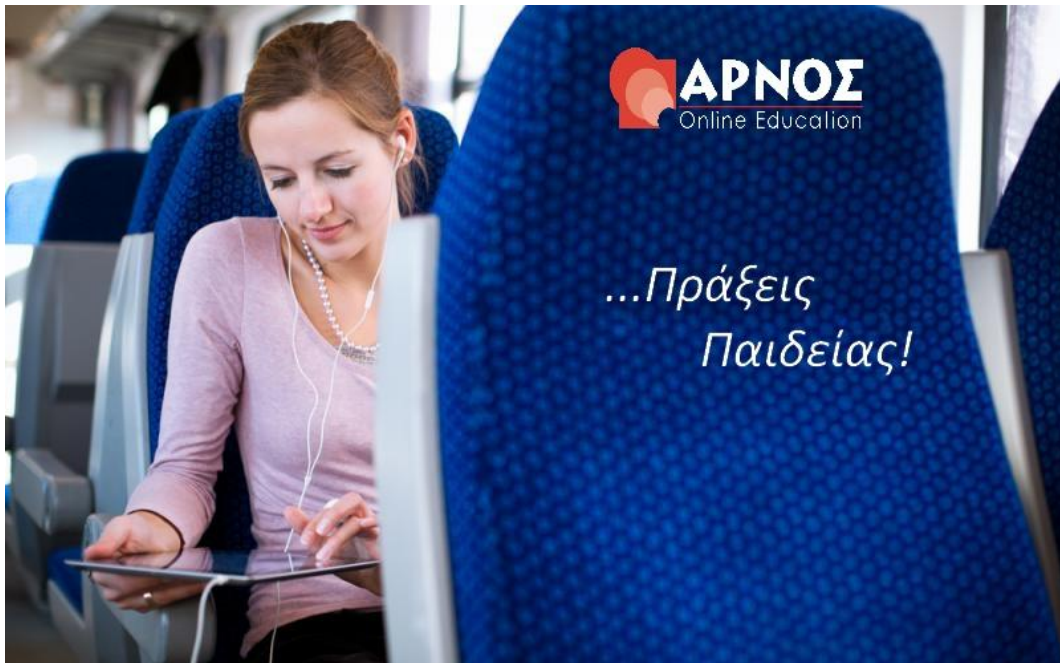


[illegible]

 APNOS
Online Education

Φροντιστηριακό e-μάθημα

Γυμνάσιο: 9.000 μαθήματα με βίντεο-διδασκαλία
για όλο το σχολικό έτος **μόνο με 150 ευρώ!**



Μελέτη όπου, όποτε και όσο εσύ θες!



Διδάσκουμε μεθοδικά σε βίντεο τη θεωρία του σχολικού βιβλίου και λύνουμε όλες τις ασκήσεις

Δημιουργούμε συνεχώς νέα βίντεο με διδασκαλία
για τις εκπαιδευτικές σου απαιτήσεις



Παίζουμε και μαθαίνουμε με on line test αξιολόγησης
& SOS διαγωνίσματα προσομοίωσης για τις εξετάσεις

Λύνουμε απορίες ζωντανά on line καθημερινά 3 μ.μ. - 8 μ.μ.



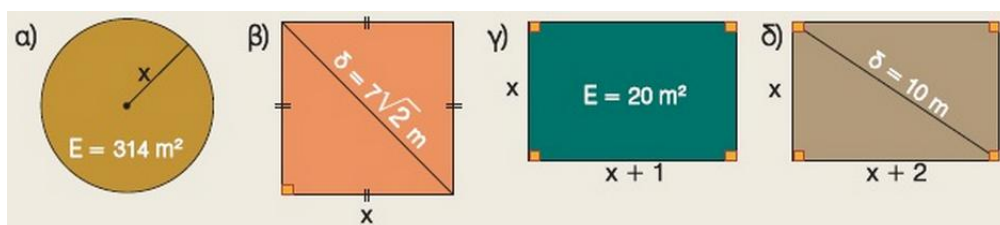
Λύσεις Ασκήσεων Μαθηματικών Γ' Γυμνασίου σχ. βιβλίου (σσ. 101-102)

2.3 Προβλήματα εξισώσεων

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να υπολογίσετε το x σε κάθε μία από τις περιπτώσεις



Λύση

α) $E = \pi r^2$ οπότε υπολογίζουμε $314 = 3,14 x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{314}{3,14} = 100$

οπότε $x = 10$ αφού $x \geq 0$

β) Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα $x^2 + x^2 = \delta^2$

$$x^2 + x^2 = \delta^2 \Leftrightarrow 2x^2 = \delta^2 \Leftrightarrow 2x^2 = (7\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 49 \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 49 \Leftrightarrow x = 7 \text{ αφού } x \geq 0$$

γ) $E = x(x + 1)$ Οπότε $20 = x^2 + x$

$$20 = x^2 + x \Leftrightarrow x^2 + x - 20 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ή } x = -5$$

Άρα $x = 4$, διότι $x \geq 0$

δ) Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα $\delta^2 = x^2 + (x + 2)^2$
 $\delta^2 = x^2 + (x + 2)^2 \Leftrightarrow 100 = x^2 + x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 96 = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 48 = 0 \Leftrightarrow (x - 6)(x + 8) = 0 \Leftrightarrow x = 6 \text{ ή } x = -8$
Άρα $x = 6$ αφού $x \geq 0$.

Άσκηση 2

Να βρείτε έναν θετικό αριθμό, τέτοιον ώστε

- α) Το μισό του τετραγώνου του να είναι ίσο με το διπλάσιο του.
β) Το γινόμενο του με έναν αριθμό που είναι κατά 2 μικρότερος να είναι ίσο με 24.
γ) Το διπλάσιο του τετραγώνου του, να είναι κατά 3 μεγαλύτερο από το πενταπλάσιό του.

Λύση

Θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε εξίσωση βάζοντας x το ζητούμενο θετικό αριθμό, την οποία στη συνέχεια θα λύσουμε για να βρούμε το x .

α) $\frac{x^2}{2} = 2x \Leftrightarrow x^2 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 4$ Άρα $x = 4$ γιατί ψάχνουμε θετικό αριθμό

β) $x(x - 2) = 24$ Οπότε $x^2 - 2x - 24 = 0 \Leftrightarrow (x + 4)(x - 6) = 0$

$\Leftrightarrow x = 6 \text{ ή } x = -4$. Άρα $x = 6$ γιατί ψάχνουμε θετικό αριθμό

γ) $2x^2 = 5x + 3$ άρα $2x^2 - 5x - 3 = 0$.

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 49 > 0$

Άρα έχει δύο ρίζες $x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{5 + \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{5 + 7}{4} = 3 \text{ ή }$

$$x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{5 - \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{5 - 7}{4} = -\frac{1}{2}$$

Άρα $x = 3$ γιατί ψάχνουμε θετικό αριθμό

Άσκηση 3

Η χωρητικότητα ενός δοχείου λαδιού είναι 10 λίτρα. Αν το δοχείο έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με ύψος 2,5 dm και βάση τετράγωνο, να βρείτε το μήκος της πλευράς του (1λίτρο = 1dm³)

Λύση

Αν x dm είναι η πλευρά της τετραγωνικής βάσης και h το ύψος, τότε ο όγκος V του παραλληλεπιπέδου είναι $V = h \cdot x^2$ άρα $10 = 2,5x^2$
 $10 = 2,5 \cdot x^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ dm (διότι $x \geq 0$)

Άσκηση 4

Ένα οικόπεδο έχει σχήμα ορθογωνίου με εμβαδόν 150 m². Αν το μήκος του είναι 5 m μεγαλύτερο από το πλάτος του, να βρείτε πόσα μέτρα συρματοπλέγμα χρειάζονται για την περίφραξή του.

Λύση

Θεωρούμε πλάτος x m και τότε το μήκος θα είναι $(x + 5)$ m

Το εμβαδόν είναι $E = x(x + 5)$ Άρα $150 = x^2 + 5x \Leftrightarrow x^2 + 5x - 150 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 10)(x + 15) = 0 \Leftrightarrow x = 10$ ή $x = -15$

Οπότε $x = 10$ m, αφού $x \geq 0$

Άρα θα χρειαστούν $10 + 15 + 10 + 15 = 50$ m συρματοπλέγμα

Άσκηση 5

Να βρείτε δύο διαδοχικούς περιττούς ακέραιους που το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 74 .

Λύση

Θεωρούμε δύο διαδοχικούς περιττούς ακέραιους: $2n + 1, 2n + 3$

Επειδή το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 74 έχουμε:

$$(2n + 1)^2 + (2n + 3)^2 = 74$$

$$(2n + 1)^2 + (2n + 3)^2 = 74 \Leftrightarrow 4n^2 + 4n + 1 + 4n^2 + 12n + 9 - 74 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8n^2 + 16n - 64 = 0 \Leftrightarrow n^2 + 2n - 8 = 0 \Leftrightarrow (n + 4)(n - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow n = -4 \text{ ή } n = 2$$

Για $n = -4$ οι διαδοχικοί περιττοί ακέραιοι είναι : $2n + 1 = -8 + 1 = -7$

$$\text{και } 2n + 3 = -8 + 3 = -5$$

Για $n = 2$ οι διαδοχικοί περιττοί ακέραιοι είναι : $2n + 1 = 4 + 1 = 5$

$$\text{και } 2n + 3 = 4 + 3 = 7$$

Άσκηση 6

Ο καθηγητής των Μαθηματικών πρότεινε στους μαθητές να λύσουν ορισμένες ασκήσεις για να εμπεδώσουν την ενότητα που διδάχτηκαν. Όταν αυτοί τον ρώτησαν σε ποια σελίδα είναι γραμμένες οι ασκήσεις, αυτός απάντησε « Αν ανοίξετε το βιβλίο σας, το γινόμενο των αριθμών των δύο αντικριστών σελίδων στις οποίες είναι γραμμένες οι ασκήσεις είναι 506». Μπορείτε να βρείτε σε ποιες σελίδες είναι γραμμένες οι ασκήσεις ;

Λύση

Έστω $x, x + 1$ οι αριθμοί των δύο διαδοχικών σελίδων του βιβλίου

Τότε $x(x + 1) = 506$

$$x(x + 1) = 506 \Leftrightarrow x^2 + x - 506 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-506) = 2025 > 0$$

$$\text{Άρα έχει δύο ρίζες } x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 + \sqrt{2025}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 + 45}{2} = 22 \text{ ή}$$

$$x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 - \sqrt{2025}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 - 45}{2} = -23$$

Η δεκτή λύση είναι $x = 22$, γιατί θέλουμε θετικό αριθμό.

Άσκηση 7

Στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου μιας χώρας κάθε ομάδα έδωσε με όλες τις

υπόλοιπες

ομάδες δύο αγώνες (εντός και εκτός έδρας) . Αν έγιναν συνολικά 240 αγώνες,

πόσες ήταν οι ομάδες που συμμετείχαν στο πρωτάθλημα ;

Λύση

Έστω n ο αριθμός των ομάδων. Άρα η κάθε ομάδα έχει παίξει με $n - 1$ ομάδες

Άρα όλες οι ομάδες έπαιξαν $n(n - 1)$ αγώνες.

$$\text{Άρα } n(n - 1) = 240 \Leftrightarrow n^2 - n - 240 = 0 \Leftrightarrow (n - 16)(n + 15) = 0$$

$$\Leftrightarrow n = -15 \text{ ή } n = 16 \text{ Άρα προκύπτει ότι } n = 16 \text{ αφού } n > 0.$$

Άσκηση 8

Ένα τρίγωνο έχει πλευρές 4cm , 6cm , 8 cm. Αν κάθε πλευρά του ήταν μεγαλύτερη κατά x cm, το τρίγωνο θα ήταν ορθογώνιο. Να βρείτε τον αριθμό x .

Λύση

Προσθέτουμε σε όλες τις πλευρές τον x . Οπότε έχουμε πλευρές:

$$4 + x, 6 + x, 8 + x$$

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα και με υποτείνουσα την $8 + x$:

$$(8 + x)^2 = (4 + x)^2 + (6 + x)^2 \Leftrightarrow 64 + 16x + x^2 = 16 + 8x + x^2 + 36 + 12x + x^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -6. \text{ Οπότε } x = 2 \text{ αφού οι}$$

πλευρές πρέπει να έχουν θετικά μήκη.

Άσκηση 9

Οι μαθητές μιας τάξης ρώτησαν τον καθηγητή τους πόσων ετών είναι και ποια είναι η ηλικία των παιδιών του. Εκείνος δεν έχασε την ευκαιρία και τους προβλημάτισε για μία ακόμα φορά αφού τους είπε :.

« Αν πολλαπλασιάσετε την ηλικία που είχα πριν 5 χρόνια με την ηλικία που θα έχω μετά από 5 χρόνια θα βρείτε 1200. Όσον αφορά τα δύο παιδιά μου αυτά είναι δίδυμα και αν πολλαπλασιάσετε ή προσθέσετε τις ηλικίες τους, βρίσκετε τον ίδιο αριθμό»

Μπορείτε να βρείτε την ηλικία του καθηγητή και των παιδιών του ;

Λύση

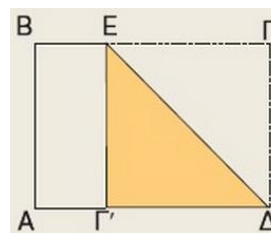
Θεωρούμε x της σημερινή ηλικία του καθηγητή. Η ηλικία που είχε πριν 5 χρόνια είναι $x - 5$, ενώ η ηλικία που θα έχει σε 5 χρόνια είναι $x + 5$.

Άρα $(x - 5)(x + 5) = 1200 \Leftrightarrow x^2 - 25 = 1200 \Leftrightarrow x^2 = 1225$ οπότε $x = 35$ αφού $x > 0$

Θεωρούμε y την ηλικία των παιδιών. Τότε $y^2 = 2y \Leftrightarrow y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow y(y - 2) = 0$
 $\Leftrightarrow y = 0$ ή $y = 2$. Άρα $y = 2$ αφού $y > 0$.

Άσκηση 10

Το μήκος κάθε φύλλου ενός βιβλίου είναι μεγαλύτερο από το πλάτος του κατά 6 cm. Αν διπλώσουμε ένα φύλλο ΑΒΓΔ έτσι ώστε η πλευρά ΓΔ να πέσει πάνω στην ΑΔ τότε το εμβαδόν του φύλλου μειώνεται κατά $\frac{3}{8}$ του αρχικού του εμβαδού. Να βρείτε τις διαστάσεις κάθε φύλλου



Λύση

Αν x cm πλάτος του φύλλου, το μήκος του είναι $(x + 6)$ cm και το εμβαδόν είναι $E = x(x + 6)$ cm²

Διπλώνοντας το φύλλο μειώνουμε το αρχικό εμβαδόν όσο και το εμβαδό του τριγώνου ΕΓΔ

$$\text{Υπολογίζουμε πρώτα το εμβαδόν του } E_{\text{ΕΓΔ}} = \frac{\text{ΕΓ} \cdot \text{ΓΔ}}{2} = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}$$

Όμως σύμφωνα με την ισότητα ισχύει $E_{\text{ΕΓΔ}} = \frac{3}{8} E_{\text{ΑΒΓΔ}}$ με $E_{\text{ΑΒΓΔ}} = x(x + 6)$

$$\text{Άρα προκύπτει ότι } \frac{x^2}{2} = \frac{3}{8} x(x + 6)$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{3}{8} x (x + 6) \Leftrightarrow 4x^2 = 3x(x + 6) \Leftrightarrow x^2 - 18x = 0 \Leftrightarrow x(x - 18) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 18 \text{ Άρα } x = 18 \text{ αφού } x > 0$$

Το πλάτος κάθε φύλλου 18 cm και μήκος 24 cm.

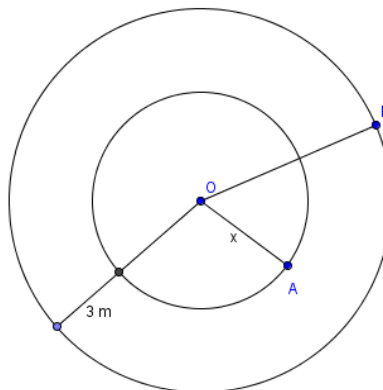
Άσκηση 11

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κυκλικό σιντριβάνι και γύρω από αυτό να στρώσουμε με βότσαλα έναν κυκλικό δακτύλιο πλάτους 3m .
Αν ο δακτύλιος πρέπει να έχει εμβαδόν τριπλάσιο από το εμβαδόν που καλύπτει το σιντριβάνι , να βρείτε την ακτίνα του σιντριβανιού .



Λύση

Θεωρούμε κύκλο με κέντρο O το κέντρο του σιντριβανιού και ακτίνα OA = x
Και κύκλο με κέντρο O και ακτίνα OB (B σημείο της ακτίνας του σιντριβανιού με την πλακόστρωση). Τότε OB = x + 3



Το εμβαδόν του σιντριβανιού είναι ίσο με $E_{OA} = \pi \cdot x^2$

Το συνολικό εμβαδόν είναι ίσο με $E_{OB} = \pi \cdot OB^2$ αλλά σύμφωνα με την υπόθεση ισχύει ότι $OB = x + 3$. Άρα $E_{OB} = \pi \cdot (x + 3)^2$

Ο δακτύλιος με τα βότσαλα έχει εμβαδόν

$$E_{\delta} = \pi \cdot OB^2 - \pi \cdot OA^2 = \pi \cdot (x + 3)^2 - \pi \cdot x^2$$

Σύμφωνα με την υπόθεση πρέπει $E_{\delta} = 3 E_{OA}$ οπότε $\pi(OA + 3)^2 - \pi OA^2 = 3\pi OA^2$

$$\pi(OA + 3)^2 - \pi OA^2 = 3\pi OA^2 \Leftrightarrow \pi \cdot (x + 3)^2 - \pi \cdot x^2 = 3\pi \cdot x^2$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)^2 - x^2 = 3x^2 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = -1.$$

Άρα $OA = 3 \text{ m}$

Άσκηση 12

Για την κατασκευή μιας κλειστής κυλινδρικής δεξαμενής καυσίμων ύψους 6m χρειάστηκαν $251,2 \text{ m}^2$ λαμαρίνας. Να υπολογίσετε την ακτίνα της βάσης της δεξαμενής.

Λύση

Θα πρέπει να υπολογίσουμε το εμβαδόν του κυλίνδρου. Υπολογίζουμε το εμβαδόν του κορμού και των βάσεων ξεχωριστά. Το εμβαδόν του κορμού είναι : $E_K = 2\pi r u$ με u το ύψος της δεξαμενής και r η ακτίνα της βάσης.

Το εμβαδόν κάθε βάσης είναι : $E_B = \pi r^2$

$$\text{Άρα } E_{\text{ολικό}} = E_K + E_B = 2\pi r u + 2\pi r^2$$

$$\text{Όμως } E_{\text{ολικό}} = 251,2 \text{ m}^2$$

Άρα αντικαθιστώντας:

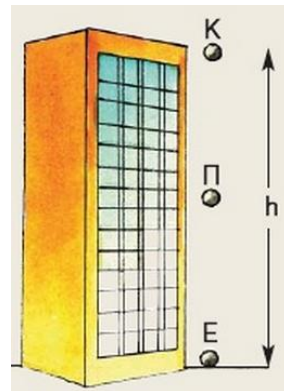
$$251,2 = 2 \cdot 3,14 \cdot r \cdot 6 + 2 \cdot 3,14 \cdot r^2 \Leftrightarrow 6,28r^2 + 6 \cdot 6,28r - 251,2 = 0$$

$$\Leftrightarrow r^2 + 6r - 40 = 0 \Leftrightarrow (r - 4)(r + 10) = 0 \Leftrightarrow r = -10 \text{ ή } r = 4$$

Οπότε $r = 4 \text{ m}$.

Άσκηση 13

Παρατηρώντας την πτώση ενός σώματος που αφέθηκε από την κορυφή Κ ενός ουρανοξύστη διαπιστώνουμε ότι στα δύο τελευταία δευτερόλεπτα της κίνησής του διήνυσε μία απόσταση ΠΕ ίση με τα $\frac{5}{9}$ του ύψους του ουρανοξύστη. Να βρείτε



πόσο χρόνο διήρκεσε η πτώση του σώματος και ποιο ήταν το ύψος του ουρανοξύστη ($g = 10 \text{ m/sec}^2$)

Λύση

Ένα σώμα που βρίσκεται σε ελεύθερη πτώση καθώς πέφτει διανύει απόσταση L που δίνεται από τον τύπο $L = \frac{1}{2}gt^2$ (όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας και t ο χρόνος πτώσης σε sec)

Επειδή δόθηκε ότι $g = 10 \text{ m/sec}^2$, $L = \frac{1}{2} \cdot 10t^2 = 5t^2 \text{ m}$.

Το ύψος του ουρανοξύστη δίνεται από την συνάρτηση $h = L = 5t^2$ (εδώ το t είναι ο συνολικός χρόνος πτώσης σε sec)

Αν τα τελευταία δευτερόλεπτα διένυσε απόσταση $ΠΕ = \frac{5}{9}h$ τότε προκύπτει ότι

$ΚΠ = h - \frac{5}{9}h$, οπότε $ΚΠ = \frac{4}{9}h$ ή $ΚΠ = \frac{4}{9} \cdot 5t^2$ **(1)**. Η απόσταση ΚΠ διανύθηκε 2

λιγότερα από το συνολικό χρόνο πτώσης. Οπότε $ΚΠ = \frac{1}{2}g(t-2)^2 = 5(t-2)^2$ **(2)**

Άρα **(1), (2)** $5(t-2)^2 = \frac{4}{9} \cdot 5t^2 \Leftrightarrow 9(t-2)^2 = 4 \cdot t^2 \Leftrightarrow 5t^2 - 36t + 36 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 36^2 - 4 \cdot 5 \cdot 36 = 1296 - 720 = 576 > 0$

Άρα έχει δύο ρίζες $t_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-36 + \sqrt{576}}{2 \cdot 5} = \frac{36 + 24}{10} = 6 \text{ sec}$ ή

$$t_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{36 - \sqrt{576}}{2 \cdot 5} = \frac{36 - 24}{10} = 1,2 \text{ sec}$$

Η δεκτή λύση είναι $t = 6 \text{ sec}$, γιατί θέλουμε $t > 2$.

Το ύψος του κτηρίου είναι $h = 5t^2 = 5 \cdot 6^2 = 180 \text{ m}$

Επιμέλεια: Βασίλης Γκμίσσης – MED - Μαθηματικός



...Πράξεις Παιδείας!