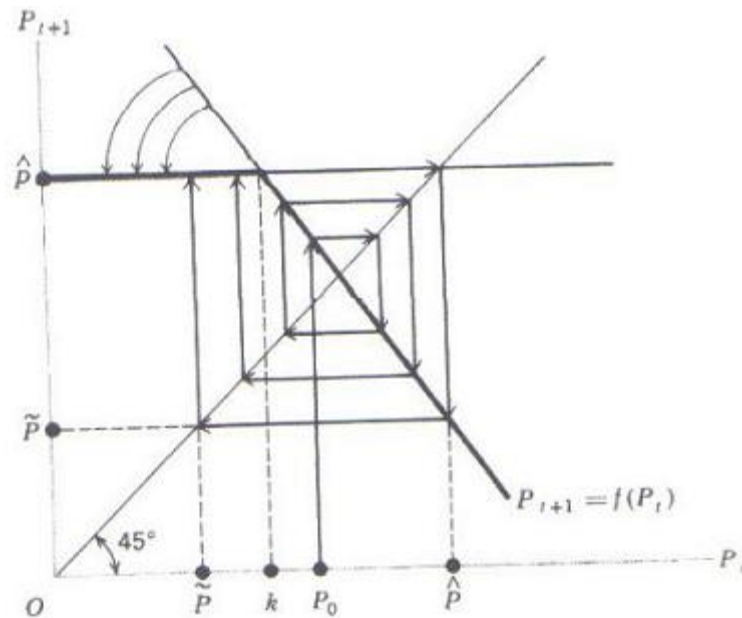


3. Συστήματα γραμμικών εξισώσεων



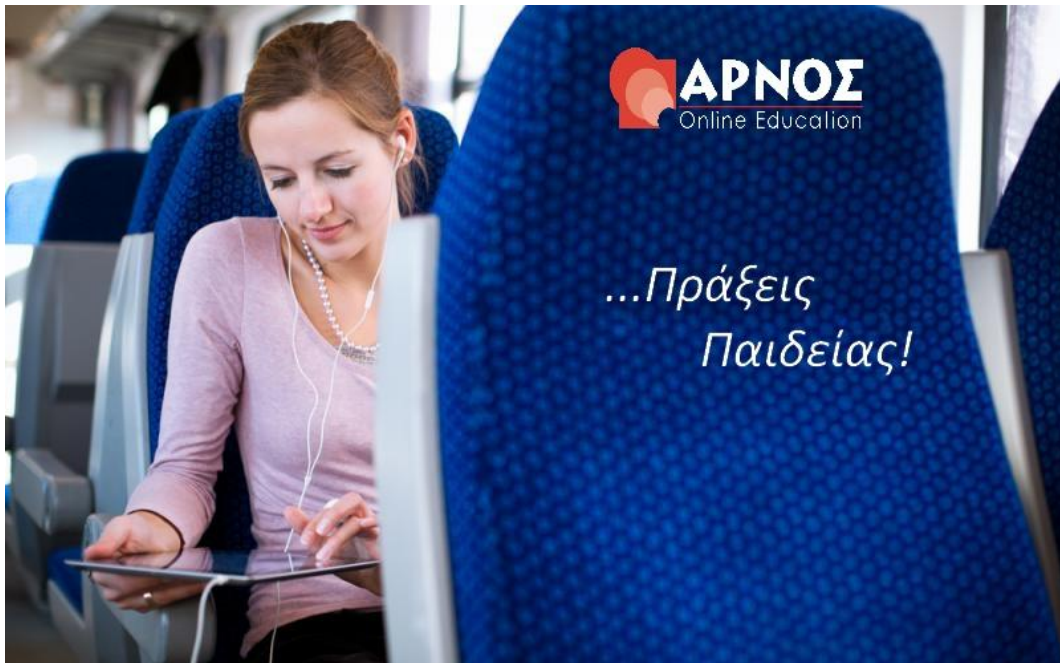
Λύσεις ασκήσεων Μαθηματικών Γ' Γυμνασίου

3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης

σχ. βιβλίο (σσ. 126-127)

Φροντιστηριακό e-μάθημα

Γυμνάσιο: 9.000 μαθήματα με βίντεο-διδασκαλία
για όλο το σχολικό έτος **μόνο με 150 ευρώ!**



Μελέτη όπου, όποτε και όσο εσύ θες!



Διδάσκουμε μεθοδικά σε βίντεο τη θεωρία του σχολικού βιβλίου και λύνουμε όλες τις ασκήσεις

Δημιουργούμε συνεχώς νέα βίντεο με διδασκαλία
για τις εκπαιδευτικές σου απαιτήσεις



Παίζουμε και μαθαίνουμε με on line test αξιολόγησης
& SOS διαγωνίσματα προσομοίωσης για τις εξετάσεις

Λύνουμε απορίες ζωντανά on line καθημερινά 3 μ.μ. - 8 μ.μ.



Λύσεις Ασκήσεων Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου σχ. βιβλίου (σσ. 126-127)

3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης

Ερωτήσεις κατανόησης

Ερώτηση 1

Ποια από τα ζεύγη $(3, 2)$, $(1, 5)$, $(0, 6)$, $(-3, 10)$, $(-2, 8)$ είναι λύσεις της εξίσωσης $4x + 3y = 18$;

Απάντηση

Αντικαθιστούμε σε κάθε περίπτωση τα x, y με τους αριθμούς που μας δίνονται.

Για $x = 3, y = 2$ έχουμε ότι $4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 18 \Leftrightarrow 18 = 18$

Άρα αυτοί οι αριθμοί αποτελούν λύση.

Για $x = 1, y = 5$ έχουμε ότι $4 \cdot 1 + 3 \cdot 5 = 18 \Leftrightarrow 19 = 18$

Άρα αυτοί οι αριθμοί δεν αποτελούν λύση.

Για $x = 0, y = 6$ έχουμε ότι $4 \cdot 0 + 3 \cdot 6 = 18 \Leftrightarrow 18 = 18$

Άρα αυτοί οι αριθμοί αποτελούν λύση.

Για $x = -3, y = 8$ έχουμε ότι $4 \cdot (-3) + 3 \cdot 10 = 18 \Leftrightarrow -12 + 30 = 18 \Leftrightarrow 18 = 18$

Άρα αυτοί οι αριθμοί αποτελούν λύση.

Για $x = -2, y = 8$ έχουμε ότι $4 \cdot (-2) + 3 \cdot 8 = 18 \Leftrightarrow -8 + 24 = 18 \Leftrightarrow 16 = 18$

Άρα αυτοί οι αριθμοί δεν αποτελούν λύση.

Ερώτηση 2

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες

- α) Το σημείο $(3, -2)$ ανήκει στην ευθεία $3x - y = 7$
 β) Η ευθεία $\epsilon: 5x + y = -10$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(-2, 0)$
 γ) Η ευθεία $\epsilon: 2x + 5y = 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων
 δ) Η ευθεία $\epsilon: 3x + y = 6$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 3)$

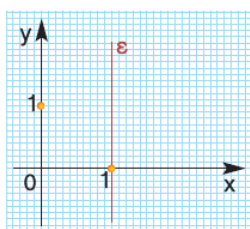
Απάντηση

- α) Είναι **λάθος** (Λ), διότι για $x = 3, y = -2$ έχουμε ότι $3 \cdot 3 - (-2) = 7 \Leftrightarrow 11 = 7$
 Το οποίο δεν ισχύει.
 β) Είναι **σωστό** (Σ), διότι για $y = 0$ έχουμε ότι $5x = -10 \Leftrightarrow x = -2$
 Άρα η ευθεία $\epsilon: 5x + y = -10$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(-2, 0)$
 γ) Είναι **σωστό** (Σ), διότι για $x = 0, y = 0$ έχουμε ότι $2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$
 Άρα η αρχή των αξόνων είναι σημείο από το οποίο διέρχεται η ϵ .
 δ) Είναι **λάθος** (Λ), διότι για $x = 0$ έχουμε ότι $3 \cdot 0 + y = 6 \Leftrightarrow y = 6$, άρα η ϵ περνάει από το $(0, 6)$ και όχι από το σημείο $(0, 3)$

Ερώτηση 3

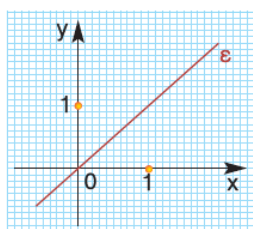
Να συμπληρώσετε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ευθεία ϵ των παρακάτω σχημάτων μία από τις εξισώσεις

1. $y = 1$



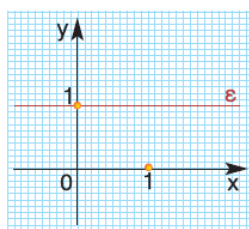
(σχήμα α)

2. $x = -1$



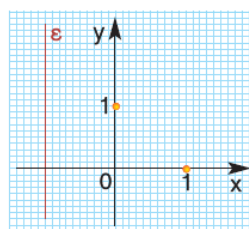
(σχήμα β)

3. $y = x$



(σχήμα γ)

4. $x = 1$



(σχήμα δ)

Απάντηση

Στο (α) η ευθεία έχει τύπο $x = 1$

Στο (β) η ευθεία έχει τύπο $y = x$

Στο (γ) η ευθεία έχει τύπο $y = 1$

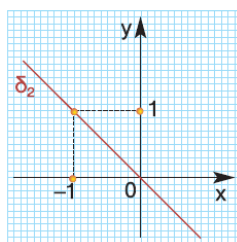
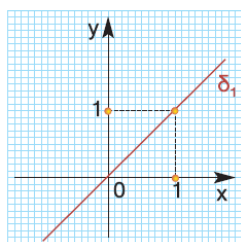
Στο (δ) η ευθεία έχει τύπο $x = -1$

α	β	γ	δ
4	3	1	2

Ερώτηση 4

Οι ευθείες δ_1 και δ_2 διχοτομούν γωνίες των αξόνων.

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση



i) Η εξίσωση της δ_1 είναι α) $x = 1$ β) $y = 1$ γ) $y = x$ δ) $y = -x$

ii) Η εξίσωση της δ_2 είναι α) $x = -1$ β) $y = -1$ γ) $y = x$ δ) $y = -x$

Απάντηση

Από τη θεωρία ξέρουμε ότι

i) γ διότι η ευθεία που διχοτομεί την πρώτη γωνία των αξόνων έχει τύπο $y = x$.

ii) δ διότι η ευθεία που διχοτομεί την δεύτερη γωνία των αξόνων έχει τύπο $y = -x$

Ερώτηση 5

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

i) Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(4, -3)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση

α) $y = 4$ β) $x = 4$ γ) $x = -3$ δ) $y = -3$ ε) $4x - 3y = 0$

ii) Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(4, -2)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ έχει εξίσωση

α) $y = 4$ β) $x = 4$ γ) $x = -2$ δ) $y = -2$ ε) $4x - 2y = 0$

Απάντηση

Από την θεωρία ξέρουμε ότι

i) δ) διότι η ϵ είναι παράλληλη στον $x'x$ οπότε είναι σταθερή και επειδή διέρχεται από το $(4, -3)$ τότε είναι $y = -3$.

ii) β) διότι η ευθεία ϵ που διέρχεται από το σημείο $(4, -2)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ είναι σταθερή και της μορφής $x = 4$.

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες

α) $\epsilon_1: 2x - y = 2$ β) $\epsilon_2: -4x + 2y = 10$ γ) $\epsilon_3: 10x - 5y = 20$

Τι παρατηρείτε ;

Λύση

Για να χαράξουμε τις ευθείες, βοηθάει να βρούμε τα σημεία τομής των συναρτήσεων με τους άξονες.

α) $\varepsilon_1 : 2x - y = 2$

για $x = 0$, $0 \cdot 2 - y = 2 \Leftrightarrow y = -2$

για $y = 0$, $2x - 0 = 2 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$

β) $\varepsilon_2 : -4x + 2y = 10 \Leftrightarrow -2x + y = 5$

για $x = 0$, $-2 \cdot 0 + y = 5 \Leftrightarrow y = 5$

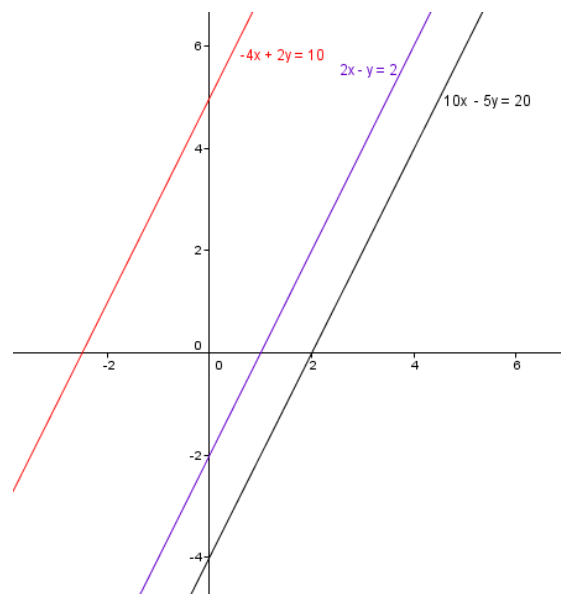
για $y = 0$, $-2x + 0 = 5 \Leftrightarrow x = -2,5$

γ) $\varepsilon_3 : 10x - 5y = 20 \Leftrightarrow 2x - y = 4$

για $x = 0$, $2 \cdot 0 - y = 4 \Leftrightarrow -5y = 10 \Leftrightarrow y = -2$

για $y = 0$, $2x - 0 = 4 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$

Παρατηρούμε ότι όλες οι παραπάνω ευθείες είναι παράλληλες.



Άσκηση 2

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : 6x + 2y = 8 - 2\lambda$

α) Να βρείτε τον αριθμό λ ώστε η ευθεία ε να διέρχεται από την αρχή των αξόνων

β) Για $\lambda = 4$ να σχεδιάσετε την ευθεία ε

Λύση

α) Η ευθεία ε να διέρχεται από την αρχή των αξόνων αν οι συντεταγμένες του

$O(0,0)$ ικανοποιούν τον τύπο της ε : $6x + 2y = 8 - 2\lambda$ Γι' αυτό αντικαθιστούμε $x = 0$, $y = 0$.

Προκύπτει ότι $6 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 8 - 2\lambda \Leftrightarrow 0 = 8 - 2\lambda$

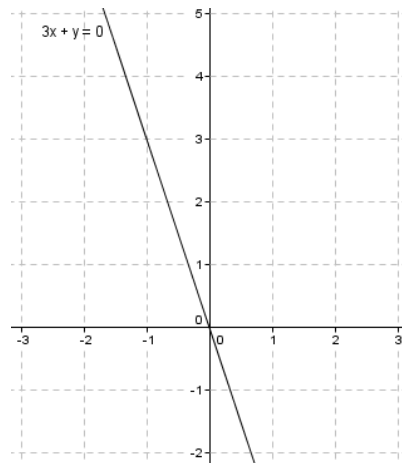
$\Leftrightarrow \lambda = 4$

β) Για $\lambda = 4$ έχουμε ότι $6x + 2y = 8 - 2 \cdot 4 \Leftrightarrow 6x +$

$2y = 0 \Leftrightarrow 3x + y = 0$

Για $x = 0$ έχουμε ότι $0 + y = 0 \Leftrightarrow y = 0$

Για $x = 1$ έχουμε ότι $3 \cdot 1 + y = 0 \Leftrightarrow y = -3$



Άσκηση 3

Αν η ευθεία ε : $4x + 3y = 12$ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A και B αντιστοίχως τότε:

α) Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες των A και B .

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου OAB , όπου O η αρχή των αξόνων

Λύση

α) Για $y = 0$ έχουμε ότι $4x + 0 \cdot 3 = 12 \Leftrightarrow$

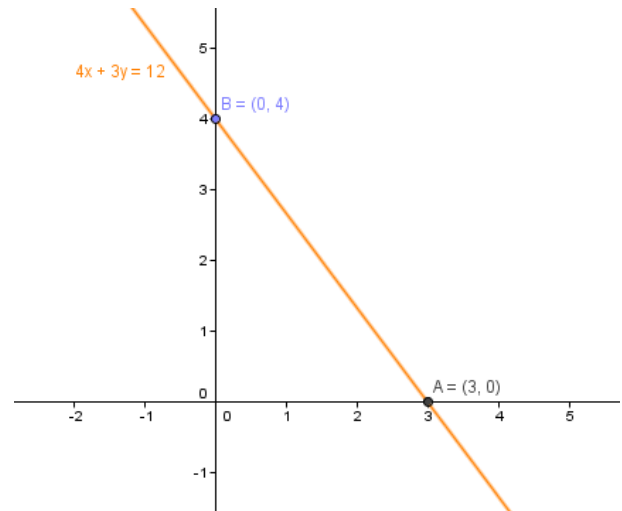
$$4x = 12 \Leftrightarrow x = 3$$

Άρα το πρώτο σημείο είναι το $A(3, 0)$

Για $x = 0$ η εξίσωση γίνεται $4 \cdot 0 + 3y = 12$

$$\Leftrightarrow 3y = 12 \Leftrightarrow y = 4$$

Επομένως $B(0, 4)$



β) Το τρίγωνο AOB είναι ορθογώνιο οπότε το εμβαδόν (AOB) του τριγώνου OAB είναι:

$$(AOB) = \frac{OA \cdot OB}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$$

Άσκηση 4

α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις ευθείες $\varepsilon_1: 2x = -4$, $\varepsilon_2: 3y = 6$ και να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του κοινού τους σημείου

β) Ποια από τις παρακάτω ευθείες διέρχεται από το προηγούμενο σημείο ;

$$\zeta_1: 2x - y = 6 \quad \zeta_2: 3x + y = 10 \quad \zeta_3: -5x + 3y = 16$$

Λύση

α) $\varepsilon_1: 2x = -4 \Leftrightarrow \varepsilon_1: x = -2$

$\varepsilon_2: 3y = 6 \Leftrightarrow \varepsilon_2: y = 2$

Οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι σταθερές.

Άρα το σημείο τομής είναι

το $A: (-2, 2)$

β) Για $x = -2, y = 2$

$\zeta_1: 2x - y = 6 \Leftrightarrow 2(-2) - 2 = 6$

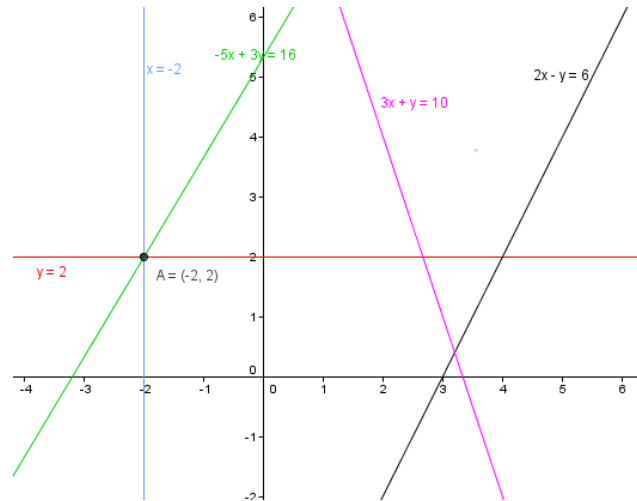
$\Leftrightarrow -4 - 2 = 6 \Leftrightarrow -6 = 6$ το

οποίο δεν ισχύει

$\zeta_2: 3x + y = 10 \Leftrightarrow 3(-2) + 2 = 10 \Leftrightarrow -6 + 2 = 10 \Leftrightarrow -4 = 10$ το οποίο δεν ισχύει

$\zeta_3: -5x + 3y = 16 \Leftrightarrow -5(-2) + 3 \cdot 2 = 16 \Leftrightarrow 10 + 6 = 16 \Leftrightarrow 16 = 16$ το οποίο

ισχύει. Η ζ_3 διέρχεται από το προηγούμενο σημείο



Άσκηση 5

α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις ευθείες με εξισώσεις

$x = -1, \quad x = 5, \quad y = -2 \quad \text{και} \quad y = 3$

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου που σχηματίζεται

Λύση

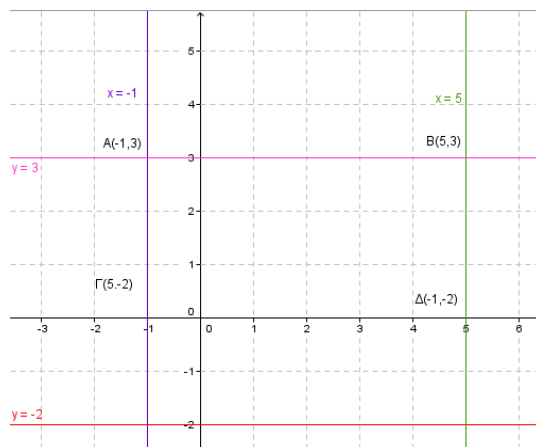
α) Τα σημεία τομής είναι τα:

$A(-1, 3)$, $B(5, 3)$, $\Gamma(5, -2)$ και $\Delta(-1, -2)$

β) Σχηματίζεται το ορθογώνιο ΑΒΓΔ.

Υπολογίζουμε την διαφορά των συντεταγμένων
και προκύπτει ότι $AB = \Delta\Gamma = 6$ και $A\Delta = B\Gamma = 5$

Άρα $E = \beta \cdot \alpha = AB \cdot A\Delta = 6 \cdot 5 = 30$



Άσκηση 6

Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η εξίσωση $(\lambda - 2)x + (\lambda - 1)y = 6$ να παριστάνει ευθεία που είναι

α) παράλληλη στον άξονα x' β) παράλληλη στον άξονα y'

Να σχεδιάσετε την αντίστοιχη ευθεία σε κάθε περίπτωση

Λύση

α) Για να είναι η ευθεία παράλληλη στον άξονα x' πρέπει η y να είναι σταθερή, άρα πρέπει $(\lambda - 2)x = 0$ για κάθε x .

Οπότε $\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$.

Άρα προκύπτει ότι $(2 - 1)y + 0 = 6 \Leftrightarrow y = 6$

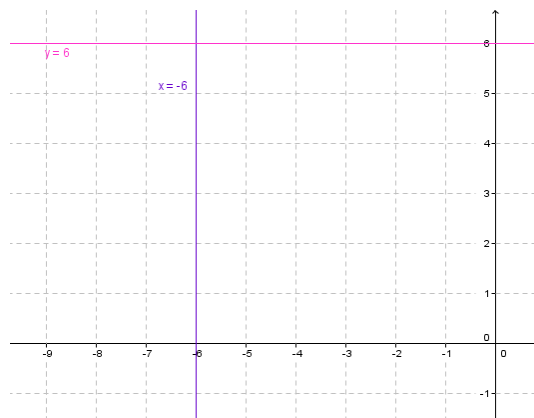
β) Για να είναι η ευθεία παράλληλη στον άξονα y'

πρέπει η x να είναι σταθερή, άρα πρέπει $(\lambda - 1)y = 0$

για κάθε y . $\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

Άρα προκύπτει ότι $(1 - 2)x + 0 = 6$

$\Leftrightarrow -x = 6 \Leftrightarrow x = -6$



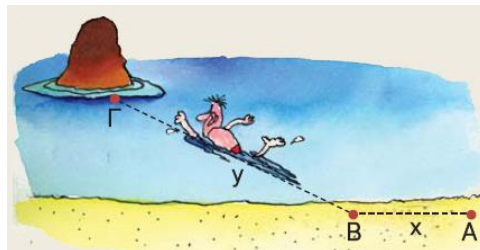
Άσκηση 7

Κάποιος περπάτησε από το σημείο Α στο σημείο Β με ταχύτητα 4 km/h και μετά κολύπησε με ταχύτητα 2 km/h μέχρι να φτάσει στο σημείο Γ.

Αν ο συνολικός

χρόνος που μεσολάβησε μέχρι να φτάσει στο σημείο Γ είναι μία ώρα, τότε

- Να βρείτε τη γραμμική εξίσωση με την οποία συνδέονται οι αποστάσεις x και y .
- Αν περπάτησε 3 km, πόσο χρόνο κολύπησε ;



Λύση

α) Έστω t_x ο χρόνος που χρειάστηκε κάποιος για να πάει από το Α στο Β, τότε ο χρόνος από το Β στο Γ είναι $t_y = 1 - t_x$, όπου 1 η ώρα που χρειάστηκε να μεταβούνε από το Α στο Γ.

Ο νόμος της κίνησης με σταθερή ταχύτητα είναι $L = ut$, όπου L η απόσταση, u η ταχύτητα και t ο χρόνος που χρειάστηκε για να διανύσει την απόσταση. Έτσι έχουμε ότι

$$AB = 4t_x \Leftrightarrow x = 4t_x \Leftrightarrow t_x = \frac{x}{4} \quad (1)$$

$$\text{και αντίστοιχα } BG = 2(1 - t_x) \Leftrightarrow y = 2(1 - t_x) \quad (2)$$

$$\text{Οπότε } (1), (2) \Rightarrow y = 2\left(1 - \frac{x}{4}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$\beta) \text{ Για } x = 3 \text{ από την } (1) \text{ προκύπτει ότι } t_x = \frac{3}{4}$$

Άρα ο χρόνος που διένυσε την απόσταση y είναι $t_y = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ της ώρας.

Άσκηση 8

Σ' έναν ξενώνα υπάρχουν x δίκλινα και y τρίκλινα δωμάτια. Αν ο ξενώνας έχει συνολικά 25 κρεβάτια, τότε να βρείτε την γραμμική εξίσωση που συνδέει τα x , y . Να χαράξετε σε τετραγωνισμένο χαρτί την αντίστοιχη ευθεία και από το σχήμα να διαπιστώσετε πόσα δίκλινα και πόσα τρίκλινα δωμάτια είναι δυνατόν να έχει ο ξενώνας.

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση τα x δίκλινα δωμάτια διαθέτουν $2x$ κρεβάτια και τα y τρίκλινα διαθέτουν $3y$ κρεβάτια τα οποία συνολικά είναι 25. Έτσι προκύπτει η εξίσωση $2x + 3y = 25$

Βρίσκουμε τα σημεία τομής της εξίσωσης με τους άξονες.

Για να τη σχεδιάσουμε βρίσκουμε δύο σημεία της ευθείας. Δίνουμε κάποιες τιμές στο x και

βρίσκουμε τις αντίστοιχες του y

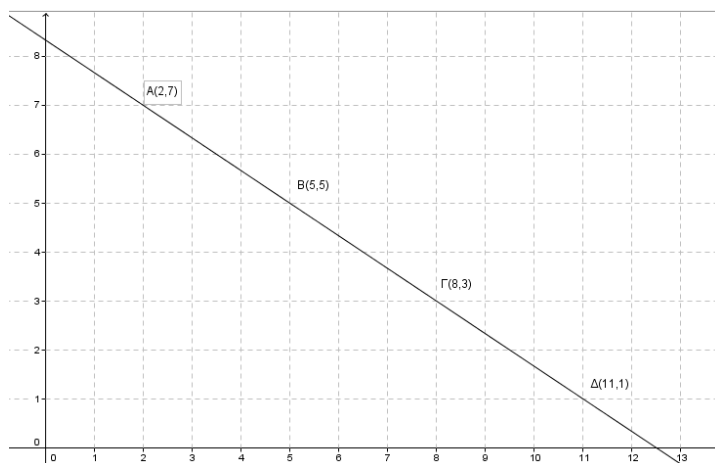
Για $x = 2$: $2 \cdot 2 + 3y = 25 \Leftrightarrow$

$3y = 21 \Leftrightarrow y = 7$. Η ευθεία διέρχεται από το σημείο $(2,7)$

Για $x = 5$: $2 \cdot 5 + 3y = 25 \Leftrightarrow 3y = 15 \Leftrightarrow y = 5$ Η ευθεία διέρχεται από το σημείο $(5,5)$

Στην πρώτη γωνία των αξόνων ($x > 0$ και $y > 0$) βρίσκουμε τα σημεία της ευθείας με ακαίρεες συνταταγμένες αφού ο αριθμός των δωματίων είναι θετικός ακέραιος.

Αυτά είναι τα: $A(2, 7)$, $B(5, 5)$, $\Gamma(8, 3)$ και $\Delta(11, 1)$.



Με βάση αυτά ο ξενώνας είναι δυνατόν να έχει:

A: 2 δίκλινα και 7 τρίκλινα δωμάτια

B: 5 δίκλινα και 5 τρίκλινα δωμάτια

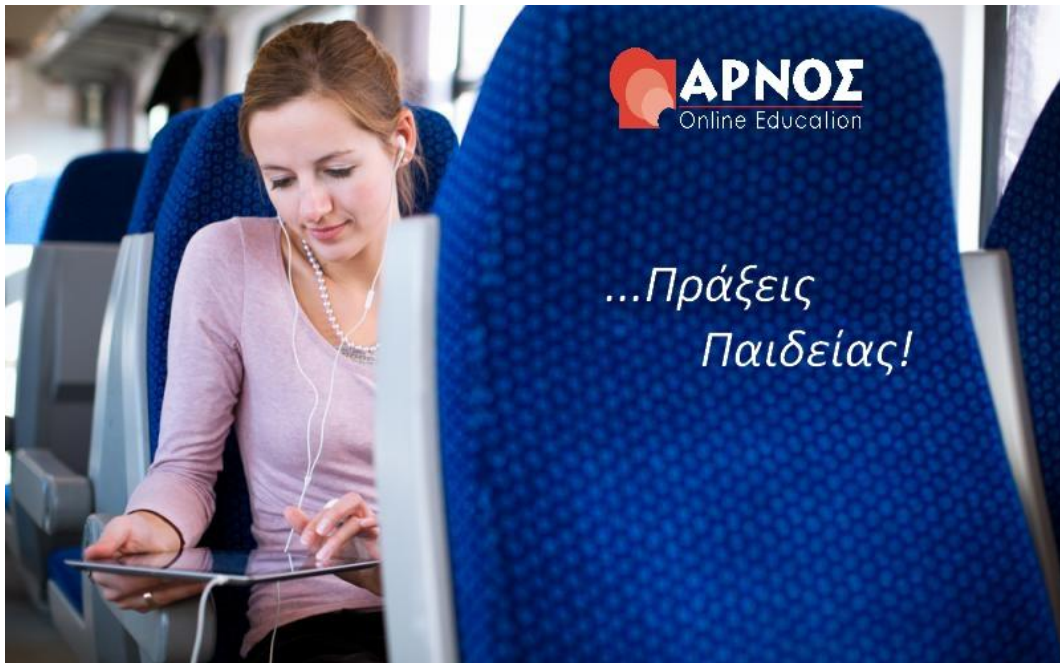
Γ: 8 δίκλινα και 3 τρίκλινα δωμάτια

Δ :11 δίκλινα δωμάτια και 1 τρίκλινο δωμάτιο

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης – ΜΕΔ - Μαθηματικός

Φροντιστηριακό e-μάθημα

Γυμνάσιο: 9.000 μαθήματα με βίντεο-διδασκαλία
για όλο το σχολικό έτος **μόνο με 150 ευρώ!**



Μελέτη όπου, όποτε και όσο εσύ θες!



Διδάσκουμε μεθοδικά σε βίντεο τη θεωρία του σχολικού βιβλίου και λύνουμε όλες τις ασκήσεις

Δημιουργούμε συνεχώς νέα βίντεο με διδασκαλία
για τις εκπαιδευτικές σου απαιτήσεις



Παίζουμε και μαθαίνουμε με on line test αξιολόγησης
& SOS διαγωνίσματα προσομοίωσης για τις εξετάσεις

Λύνουμε απορίες ζωντανά on line καθημερινά 3 μ.μ. - 8 μ.μ.





...Πράξεις Παιδείας!