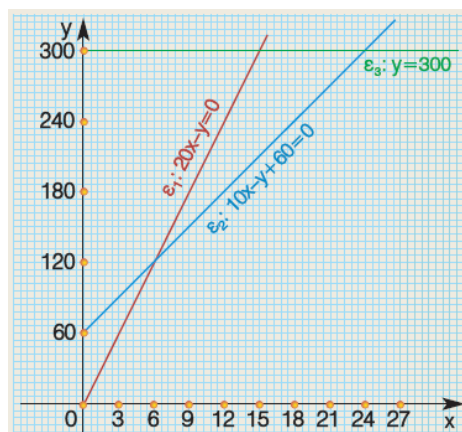
α) Σύμφωνα με το διάγραμμα, για $t = 0$, $u_A = 0$, $u_B = 10$, επειδή το A διέρχεται από το $(0, 0)$, και το B από το $(0, 10)$

β) Σύμφωνα με το σχήμα, το σημείο τομής των δυο ευθειών είναι το $(10, 20)$ που σημαίνει ότι θα έχουν κοινή ταχύτητα 20 m/sec μετά από 10 sec από την έναρξη.

Άσκηση 4

Ένας φίλαθλος για να παρακολουθήσει τους αγώνες μιας ομάδας έχει τις εξής δυνατότητες

- Να πληρώνει 20 € για κάθε αγώνα που παρακολουθεί
- Να πληρώσει 60 € ως αρχική συνδρομή και για κάθε αγώνα που παρακολουθεί να πληρώνει 10 €



- Να πληρώσει 300 € και να παρακολουθεί όσους αγώνες επιθυμεί

Η σχέση που συνδέει το πλήθος των αγώνων που θα παρακολουθήσει ο φίλαθλος με το χρηματικό ποσό που θα πληρώσει σε κάθε περίπτωση παριστάνεται με τα σημεία μιας από τις τρεις ευθείες ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 .

- α) Να αντιστοιχίσετε κάθε περίπτωση σε μία από τις τρεις ευθείες
- β) Πόσους αγώνες πρέπει να παρακολουθήσει ο φίλαθλος ώστε τα χρήματα που θα πληρώσει να είναι τα ίδια στην δεύτερη και στην τρίτη περίπτωση
- γ) Αν ο φίλαθλος παρακολουθήσει τελικά 12 αγώνες, ποια περίπτωση ήταν η πιο συμφέρουσα ;
- δ) Αν παρακολουθήσει μόνο 15 αγώνες και δεν έχει επιλέξει την πιο συμφέρουσα περίπτωση πόσα ευρώ ζημιώθηκε ;
- ε) Πότε είναι πιο συμφέρουσα κάθε περίπτωση ;

Λύση

α) Σύμφωνα με το πρώτο ενδεχόμενο, εάν ο φίλαθλος παρακολουθήσει x αγώνες θα πληρώσει $y = 20x$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης αναπαρίσταται από την ϵ_1

Σύμφωνα με το δεύτερο ενδεχόμενο, εάν ο φίλαθλος παρακολουθήσει x αγώνες θα πληρώσει

$y = 10x + 60$. Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης αναπαρίσταται από την ϵ_2

Σύμφωνα με το τρίτο ενδεχόμενο, εάν ο φίλαθλος παρακολουθήσει x αγώνες θα πληρώσει $y = 300$ €. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης αναπαρίσταται από την ϵ_3

β) Οι ϵ_3 και η ϵ_2 τέμνονται στο $(24, 300)$. Επομένως για να πληρώσει κάποιος τα ίδια χρήματα για το δεύτερο και το τρίτο ενδεχόμενο, πρέπει να παρακολουθήσει 24 αγώνες.

γ) Παρατηρούμε ότι για τετμημένη $x = 12$, η ευθεία με την μικρότερη τεταγμένη είναι η $\epsilon_2 : y = 10x + 60$. Οπότε η δεύτερη περίπτωση συμφέρει οικονομικά για κάποιον που θα παρακολουθήσει 12 αγώνες.

δ) Για κάθε συνάρτηση θεωρούμε $x = 15$, οπότε έχουμε κατά περίπτωση:

Περίπτωση πρώτη: $y = 20 \cdot 15 = 300$ €

Περίπτωση δεύτερη: $y = 10 \cdot 15 + 60 = 210$ €

Περίπτωση τρίτη: $y = 300$ €

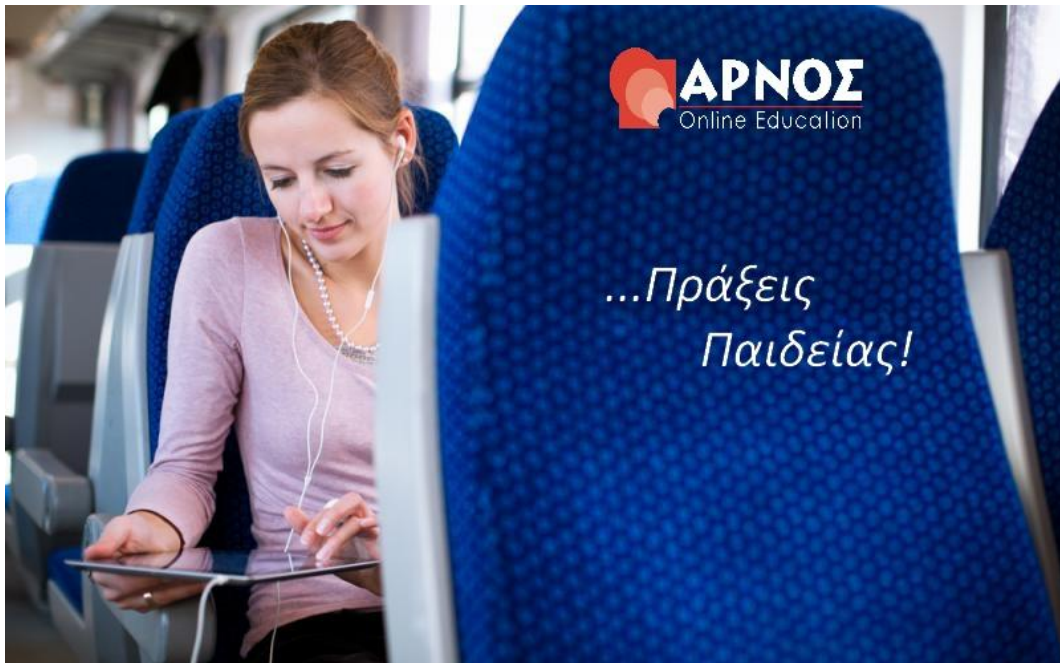
Οπότε αφαιρούμε την μικρότερη από την μεγαλύτερη τιμή $300 - 210 = 90$. Οπότε ζημιώθηκε 90 €.

ε) Σύμφωνα με την γραφική παράσταση, η πρώτη περίπτωση είναι συμφέρουσα αν ο φίλαθλος παρακολουθήσει μέχρι και 6 αγώνες, η δεύτερη περίπτωση συμφέρει αν παρακολουθήσει από 7 μέχρι και 24 ενώ η Τρίτη περίπτωση είναι πιο συμφέρουσα αν παρακολουθήσει πάνω από 24 αγώνες.

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης – MED - Μαθηματικός

Φροντιστηριακό e-μάθημα

Γυμνάσιο: 9.000 μαθήματα με βίντεο-διδασκαλία για όλο το σχολικό έτος **μόνο με 150 ευρώ!**



Μελέτη όπου, όποτε και όσο εσύ θες!



Διδάσκουμε μεθοδικά σε βίντεο τη θεωρία του σχολικού βιβλίου και λύνουμε όλες τις ασκήσεις

Δημιουργούμε συνεχώς νέα βίντεο με διδασκαλία για τις εκπαιδευτικές σου απαιτήσεις



Παίζουμε και μαθαίνουμε με on line test αξιολόγησης & SOS διαγωνίσματα προσομοίωσης για τις εξετάσεις

Λύνουμε απορίες ζωντανά on line καθημερινά 3 μ.μ. - 8 μ.μ.





...Πράξεις Παιδείας!