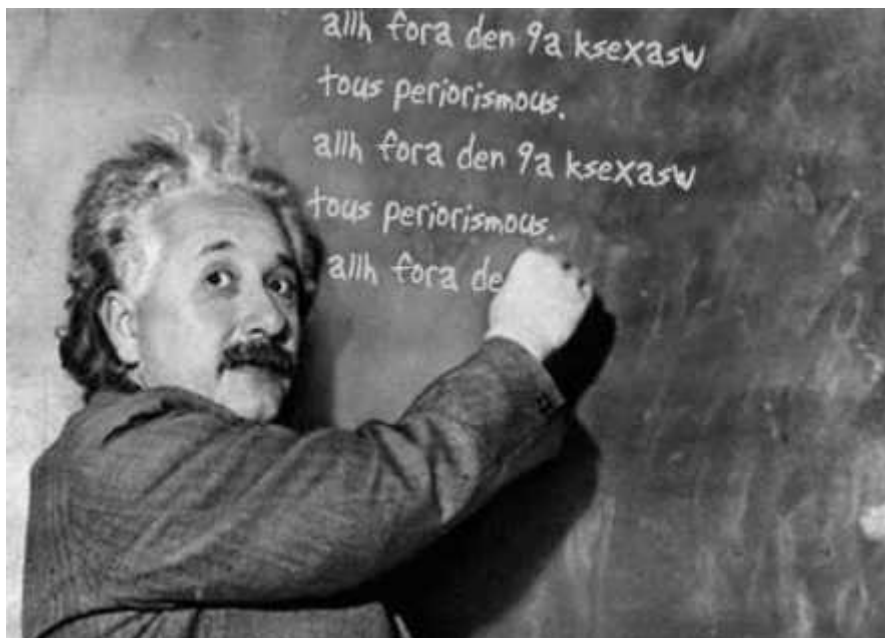


## 2. Εξιιώσεις – Ανισιώσεις



---

### *Λύσεις ασκήσεων Μαθηματικών Γ' Γυμνασίου*

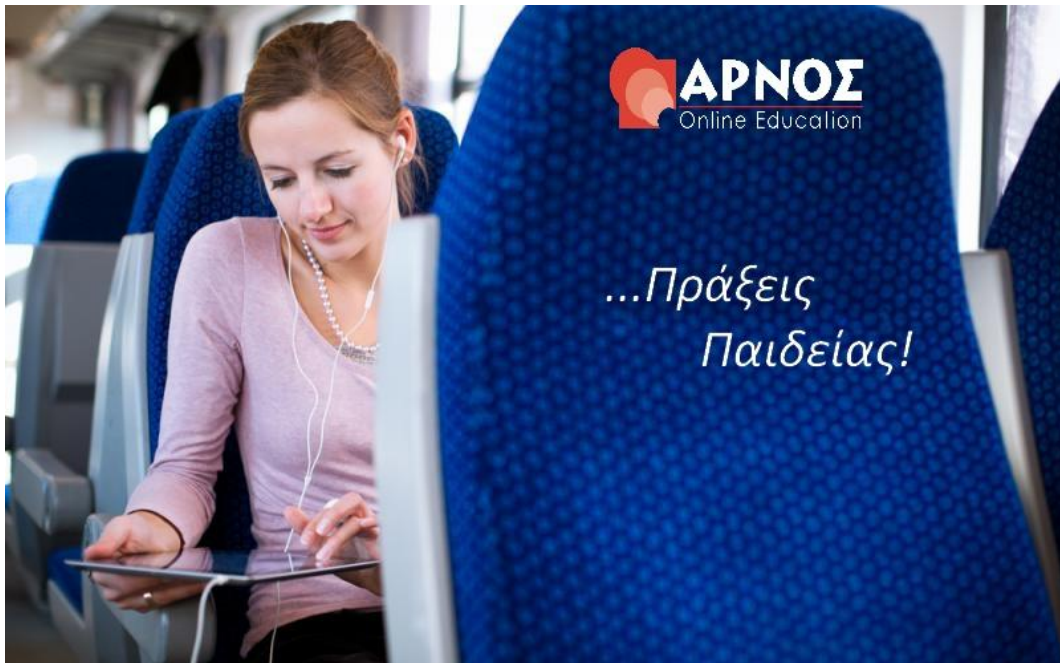
---

#### 2.4 Κλασματικές εξισώσεις

σχ. βιβλίο (σσ. 106-108)

# Φροντιστηριακό e-μάθημα

**Γυμνάσιο:** 9.000 μαθήματα με βίντεο-διδασκαλία  
για όλο το σχολικό έτος **μόνο με 150 ευρώ!**



**Μελέτη όπου, όποτε και όσο εσύ θες!**



Διδάσκουμε μεθοδικά σε βίντεο τη θεωρία του σχολικού βιβλίου και λύνουμε όλες τις ασκήσεις

Δημιουργούμε συνεχώς νέα βίντεο με διδασκαλία  
για τις εκπαιδευτικές σου απαιτήσεις



Παίζουμε και μαθαίνουμε με on line test αξιολόγησης  
& SOS διαγωνίσματα προσομοίωσης για τις εξετάσεις

Λύνουμε απορίες ζωντανά on line καθημερινά 3 μ.μ. - 8 μ.μ.



Λύσεις Ασκήσεων Μαθηματικών Γ' Γυμνασίου σχ. βιβλίου (σσ. 106-108)

## 2.4 Κλασματικές εξισώσεις

### Ερωτήσεις κατανόησης

#### Ερώτηση 1

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

α) Οι όροι της εξίσωσης  $\frac{6}{x-1} + \frac{4}{x} = 8$  ορίζονται αν  $x \neq 0$  και  $x \neq 1$

β) Ο αριθμός 0 είναι λύση της εξίσωσης  $\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x} = 2$

γ) Αν απαλείψουμε τους παρονομαστές της εξίσωσης

$$\frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} = 2, \text{ τότε αυτή γράφεται } 5x + 3 = 2$$

δ) Οι όροι της εξίσωσης  $\frac{x^3}{x^2 + 1} = x$  ορίζονται για

κάθε πραγματικό αριθμό  $x$  και ο αριθμός 0 είναι λύση της

#### Απάντηση

α) Είναι **σωστό** (Σ), διότι πρέπει ο παρονομαστής κάθε κλάσματος να είναι διάφορος του 0.

β) Είναι **λάθος** (Λ), διότι μηδενίζει τον παρονομαστή του δεύτερου κλάσματος.

γ) Είναι **λάθος** (Λ), διότι αφ' ενός πρέπει να πάρουμε περιορισμούς για να ορίζεται η εξίσωση και αφ' εταίρου αυτή γίνεται  $5x + 3 = 2x^2$

δ) Είναι **σωστό** (Σ), διότι  $x^2 + 1 > 0$  για κάθε  $x$  και για  $x = 0$  η εξίσωση επαληθεύεται.

## Ερώτηση 2

Αν διαιρέσουμε έναν αριθμό  $x$  με τον αριθμό που είναι κατά 2 μονάδες

μεγαλύτερος βρίσκουμε  $\frac{3}{4}$ . Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις εκφράζει την

παραπάνω πρόταση ;

$$\alpha) \frac{x}{2-x} = \frac{3}{4} \quad \beta) \frac{x+2}{x} = \frac{3}{4} \quad \gamma) \frac{x}{x+2} = \frac{3}{4} \quad \delta) \frac{x}{x-2} = \frac{3}{4}$$

## Απάντηση

Απλά διαιρούμε το  $x$  με το  $x+2$  και θα πρέπει το πηλίκο να είναι ίσο με  $\frac{3}{4}$ . Η

σωστή απάντηση είναι το  $\gamma$ .

## Ερώτηση 3

Η εξίσωση  $\frac{x+2}{x-1} + \frac{x+4}{x+1} = 6$  έχει ως λύση τον αριθμό

$$\alpha) x=1 \quad \beta) x=-1 \quad \gamma) x=0 \quad \delta) x=2$$

## Απάντηση

Πρέπει  $x-1 \neq 0$ ,  $x+1 \neq 0$ . Άρα  $x \neq 1$ ,  $x \neq -1$

Για  $x=0$ , έχουμε  $-2+4=6$  που δεν ισχύει

Για  $x=2$ , έχουμε  $4+2=6$  που ισχύει.

Οπότε η σωστή απάντηση είναι η  $\delta$

### Ερώτηση 4

Ένας μαθητής, για να λύσει την εξίσωση  $\frac{2x-1}{x-1} = \frac{1}{x-1}$ , έκανε απαλοιφή παρονομαστών και λύνοντας την εξίσωση  $2x-1=1$  που προέκυψε βρήκε ως λύση τον αριθμό  $x=1$ . Η απάντηση του είναι σωστή ;

### Απάντηση

Όχι διότι, πρέπει να πάρει περιορισμούς για τους παρονομαστές. Πρέπει  $x-1 \neq 0$   
 $\Leftrightarrow x \neq 1$ .

## Ασκήσεις

### Άσκηση 1

Να λύσετε τις εξισώσεις

α)  $\frac{2}{x-1} = \frac{1}{2}$

β)  $\frac{7}{2y-3} = -\frac{1}{3}$

γ)  $\frac{4\omega+1}{\omega-2} = \frac{9}{\omega-2}$

δ)  $\frac{7}{5\alpha} + \frac{3}{10} = \frac{2}{\alpha}$

ε)  $\frac{2x+1}{x-3} = 2 - \frac{7}{3-x}$

στ)  $1 - \frac{5}{y-2} = \frac{6-y}{2-y}$

### Λύση

Θα πρέπει σε όλες τις περιπτώσεις να βρούμε το ΕΚΠ των παρονομαστών και να πολλαπλασιάσουμε όλους τους όρους με αυτό, αλλά θα πρέπει να παίρνουμε περιορισμούς ώστε να ορίζονται τα κλάσματα σε κάθε περίπτωση.

α) Πρέπει  $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

$$\frac{2}{x-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(x-1) \frac{2}{x-1} = 2(x-1) \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4 = x-1 \Leftrightarrow x = 5$$

β)  $2\gamma - 3 \neq 0 \Leftrightarrow \gamma \neq \frac{3}{2}$

$$\frac{7}{2\gamma - 3} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3(2\gamma - 3) \frac{7}{2\gamma - 3} = -3(2\gamma - 3) \frac{1}{3} \Leftrightarrow 21 = -2\gamma + 3$$

$$\Leftrightarrow 2\gamma = -18 \Leftrightarrow \gamma = -9$$

γ) Πρέπει  $\omega - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \omega \neq 2$

$$\frac{4\omega + 1}{\omega - 2} = \frac{9}{\omega - 2} \Leftrightarrow (\omega - 2) \frac{4\omega + 1}{\omega - 2} = (\omega - 2) \frac{9}{\omega - 2} \Leftrightarrow$$

$$4\omega + 1 = 9 \Leftrightarrow 4\omega = 8 \Leftrightarrow \omega = 2$$

Το οποίο απορρίπτεται λόγω του περιορισμού. Άρα η εξίσωση δεν έχει λύση.

δ) Πρέπει  $10\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$

$$\frac{7}{5\alpha} + \frac{3}{10} = \frac{2}{\alpha} \Leftrightarrow 10\alpha \frac{7}{5\alpha} + 10\alpha \frac{3}{10} = 10\alpha \frac{2}{\alpha} \Leftrightarrow 14 + 3\alpha = 20$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 2$$

ε) Πρέπει  $x - 3 \neq 0, 3 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$

$$\frac{2x + 1}{x - 3} = 2 - \frac{7}{3 - x} \Leftrightarrow \frac{2x + 1}{x - 3} = 2 + \frac{7}{x - 3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x + 1}{x - 3} = 2 + \frac{7}{x - 3} \Leftrightarrow (x - 3) \frac{2x + 1}{x - 3} = 2(x - 3) + (x - 3) \frac{7}{x - 3} \Leftrightarrow$$

$$2x + 1 = 2x - 6 + 7 \Leftrightarrow 0x = 0$$

Που ισχύει για κάθε  $x \neq 3$

στ) Πρέπει  $y - 2 \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 2$

$$1 - \frac{5}{y-2} = \frac{6-y}{2-y} \Leftrightarrow 1 - \frac{5}{y-2} = -\frac{6-y}{y-2} \Leftrightarrow 1 - \frac{5}{y-2} = -\frac{6-y}{y-2}$$

$$\Leftrightarrow (y-2)1 - (y-2)\frac{5}{y-2} = -(y-2)\frac{6-y}{y-2} \Leftrightarrow y-2-5 = -(6-y)$$

$$\Leftrightarrow y-2-5 = -6+y \Leftrightarrow 0y = 1 \text{ Το οποίο είναι αδύνατο}$$

## Άσκηση 2

Να λύσετε τις εξισώσεις

α)  $\frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} = 1$

β)  $\frac{5}{y} + \frac{4}{y-1} = 2$

γ)  $\frac{7}{\omega} - \frac{3}{\omega+2} = \frac{6}{\omega^2}$

δ)  $\frac{4}{(\alpha-2)^2} - \frac{3}{\alpha-2} = 1$

ε)  $\frac{6}{x(x+3)} = \frac{x+2}{x} + \frac{x+1}{x+3}$

στ)  $\frac{y-1}{y} - \frac{2}{y+1} = \frac{y+3}{y(y+1)}$

## Λύση

Ομοίως με την προηγούμενη άσκηση, βρίσκουμε το ΕΚΠ και παίρνουμε περιορισμούς για τους παρονομαστές.

α) Πρέπει  $x^2 \neq 0$  άρα  $x \neq 0$

$$\frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 \frac{4}{x} - x^2 \frac{3}{x^2} = 1 x^2 \Leftrightarrow 4x - 3 = x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$$

β) Πρέπει  $y(y-1) \neq 0$  άρα  $y \neq 0$  και  $y \neq 1$

$$\frac{5}{y} + \frac{4}{y-1} = 2 \Leftrightarrow y(y-1) \frac{5}{y} + y(y-1) \frac{4}{y-1} = 2y(y-1)$$

$$\Leftrightarrow 5(y-1) + 4y = 2y(y-1) \Leftrightarrow 5y - 5 + 4y = 2y^2 - 2y$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 - 11y + 5 = 0$$

Βρίσκουμε διακρίνουσα και ρίζες

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 121 + 40 = 81 > 0$$

$$\text{Άρα έχει δύο ρίζες } y_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{11 + \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{11+9}{4} = 5 \text{ ή}$$

$$y_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{11 - \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{11-9}{4} = \frac{1}{2}$$

γ) Πρέπει  $\omega^2(\omega+2) \neq 0 \Leftrightarrow \omega \neq 0$  και  $\omega \neq -2$

$$\frac{7}{\omega} - \frac{3}{\omega+2} = \frac{6}{\omega^2} \Leftrightarrow \omega^2(\omega+2) \frac{7}{\omega} - \omega^2(\omega+2) \frac{3}{\omega+2} = \omega^2(\omega+2) \frac{6}{\omega^2}$$

$$\Leftrightarrow 7\omega(\omega+2) - 3\omega^2 = 6(\omega+2) \Leftrightarrow 7\omega^2 + 14\omega - 3\omega^2 = 6\omega + 12 \Leftrightarrow 4\omega^2 + 8\omega - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega^2 + 2\omega - 3 = 0 \Leftrightarrow (\omega - 1)(\omega + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega = 1 \text{ ή } \omega = -3$$

δ) Πρέπει  $(\alpha-2)^2 \neq 0$  άρα  $\alpha \neq 2$  τότε

$$\frac{4}{(\alpha-2)^2} - \frac{3}{\alpha-2} = 1 \Leftrightarrow (\alpha-2)^2 \frac{4}{(\alpha-2)^2} - (\alpha-2)^2 \frac{3}{\alpha-2} = 1(\alpha-2)^2$$

$$\Leftrightarrow 4 - 3(\alpha-2) = (\alpha-2)^2 \Leftrightarrow 4 - 3\alpha + 6 = \alpha^2 - 4\alpha + 4$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 6 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 3)(\alpha + 2) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3 \text{ ή } \alpha = -2$$



ε) Πρέπει  $x(x+3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0, x \neq -3$

$$\frac{6}{x(x+3)} = \frac{x+2}{x} + \frac{x+1}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow x(x+3) \frac{6}{x(x+3)} = x(x+3) \frac{x+2}{x} + x(x+3) \frac{x+1}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow 6 = (x+3)(x+2) + x(x+1) \Leftrightarrow 6 = x^2 + 2x + 3x + 6 + x^2 + x$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -3$$

Οι οποίες και απορρίπτονται λόγω των περιορισμών.

στ) Πρέπει  $y(y+1) \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 0, y \neq -1$

$$\frac{y-1}{y} - \frac{2}{y+1} = \frac{y+3}{y(y+1)}$$

$$\Leftrightarrow y(y+1) \frac{y-1}{y} - y(y+1) \frac{2}{y+1} = y(y+1) \frac{y+3}{y(y+1)}$$

$$\Leftrightarrow (y+1)(y-1) - 2y = y+3 \Leftrightarrow y^2 - 1 - 2y = y+3$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow (y-4)(y+1) = 0 \Leftrightarrow y = 4 \text{ ή } y = -1$$

Η  $y = -1$  απορρίπτεται λόγω των περιορισμών.

### Άσκηση 3

Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\alpha) \frac{x+5}{x^2-25} = \frac{3}{x+5}$$

$$\beta) \frac{y+1}{y^2-y-2} - \frac{1}{y-2} = 0$$

$$\gamma) \frac{\omega^2+5}{\omega^2-\omega} - \frac{\omega+5}{\omega-1} = \frac{1}{\omega}$$

$$\delta) \frac{1}{\alpha^2-2\alpha} + \frac{\alpha-1}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha-2}$$

### Λύση

Ομοίως, βρίσκουμε το ΕΚΠ και παίρνουμε περιορισμούς για τα κλάσματα.

**α)** Πρέπει  $x^2 - 25 = (x-5)(x+5) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 5, x \neq -5$

$$\frac{x+5}{x^2-25} = \frac{3}{x+5} \Leftrightarrow \frac{x+5}{(x+5)(x-5)} = \frac{3}{x+5} \Leftrightarrow \frac{x+5}{(x+5)(x-5)} = \frac{3}{x+5}$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(x+5) \frac{x+5}{(x+5)(x-5)} = (x-5)(x+5) \frac{3}{x+5}$$

$$\Leftrightarrow x+5 = 3(x-5) \Leftrightarrow x+5 = 3x-15 \Leftrightarrow 2x = 20 \Leftrightarrow x = 10$$

**β)** Πρέπει  $y^2 - y - 2 \neq 0 \Leftrightarrow (y-2)(y+1) \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 2, y \neq -1$

$$\frac{y+1}{y^2-y-2} - \frac{1}{y-2} = 0 \Leftrightarrow \frac{y+1}{(y-2)(y+1)} - \frac{1}{y-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y+1}{(y-2)(y+1)} - \frac{1}{y-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-2)(y+1) \frac{y+1}{(y-2)(y+1)} - (y-2)(y+1) \frac{1}{y-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow y+1 - (y+1) = 0 \Leftrightarrow 0y = 0$$

Το οποίο ισχύει για κάθε  $y \neq 2, y \neq -1$

**γ)** Πρέπει  $\omega^2 - \omega \neq 0 \Leftrightarrow \omega(\omega-1) \neq 0 \Leftrightarrow \omega \neq 0 \text{ και } \omega \neq 1$

$$\frac{\omega^2+5}{\omega^2-\omega} - \frac{\omega+5}{\omega-1} = \frac{1}{\omega} \Leftrightarrow \frac{\omega^2+5}{\omega(\omega-1)} - \frac{\omega+5}{\omega-1} = \frac{1}{\omega}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\omega^2+5}{\omega(\omega-1)} - \frac{\omega+5}{\omega-1} = \frac{1}{\omega}$$

$$\Leftrightarrow \omega(\omega-1) \frac{\omega^2+5}{\omega(\omega-1)} - \omega(\omega-1) \frac{\omega+5}{\omega-1} = \omega(\omega-1) \frac{1}{\omega}$$

$$\Leftrightarrow \omega^2+5 - \omega(\omega+5) = \omega-1 \Leftrightarrow \omega^2+5 - \omega^2-5 = \omega-1$$

$$\Leftrightarrow \omega-1=0 \Leftrightarrow \omega=1$$

Ρίζα που απορρίπτεται λόγω των περιορισμών.

$$\delta) \text{ Πρέπει } \alpha^2 - 2\alpha \neq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 2) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0, \alpha \neq 2$$

$$\frac{1}{\alpha^2 - 2\alpha} + \frac{\alpha - 1}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha - 2} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha(\alpha - 2)} + \frac{\alpha - 1}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha - 2} \Leftrightarrow$$

$$\alpha(\alpha - 2) \frac{1}{\alpha(\alpha - 2)} + \alpha(\alpha - 2) \frac{\alpha - 1}{\alpha} = \alpha(\alpha - 2) \frac{\alpha}{\alpha - 2} \Leftrightarrow$$

$$1 + (\alpha - 2)(\alpha - 1) = \alpha^2 \Leftrightarrow 1 + \alpha^2 - 2\alpha - \alpha + 2 = \alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$3 - 3\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

### Άσκηση 4

Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\alpha) 1 - \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2 - y} = 0$$

$$\beta) \frac{2\omega^2}{\omega^2 + 2\omega} = 3 - \frac{4}{\omega + 2}$$

$$\gamma) \frac{1}{x^2 - 4x + 4} = \frac{2x - 1}{x^2 - 4}$$

$$\delta) 1 + \frac{3\alpha}{\alpha - 2} = \frac{\alpha + 4}{\alpha^2 - 3\alpha + 2}$$

### Λύση

$$\alpha) \text{ Πρέπει } y(y - 1) \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 0, y \neq 1$$

$$1 - \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2 - y} = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{y} - \frac{1}{y(y - 1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$y(y - 1) \cdot 1 - y(y - 1) \frac{1}{y} - y(y - 1) \frac{1}{y(y - 1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$y(y - 1) - (y - 1) - 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 - y - y + 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow y(y - 2) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ή } y - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$y = 0 \text{ ή } y = 2$$

Η λύση  $y = 0$  απορρίπτεται λόγω των περιορισμών άρα μόνη λύση είναι η  $y = 2$ .

$$\beta) \frac{2\omega^2}{\omega^2 + 2\omega} = 3 - \frac{4}{\omega + 2} \Leftrightarrow \frac{2\omega^2}{\omega(\omega + 2)} = 3 - \frac{4}{\omega + 2}$$

ΕΚΠ =  $\omega(\omega + 2)$ , οπότε πρέπει  $\omega(\omega + 2) \neq 0$  άρα  $\omega \neq 0$  και  $\omega \neq -2$

$$\frac{2\omega^2}{\omega(\omega + 2)} = 3 - \frac{4}{\omega + 2} \quad \text{άρα} \quad \omega(\omega + 2) \cdot \frac{2\omega^2}{\omega(\omega + 2)} = 3\omega(\omega + 2) - \omega(\omega + 2) \cdot \frac{4}{\omega + 2}$$

$$2\omega^2 = 3\omega(\omega + 2) - 4\omega \Leftrightarrow 2\omega^2 = 3\omega^2 + 6\omega - 4\omega \Leftrightarrow$$

$$\omega^2 + 2\omega = 0 \Leftrightarrow \omega(\omega + 2) = 0 \Leftrightarrow \omega = 0 \quad \text{ή} \quad \omega + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\omega = 0 \quad \text{ή} \quad \omega = -2$$

Και οι δύο λύσεις απορρίπτονται λόγω των περιορισμών, άρα η εξίσωση δεν έχει λύσεις.

$$\gamma) \quad \text{Πρέπει} \quad x^2 - 4x + 4 \neq 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 \neq 0 \quad \text{και} \quad x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) \neq 0$$

Οπότε πρέπει  $(x - 2) \neq 0$ ,  $(x + 2) \neq 0$ , Οπότε πρέπει  $x \neq 2$  και  $x \neq -2$

$$\frac{1}{x^2 - 4x + 4} = \frac{2x - 1}{x^2 - 4} \Leftrightarrow \frac{1}{(x - 2)^2} = \frac{2x - 1}{(x - 2)(x + 2)} \Leftrightarrow$$

$$(x - 2)^2(x + 2) \cdot \frac{1}{(x - 2)^2} = (x - 2)^2(x + 2) \cdot \frac{2x - 1}{(x - 2)(x + 2)} \Leftrightarrow$$

$$x + 2 = (x - 2)(2x - 1) \Leftrightarrow x + 2 = 2x^2 - x - 4x + 2 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 3$$

$$\delta) \text{Πρέπει} \quad \alpha^2 - 3\alpha + 2 \neq 0, (\alpha - 1)(\alpha - 2) \neq 0 \quad \text{άρα} \quad \alpha \neq 1 \quad \text{και} \quad \alpha \neq 2$$

$$1 + \frac{3\alpha}{\alpha - 2} = \frac{\alpha + 4}{\alpha^2 - 3\alpha + 2} \Leftrightarrow 1 + \frac{3\alpha}{\alpha - 2} = \frac{\alpha + 4}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)} \Leftrightarrow$$

$$1(\alpha - 1)(\alpha - 2) + (\alpha - 1)(\alpha - 2) \cdot \frac{3\alpha}{\alpha - 2} = (\alpha - 1)(\alpha - 2) \cdot \frac{\alpha + 4}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)} \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - 1)(\alpha - 2) + 3\alpha(\alpha - 1) = \alpha + 4 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 - 2\alpha - \alpha + 2 + 3\alpha^2 - 3\alpha = \alpha + 4 \Leftrightarrow 4\alpha^2 - 7\alpha - 2 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-7)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2) = 81 > 0$$

Άρα έχει δύο ρίζες  $\alpha_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{7 + \sqrt{81}}{2 \cdot 4} = \frac{7+9}{8} = 2$  ή

$$\alpha_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{7 - \sqrt{81}}{2 \cdot 4} = \frac{7-9}{8} = -\frac{1}{4}$$

Η  $\alpha_1 = 2$  απορρίπτεται λόγω των περιορισμών

## Άσκηση 5

Να λύσετε τις εξισώσεις

α)  $\frac{x}{x - \frac{4}{x}} = \frac{4}{3}$

β)  $\frac{1}{1 + \frac{3}{x}} - \frac{2}{x-3} = \frac{x-6}{x^2-9}$

## Λύση

α) Πρέπει  $x \neq 0$  και  $x - \frac{4}{x} \neq 0$  οπότε  $x^2 - 4 \neq 0$

$$x - \frac{4}{x} \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$x-2 \neq 0, x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2, x \neq -2$$

Τελικά πρέπει  $x \neq 0$ ,  $x \neq 2$  και  $x \neq -2$ . Τότε έχουμε διαδοχικά

$$\frac{x}{x - \frac{4}{x}} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{x^2-4}{x}} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{(x-2)(x+2)} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$3(x-2)(x+2) \frac{x^2}{(x-2)(x+2)} = 3(x-2)(x+2) \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$3x^2 = 4(x-2)(x+2) \text{ ή } 3x^2 = 4x^2 - 16 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x+4) = 0 \Leftrightarrow x-4 = 0 \text{ ή } x+4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 4 \text{ ή } x = -4$$

β) Πρέπει  $x \neq 0$ ,  $1 + \frac{3}{x} \neq 0$ ,  $x^2 - 9 \neq 0$

$$1 + \frac{3}{x} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x+3}{x} \neq 0 \text{ πρέπει } x \neq 0 \text{ και } x \neq -3$$

$$x^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3 \text{ και } x \neq 3$$

Τελικά πρέπει  $x \neq 0$ ,  $x \neq 3$  και  $x \neq -3$ . Τότε έχουμε διαδοχικά

$$\frac{1}{1 + \frac{3}{x}} - \frac{2}{x-3} = \frac{x-6}{x^2-9} \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{x+3}{x}} - \frac{2}{x-3} = \frac{x-6}{(x-3)(x+3)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{x+3} - \frac{2}{x-3} = \frac{x-6}{(x-3)(x+3)} \Leftrightarrow$$

$$(x-3)(x+3) \frac{x}{x+3} - (x-3)(x+3) \frac{2}{x-3} = (x-3)(x+3) \frac{x-6}{(x-3)(x+3)} \Leftrightarrow$$

$$(x-3)x - (x+3) \cdot 2 = x-6 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 2x - 6 = x-6 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(x-6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \quad \text{ή} \quad x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 6$$

Η λύση  $x = 0$  απορρίπτεται λόγω των περιορισμών

## Άσκηση 6

Να λύσετε τους τύπους

α)  $\rho = \frac{m}{V}$  ως προς  $V$

β)  $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$  ως προς  $R$

γ)  $R = \rho \frac{\ell}{S}$  ως προς  $S$

δ)  $\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$  ως προς  $T_1$

ε)  $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$  ως προς  $R$

στ)  $\frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$  ως προς  $\alpha$

ζ)  $\frac{1}{v_a^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$  ως προς  $v_a^2$

η)  $S = \frac{\alpha}{1-\lambda}$  ως προς  $\lambda$

### Λύση

Σε αυτούς τους τύπους των Μαθηματικών και των Φυσικών επιστημών κάθε φορά θεωρούμε ότι εκτός από το προτεινόμενο μέγεθος που θεωρείται άγνωστο όλα τα άλλα είναι γνωστά. Έτσι έχουμε να λύσουμε μια εξίσωση με έναν άγνωστο.

$$\alpha) \rho = \frac{m}{V} \Leftrightarrow \rho V = m \Leftrightarrow V = \frac{m}{\rho}$$

$$\beta) E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R} \Leftrightarrow 4ER = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \Leftrightarrow R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4E}$$

$$\gamma) R = \rho \frac{\ell}{S} \Leftrightarrow RS = \rho \ell \Leftrightarrow S = \frac{\rho \ell}{R}$$

$$\delta) \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \Leftrightarrow P_1 V_1 T_2 = P_2 V_2 T_1 \Leftrightarrow T_1 = \frac{P_1 V_1 T_2}{P_2 V_2}$$

$$\epsilon) \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Leftrightarrow RR_1 R_2 \frac{1}{R} = RR_1 R_2 \frac{1}{R_1} + RR_1 R_2 \frac{1}{R_2}$$

$$R_1 R_2 = RR_2 + RR_1 \Leftrightarrow R_1 R_2 = R (R_2 + R_1) \Leftrightarrow R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\sigma) \frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma \frac{2}{\beta} = \alpha\beta\gamma \frac{1}{\alpha} + \alpha\beta\gamma \frac{1}{\gamma} \Leftrightarrow$$

$$2\alpha\gamma = \beta\gamma + \alpha\beta \Leftrightarrow 2\alpha\gamma - \alpha\beta = \beta\gamma \Leftrightarrow \alpha(2\gamma - \beta) = \beta\gamma \Leftrightarrow \alpha = \frac{\beta\gamma}{2\gamma - \beta}$$

$$\zeta) \frac{1}{v_a^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} \Leftrightarrow \beta^2 \gamma^2 v_a^2 \frac{1}{v_a^2} = \beta^2 \gamma^2 v_a^2 \frac{1}{\beta^2} + \beta^2 \gamma^2 v_a^2 \frac{1}{\gamma^2}$$

$$\beta^2 \gamma^2 = \gamma^2 v_a^2 + \beta^2 v_a^2 \Leftrightarrow \beta^2 \gamma^2 = (\gamma^2 + \beta^2) v_a^2 \Leftrightarrow v_a^2 = \frac{\beta^2 \gamma^2}{\beta^2 + \gamma^2}$$

$$\eta) S = \frac{\alpha}{1-\lambda} \Leftrightarrow (1-\lambda)S = (1-\lambda) \frac{\alpha}{1-\lambda} \Leftrightarrow (1-\lambda)S = \alpha \Leftrightarrow$$

$$S - \lambda S = \alpha \Leftrightarrow S - \alpha = \lambda S \Leftrightarrow \lambda = \frac{S-\alpha}{S}$$

### Άσκηση 7

α) Να βρείτε δύο αντίστροφους αριθμούς που έχουν άθροισμα  $\frac{17}{4}$

β) Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε στους όρους του κλάσματος  $\frac{3}{5}$  για να

βρούμε τον αριθμό  $\frac{4}{5}$

γ) Να βρείτε δύο διαδοχικούς άρτιους φυσικούς αριθμούς που να έχουν λόγο  $\frac{3}{4}$

### Λύση

Εδώ προσπαθούμε να εκφράσουμε στη γλώσσα των Μαθηματικών αυτό που περιγράφεται στη φυσική μας γλώσσα με σκοπό να φτιάξουμε μια εξίσωση η λύση της οποίας θα λύνει το πρόβλημα.

α) Έστω ο ζητούμενος αριθμός  $x$  και  $\frac{1}{x}$  ο αντίστροφός του. Προφανώς πρέπει

$$x \neq 0.$$

$$\text{Σύμφωνα με τα δεδομένα } x + \frac{1}{x} = \frac{17}{4} \Leftrightarrow 4x \cdot x + 4x \cdot \frac{1}{x} = 4x \cdot \frac{17}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4 = 17x \Leftrightarrow 4x^2 - 17x + 4 = 0$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα την

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-17)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = 225 > 0$$



Άρα έχει δύο ρίζες  $x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{17 + \sqrt{225}}{2 \cdot 4} = \frac{17 + 15}{8} = 4$  ή

$$x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{17 - \sqrt{225}}{2 \cdot 4} = \frac{17 - 15}{8} = \frac{1}{4}$$

β) Έστω  $x$  ο ζητούμενος αριθμός. Τότε το κλάσμα  $\frac{3}{5}$  θα γίνει  $\frac{3+x}{5+x}$

και θα πρέπει  $x + 5 \neq 0$  άρα  $x \neq -5$ . Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{3+x}{5+x} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 5(x+5) \frac{3+x}{5+x} = 5(x+5) \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5(3+x) = 4(x+5) \Leftrightarrow 15 + 5x = 4x + 20 \Leftrightarrow x = 5$$

γ) Θεωρώ  $2x$  είναι ένας άρτιος αριθμός, ο επόμενος άρτιος θα είναι ο  $2x + 2$  και ο

λόγος τους θα είναι  $\frac{2x}{2x+2}$  για αυτό θα πρέπει

$$2x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \quad \text{Τότε έχουμε διαδοχικά:}$$

$$\frac{2x}{2x+2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4(2x+2) \frac{2x}{2x+2} = 4(2x+2) \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 8x = 3(2x+2) \Leftrightarrow 8x = 6x + 6$$

$$\Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$$

Άρα οι άρτιοι αριθμοί είναι οι:  $2x = 2 \cdot 3 = 6$  και  $2x + 2 = 2 \cdot 3 + 2 = 8$

### Άσκηση 8

Τα έξοδα ενός γεύματος ήταν 84 €. Μεταξύ των ατόμων που γευμάτισαν ήταν και 3 παιδιά, οπότε οι υπόλοιποι ενήλικες συμφώνησαν, προκειμένου να καλύψουν τα έξοδα των παιδιών, να πληρώσει ο καθένας 9 € παραπάνω από αυτά που έπρεπε να πληρώσει. Πόσα ήταν τα άτομα που γευμάτισαν;



### Λύση

Θεωρώ  $x$  το σύνολο των ανθρώπων που γευμάτισαν

Τα 84 € θα πληρώσουν  $x - 3$  άτομα και το κάθε άτομο θα πληρώσει  $\frac{84}{x-3}$  για  $x > 3$

Κανονικά θα πλήρωναν  $\frac{84}{x}$  € αλλά για να υπερκαλύψουν το κόστος θα πρέπει να

πληρώσουν 9 € παραπάνω. Άρα προκύπτει ότι  $\frac{84}{x} + 9 = \frac{84}{x-3}$

$$\frac{84}{x} + 9 = \frac{84}{x-3} \Leftrightarrow x(x-3) \frac{84}{x} + 9x(x-3) = x(x-3) \frac{84}{x-3}$$

$$\Leftrightarrow 84(x-3) + 9x(x-3) = 84x \Leftrightarrow 84x - 252 + 9x^2 - 27x = 84x$$

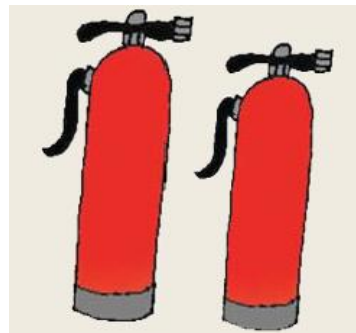
$$\Leftrightarrow 9x^2 - 27x - 252 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 28 = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-7) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=7 \text{ ή } x=-4$$

Το  $-4$  απορρίπτεται γιατί  $x > 3$ . Οπότε γευμάτισαν 7 άτομα

### Άσκηση 9

Ο διαχειριστής μιας πολυκατοικίας αγόρασε πυροσβεστήρες για την πυρασφάλεια του κτηρίου και έδωσε 240 €. Πριν από λίγα χρόνια που η τιμή του πυροσβεστήρα ήταν 4 € μικρότερη, με τα ίδια χρήματα θα αγόραζε δύο πυροσβεστήρες περισσότερους. Να βρείτε πόσους πυροσβεστήρες αγόρασε



### Λύση

Θεωρούμε  $x$  τον αριθμό των πυροσβεστήρων,  $x > 0$

Το σημερινό κόστος είναι  $\frac{240}{x}$  €.

Πριν από λίγα χρόνια θα αγόραζε  $x + 2$  για 240€ με τιμή πυροσβεστήρα  $\frac{240}{x + 2}$ ,

αξία που είναι κατά 4€ μικρότερη από την σημερινή άρα ισχύει  $\frac{240}{x} = \frac{240}{x + 2} + 4$

$$\frac{240}{x} = \frac{240}{x + 2} + 4 \Leftrightarrow x(x + 2) \frac{240}{x} = x(x + 2) \frac{240}{x + 2} + 4x(x + 2)$$

$$\Leftrightarrow 240(x + 2) = 240x + 4x^2 + 8x \Leftrightarrow 240x + 480 = 240x + 4x^2 + 8x$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 8x - 480 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 120 = 0 \Leftrightarrow (x + 12)(x - 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 10 \text{ ή } x = -12$$

Η λύση  $x = -12$  απορρίπτεται γιατί  $x > 0$ . Άρα αγόρασε 10 πυροσβεστήρες.

### Άσκηση 10

Αναμειγνύουμε 12gr ενός διαλύματος Α με 15gr ενός διαλύματος Β και σχηματίζουμε 25 cm<sup>3</sup> ενός διαλύματος Γ.

Να βρεθεί η πυκνότητα του διαλύματος Α, αν η πυκνότητα του διαλύματος Β είναι 0,2 gr/cm<sup>3</sup> μικρότερη.

### Λύση

Επιλύουμε τον τύπο της πυκνότητας  $d = \frac{m}{V}$  ως προς τον όγκο  $V$  και έχουμε

$$\rho = \frac{m}{V} \Leftrightarrow \rho V = m \Leftrightarrow V = \frac{m}{\rho}$$

Θεωρούμε  $d_1, V_1$  την πυκνότητα και τον όγκο του διαλύματος Α και  $d_2, V_2$  την πυκνότητα και τον όγκο του διαλύματος Β, άρα έχουμε  $V_A = \frac{12}{d_1}$ ,  $V_2 = \frac{15}{d_2}$

Όμως από την υπόθεση ισχύει ότι  $d_2 = d_1 - 0,2 > 0$

Άρα ο όγκος του διαλύματος Β ως συνάρτηση του Α είναι  $V_2 = \frac{15}{d_1 - 0,2}$

Επειδή  $V_1 + V_2 = 25$  θα έχουμε  $\frac{12}{d_1} + \frac{15}{d_1 - 0,2} = 25$

$$\frac{12}{d_1} + \frac{15}{d_1 - 0,2} = 25 \Leftrightarrow d_1(d_1 - 0,2) \frac{12}{d_1} + d_1(d_1 - 0,2) \frac{15}{d_1 - 0,2} = 25 d_1(d_1 - 0,2) \Leftrightarrow$$

$$12(d_1 - 0,2) + 15 d_1 = 25 d_1(d_1 - 0,2) \Leftrightarrow 12d_1 - 2,4 + 15 d_1 = 25 d_1^2 - 5d_1$$

$$\Leftrightarrow 25 d_1^2 - 32d_1 + 2,4 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-32)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 2,4 = 784 > 0$$

$$\text{Άρα έχει δύο ρίζες } d_{11} = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{32 + \sqrt{784}}{2 \cdot 25} = \frac{32 + 28}{50} = 1,2 \text{ ή}$$

$$d_{12} = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{32 - \sqrt{784}}{2 \cdot 25} = \frac{32 - 28}{50} = 0,08$$

Η  $d_{12} = 0,08$  απορρίπτεται διότι  $d_1 > 0,2$ . Άρα η πυκνότητα του διαλύματος Α είναι  $d_1 = 1,2 \text{ gr/cm}^3$

### Άσκηση 11

Οι υπάλληλοι μιας βιοτεχνίας έπρεπε να συσκευάσουν 120 προϊόντα μιας παραγγελίας. Απουσίασαν όμως 2 υπάλληλοι, οπότε καθένας από τους υπόλοιπους υπαλλήλους υποχρεώθηκε να συσκευάσει 3 προϊόντα παραπάνω για να καλυφθεί η παραγγελία. Να βρείτε πόσοι είναι οι υπάλληλοι της βιοτεχνίας .

### Λύση

Θεωρούμε  $x$  τον (αρχικό) αριθμό υπαλλήλων. Τότε  $x - 2$  θα είναι το πλήθος όσων έμειναν για να συσκευάσουν τα προϊόντα.

Αρχικά κάθε ένας έπρεπε να συσκευάσει  $\frac{120}{x}$  προϊόντα και λόγω απουσίας δύο

υπαλλήλων, κάθε υπάλληλος που έμεινε πρέπει να συσκευάσει  $\frac{120}{x-2}$  προϊόντα.

Εφόσον οι λιγότεροι θα πρέπει να συσκευάσουν 3 κιβώτια παραπάνω ο καθένας, τότε προσθέτουμε στο  $\frac{120}{x}$  τον αριθμό 3. Οπότε προκύπτει ότι  $\frac{120}{x} + 3 = \frac{120}{x-2}$

με  $x$  και  $x - 2 > 0$

$$\frac{120}{x} + 3 = \frac{120}{x-2} \Leftrightarrow 3x(x-2) + x(x-2) \frac{120}{x} = x(x-2) \frac{120}{x-2} \Leftrightarrow$$

$$3x(x-2) + 120(x-2) = 120x \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 120x - 240 = 120x \Leftrightarrow$$

$$3x^2 - 6x - 240 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 80 = 0 \Leftrightarrow (x+8)(x-10) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 10 \text{ ή } x = -8$$

Η  $x = -8$  απορρίπτεται ως αρνητικός αριθμός. Άρα  $x = 10$

## Άσκηση 12

Οι φίλαθλοι μιας ομάδας ταξιδεύοντας με ένα πούλμαν έπρεπε να διανύσουν μια απόσταση 210 km για να δουν την αγαπημένη τους ομάδα. Υπολόγιζαν να φτάσουν στον προορισμό τους μισή ώρα πριν την έναρξη του αγώνα. Ο οδηγός όμως λόγω ολισθηρότητας του δρόμου μείωσε τη μέση ταχύτητα κατά 10 km / h και έτσι έφτασαν στο γήπεδο ακριβώς την ώρα που άρχιζε ο αγώνας. Να βρείτε τη μέση ταχύτητα με την οποία διάνυσαν τελικά την απόσταση.



## Λύση

Θεωρούμε ταχύτητα  $x$  (km / h) την ταχύτητα του πούλμαν μετά την ελάττωση της. Τότε η προβλεπόμενη αρχική ταχύτητα θα ήταν  $x + 10$

Ο χρόνος στον οποίο θα έφτασε το πούλμαν στον αγώνα είναι  $t_1 = \frac{210}{x}$  ώρες

Ο χρόνος στον οποίο το πούλμαν θα έφτανε στον αγώνα εάν δε μείωνε ταχύτητα είναι

$t_2 = \frac{210}{x + 10}$  ώρες. Επειδή το πούλμαν άργησε μισή ώρα να φτάσει στο προορισμό

του θα ισχύει  $t_2 = t_1 - \frac{1}{2} \text{ h} = t_1 - \frac{1}{2}$

Οπότε προκύπτει ότι  $\frac{210}{x + 10} = \frac{210}{x} - \frac{1}{2}$

$$\frac{210}{x + 10} = \frac{210}{x} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x(x + 10) \frac{210}{x + 10} = 2x(x + 10) \frac{210}{x} - 2x(x + 10) \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$420x = 420(x + 10) - x(x + 10) \Leftrightarrow 420x = 420x + 4200 - x^2 - 10x \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 10x - 4200 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4200) = 16900 > 0$$

$$\text{Άρα έχει δύο ρίζες } x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-10 + \sqrt{16900}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 + 130}{2} = 60 \quad \text{ή}$$

$$x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-10 - \sqrt{16900}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 - 130}{2} = -70$$

Άρα  $x = 60$  km/h διότι δεχόμαστε ότι η ταχύτητα παίρνει θετικό πρόσημο.

Επιμέλεια: Βασίλης Γκμίσσης – MED - Μαθηματικός



**...Πράξεις Παιδείας!**