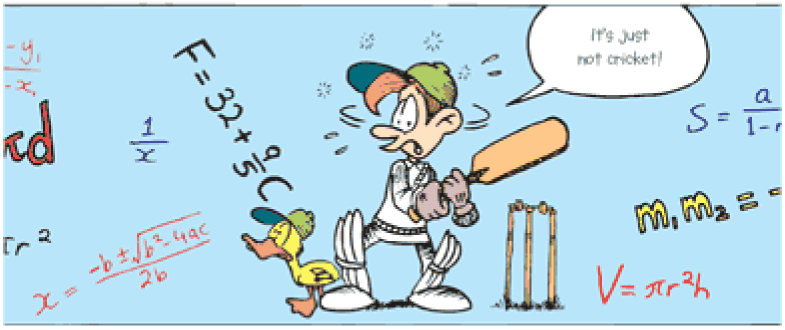
2. Εξισώσεις – Ανισώσεις



Λύσεις ασκήσεων Μαθηματικών Γ' Γυμνασίου

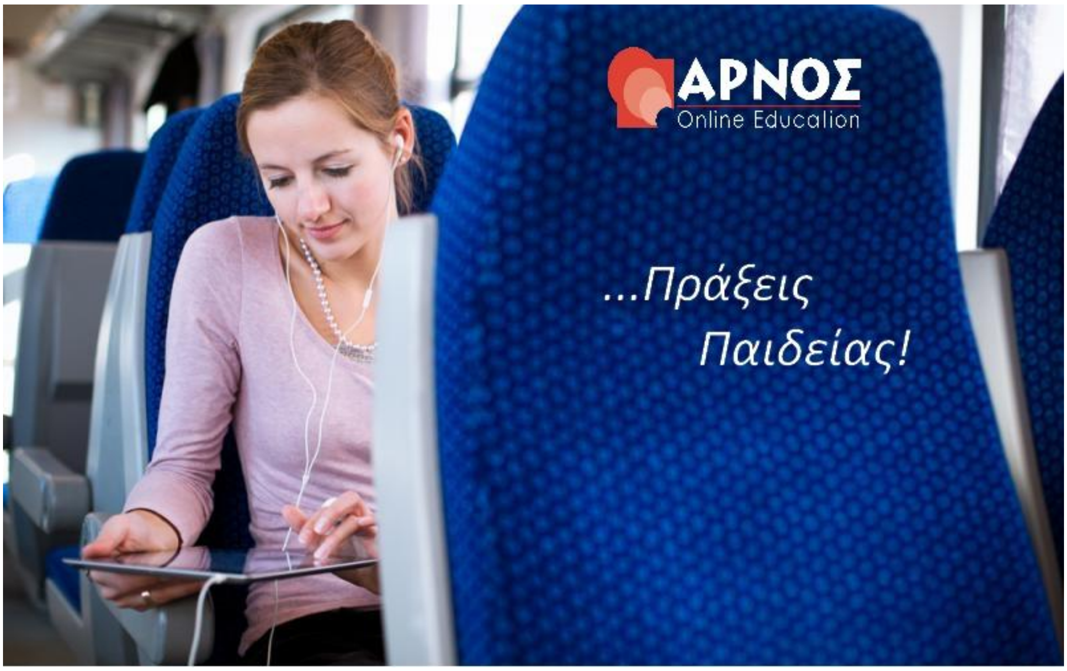
2.2.Β Επίλυση με τη βοήθεια τύπου

σχ. βιβλίο (σσ. 96-97)

ΑΡΝΟΣ
Online Education

Φροντιστηριακό e-μάθημα

Γυμνάσιο: 9.000 μαθήματα με βίντεο-διδασκαλία
για όλο το σχολικό έτος μόνο με 150 ευρώ!



Μελέτη όπου, όποτε και όσο εσύ θες!

Διδάσκουμε μεθοδικά σε βίντεο τη θεωρία του σχολικού βιβλίου και λύνουμε όλες τις ασκήσεις

Δημιουργούμε συνεχώς νέα βίντεο με διδασκαλία για τις εκπαιδευτικές σου απαιτήσεις

Παίζουμε και μαθαίνουμε με on line test αξιολόγησης & SOS διαγωνίσματα προσομοίωσης για τις εξετάσεις

Λύνουμε απορίες ζωντανά on line καθημερινά 3 μ.μ. - 8 μ.μ.

Λύσεις Ασκήσεων Μαθηματικών Γ΄ Γυμνασίου σχ. βιβλίου (σσ. 96-97)

2.2 Β. Εξισώσεις δευτέρου βαθμού

Επίλυση εξισώσεων με τη βοήθεια τύπου

Ερωτήσεις κατανόησης

Ερώτηση 1

Αν Δ είναι η διακρίνουσα της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ τότε να αντιστοιχίσετε σε κάθε περίπτωση της στήλης Α το σωστό συμπέρασμα από τη στήλη Β.

Στήλη Α		Στήλη Β	
α.	$\Delta > 0$	**1.**	Η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον λύση.
β.	$\Delta = 0$	**2.**	Η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις.
γ.	$\Delta > 0$	**3.**	Η εξίσωση έχει μία διπλή λύση.
δ.	$\Delta < 0$	**4.**	Η εξίσωση δεν έχει λύση.

Απάντηση

Από την θεωρία ξέρουμε ότι

α . Αν $\Delta > 0$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες. Οπότε α –> 2

β. Αν $\Delta = 0$, η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα. Οπότε β –> 3

γ. Αν $\Delta \geq 0$, η εξίσωση έχει το λιγότερο μια ρίζα. Οπότε γ –> 1

δ. Αν $\Delta < 0$, η εξίσωση δεν έχει ρίζες. Οπότε δ –> 4

α	β	γ	δ
2	3	1	4

Ερώτηση 2

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες

α) Αν μία εξίσωση 2ου βαθμού έχει διακρίνουσα θετική τότε δεν έχει λύση

β) Αν μία εξίσωση 2ου βαθμού έχει διακρίνουσα θετική ή μηδέν τότε έχει μία τουλάχιστον λύση

γ) Η εξίσωση $2x^2 + 4x - 6 = 0$ έχει ως λύσεις τους αριθμούς 1 και -3, οπότε το τριώνυμο $2x^2 + 4x - 6$ γράφεται $2x^2 + 4x - 6 = (x-1)(x+3)$

Απάντηση

α) Είναι λάθος (Λ), γιατί αν $\Delta > 0$, τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες .

β) Είναι σωστό (Σ), γιατί αν $\Delta \geq 0$, τότε η εξίσωση έχει ή δύο ρίζες άνισες ή δύο ρίζες ίσες .

γ) Είναι λάθος (Λ), γιατί το τριώνυμο γράφεται $2x^2 + 4x - 6 = 2(x-1)(x+3)$.

Ερώτηση 3

Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις είναι προτιμότερο να λυθούν με την βοήθεια του τύπου

α) $2x^2 = 7x$ β) $3x^2 - 2x + 8 = 0$ γ) $-2x^2 + 50 = 0$ δ) $5x^2 + x - 4 = 0$

Απάντηση

Ο τύπος είναι χρήσιμος στις περιπτώσεις που δεν είναι εύκολο να παραγοντοποιήσουμε.

α) $2x^2 = 7x \Leftrightarrow 2x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x(2x - 7) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $2x - 7 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \frac{7}{2}$

β) Απαιτείται η χρήση του τύπου

γ) $-2x^2 + 50 = 0 \Leftrightarrow -2(x^2 - 25) = 0 \Leftrightarrow -2(x-5)(x+5) = 0$

$\Leftrightarrow x - 5 = 0$ ή $x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ ή $x = -5$

δ) Απαιτείται η χρήση του τύπου

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να φέρετε τις εξισώσεις της πρώτης στήλης στη μορφή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ και να συμπληρώσετε τις υπόλοιπες στήλες του πίνακα

Εξίσωση	$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$	α	β	γ
$x(x-1) = -2$				
$3x^2 + 4 = 2(x+2)$				
$(x-1)^2 = 2(x^2 - x)$				

Λύση

$x(x-1) = -2 \Leftrightarrow x^2 - x = -2 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 0$

$\alpha = 1,\ \beta = -1,\ \gamma = 2$

$3x^2 + 4 = 2(x+2) \Leftrightarrow 3x^2 + 4 = 2x + 4 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x = 0$

$\alpha = 3,\ \beta = -2,\ \gamma = 0$

$(x-1)^2 = 2(x^2 - x) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 2x^2 - 2x \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$

$\alpha = 1,\ \beta = 0,\ \gamma = -1$

Με βάση τα παραπάνω ο πίνακας γίνεται:

Εξίσωση	$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$	α	β	γ
$x(x-1) = -2$	$x^2 - x + 2 = 0$	1	-1	2
$3x^2 + 4 = 2(x+2)$	$3x^2 - 2x = 0$	3	-2	0
$(x-1)^2 = 2(x^2 - x)$	$x^2 - 1 = 0$	1	0	-1

Άσκηση 2

Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $x^2 - x - 2 = 0$ **β)** $4y^2 + 3y - 1 = 0$ **γ)** $-2\omega^2 + \omega + 6 = 0$

δ) $2z^2 - 3z + 1 = 0$ **ε)** $-25t^2 + 10t - 1 = 0$ **στ)** $4x^2 - 12x + 9 = 0$

ζ) $3x^2 + 18x + 27 = 0$ **η)** $x^2 - 4x = 5$ **θ)** $x^2 - 3x + 7 = 0$

Λύση

α) $x^2 - x - 2 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$

Άρα έχει δύο ρίζες $x_1 = \dfrac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{1+\sqrt{9}}{2\cdot 1} = \dfrac{1+3}{2} = 2$ ή

$x_2 = \dfrac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{1-\sqrt{9}}{2\cdot 1} = \dfrac{1-3}{2} = -1$

β) $4y^2 + 3x - 1 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 3^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1) = 9 + 16 = 25 > 0$

Άρα έχει δυο ρίζες $y_1 = \dfrac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-3+5}{8} = \dfrac{1}{4}$ ή $y_2 = \dfrac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-3-5}{8} = -1$

γ) $-2\omega^2 + \omega + 6 = 0$ άρα $2\omega^2 - \omega - 6 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 1 + 48 = 49 > 0$

Άρα έχει δυο ρίζες $\omega_1 = \dfrac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{1+7}{4} = 2$ ή $\omega_2 = \dfrac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{1-7}{4} = -\dfrac{3}{2}$

δ) $2z^2 - 3z + 1 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4\cdot 2\cdot 1 = 9 - 8 = 1 > 0$

Άρα έχει δυο ρίζες , $z_1 = \dfrac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{3+1}{4} = 1$ ή $z_2 = \dfrac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{1}{2}$

ε) $-25t^2 + 10t - 1 = 0$ άρα $25t^2 - 10t + 1 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-10)^2 - 4\cdot 25\cdot 1 = 100 - 100 = 0$

Άρα έχει διπλή ρίζα $t_1 = t_2 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{10}{2\cdot 25} = \frac{1}{5}$

στ) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-12)^2 - 4\cdot 4\cdot 9 = 144 - 144 = 0$

Άρα έχει διπλή ρίζα $x_1 = x_2 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{12}{2\cdot 4} = \frac{3}{2}$

ζ) $3x^2 + 18x + 27 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 18^2 - 4\cdot 3\cdot 27 = 324 - 324 = 0$

Άρα έχει διπλή ρίζα $x_1 = x_2 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-18}{2\cdot 3} = -3$

η) $x^2 - 4x = 5$ ή $x^2 - 4x - 5 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot(-5) = 16 + 20 = 36 > 0$

Άρα έχει δυο ρίζες $x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{4+6}{2} = 5$ ή $x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{4-6}{2} = -1$

θ) $x^2 - 3x + 7 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 7 = 9 - 28 = -19 < 0$

Οπότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες

Άσκηση 3

Να λύσετε τις εξισώσεις **α)** $x^2 - 7x = 0$ **β)** $x^2 - 16 = 0$

i) Με την βοήθεια του τύπου **ii)** με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

Λύση

i) Με την βοήθεια του τύπου

α) $x^2 - 7x = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-7)^2 - 4\cdot 1\cdot 0 = 49 > 0$

Άρα έχει δυο ρίζες $x_1 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{7+7}{2} = 7$ ή $x_2 = \dfrac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{7-7}{2} = 0$

β) $x^2 - 16 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0^2 - 4\cdot 1\cdot(-16) = 64 > 0$

Άρα έχει δυο ρίζες $x_1 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{0 + \sqrt{64}}{2\cdot 1} = \dfrac{8}{2} = 4$

ή $x_2 = \dfrac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{0 - \sqrt{64}}{2\cdot 1} = \dfrac{-8}{2} = -4$

ii) με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

α) $x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x(x-7) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 7$

β) $x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-4) = 0$

$\Leftrightarrow x + 4 = 0$ ή $x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = -4$ ή $x = 4$

Άσκηση 4

Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $3x^2 - 2(x-1) = 2x + 1$ **β)** $(y+2)^2 + (y-1)^2 = 5(2y+3)$

γ) $(2\omega-3)^2 - (\omega-2)^2 = 2\omega^2 - 11$ **δ)** $\phi(8-\phi) - (3\phi+1)(\phi+2) = 1$

Λύση

α) $3x^2 - 2(x-1) = 2x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 2 = 2x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4\cdot 3\cdot 1 = 4 > 0$

Άρα έχει δυο ρίζες $x_1 = \dfrac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{4+2}{6} = 1$ ή $x_2 = \dfrac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{4-2}{6} = \dfrac{1}{3}$

β) $(y+2)^2 + (y-1)^2 = 5(2y+3) \Leftrightarrow y^2 + 4y + 4 + y^2 - 2y + 1 = 10y + 15$

$\Leftrightarrow 2y^2 - 8y - 10 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 4y - 5 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot(-5) = 16 + 20 = 36 > 0$

Άρα έχει δυο ρίζες $y_1 = \dfrac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{4+6}{2} = 5$ ή $y_2 = \dfrac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{4-6}{2} = -1$

γ) $(2\omega-3)^2 - (\omega-2)^2 = 2\omega^2 - 11 \Leftrightarrow 4\omega^2 - 12\omega + 9 - (\omega^2 - 4\omega + 4) = 2\omega^2 - 11$

$\Leftrightarrow 4\omega^2 - 12\omega + 9 - \omega^2 + 4\omega - 4 = 2\omega^2 - 11 \Leftrightarrow \omega^2 - 8\omega + 16 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4\cdot 1\cdot 16 = 64 - 64 = 0$

Άρα έχει διπλή ρίζα $\omega_1 = \omega_2 = \dfrac{-\beta}{2\alpha} = \dfrac{8}{2\cdot 1} = 4$

δ) $\phi(8-\phi) - (3\phi+1)(\phi+2) = 1 \Leftrightarrow 8\phi - \phi^2 - (3\phi^2 + 6\phi + \phi + 2) = 1$

$\Leftrightarrow 8\phi - \phi^2 - 3\phi^2 - 6\phi - \phi - 2 = 1 \Leftrightarrow 4\phi^2 - \phi + 3 = 0$

$\Delta = -11 < 0$, άρα η εξίσωση δεν έχει ρίζες

Άσκηση 5

Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $\frac{x^2-1}{3} - \frac{x+3}{5} = x-2$ **β)** $\frac{y^2}{3} - \frac{6y+1}{4} = \frac{y-2}{6} - 2$

γ) $0{,}5t^2 - 0{,}4(t+2) = 0{,}7(t-2)$ **δ)** $\frac{\omega}{2}(\sqrt{3}\,\omega - 7) = -\sqrt{3}$

Λύση

α) $\frac{x^2-1}{3} - \frac{x+3}{5} = x-2 \Leftrightarrow 15\cdot\frac{x^2-1}{3} - 15\cdot\frac{x+3}{5} = 15x-30$

$\Leftrightarrow 5(x^2-1) - 3(x+3) = 15x - 30$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 5 - 3x - 9 = 15x - 30 \Leftrightarrow 5x^2 - 18x + 16 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-18)^2 - 4\cdot5\cdot16 = 4$

Άρα έχει δυο ρίζες $x_1 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{18+\sqrt{4}}{2\cdot5} = 2$ ή $x_2 = \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{18-\sqrt{4}}{2\cdot5} = \frac{8}{5}$

β) $\frac{y^2}{3} - \frac{6y+1}{4} = \frac{y-2}{6} - 2 \Leftrightarrow 12\cdot\frac{y^2}{3} - 12\cdot\frac{6y+1}{4} = 12\cdot\frac{y-2}{6} - 24$

$\Leftrightarrow 4y^2 - 3(6y+1) = 2(y-2) - 24 \Leftrightarrow 4y^2 - 18y - 3 = 2y - 4 - 24$

$\Leftrightarrow 4y^2 - 20y + 25 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-20)^2 - 4\cdot4\cdot25 = 0$

Άρα έχει διπλή ρίζα $y_1 = y_2 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{5}{2}$

γ) $0{,}5t^2 - 0{,}4(t+2) = 0{,}7(t-2) \Leftrightarrow 5t^2 - 4(t+2) = 7(t-2)$

$\Leftrightarrow 5t^2 - 4t - 8 = 7t - 14 \Leftrightarrow 5t^2 - 11t + 6 = 0$,

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-11)^2 - 4\cdot5\cdot6 = 1$

Άρα έχει δυο ρίζες $t_1 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{11+\sqrt{1}}{2\cdot5} = \frac{6}{5}$ ή $x_2 = \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{11-\sqrt{1}}{2\cdot5} = 1$

δ) $\frac{\omega}{2}(\sqrt{3}\omega - 7) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow 2\cdot\frac{\omega}{2}(\sqrt{3}\omega - 7) = -2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \quad \omega(\sqrt{3}\omega - 7) = -2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}\omega^2 - 7\omega + 2\sqrt{3} = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-7)^2 - 4\cdot\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3} = 25$ Άρα έχει δυο ρίζες

$$\omega_1 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{7+\sqrt{25}}{2\cdot\sqrt{3}} = \frac{12}{2\cdot\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\omega_2 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{7-\sqrt{25}}{2\cdot\sqrt{3}} = \frac{2}{2\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Άσκηση 6

Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα

α) $x^2 + 4x - 12$ **β)** $3y^2 - 8y + 5$ **γ)** $-2\omega^2 + 5\omega - 3$

ε) $x^2 - 16x + 64$ **στ)** $9y^2 + 12y + 4$ **ζ)** $-\omega^2 + 10\omega - 25$

Λύση

Αν $\Delta > 0$ και ρ_1, ρ_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$$

Αν $\Delta = 0$ τότε $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ είναι η διπλή ρίζα της εξίσωσης τότε το τριώνυμο

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho)^2$$

α) $x^2 + 4x - 12$, $\alpha = 1$, $\Delta = 64$, $x_1 = 2$, $x_2 = -6$

οπότε $x^2 + 4x - 12 = (x-2)(x+6)$

β) $3y^2 - 8y + 5$, $\alpha = 3$, $\Delta = 4$, $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{5}{3}$

οπότε $3y^2 - 8y + 5 = 3(y-1)\left(y - \frac{5}{3}\right) = (y-1)(3y-5)$

γ) $-2\omega^2 + 5\omega - 3$, $\alpha = -2$, $\Delta = 1$, $\omega_1 =$, $\omega_2 = \frac{3}{2}$

οπότε $-2\omega^2 + 5\omega - 3 = -2(\omega-1)\left(\omega - \frac{3}{2}\right) = (\omega-1)(-2\omega+3)$

ε) $x^2 - 16x + 64$, $\alpha = 1$, $\Delta = 0$, $x_1 = x_2 = 8$, οπότε $x^2 - 16x + 64 = (x-8)^2$

στ) $9y^2 + 12y + 4$, $\Delta = 0$, $y_1 = y_2 = -\frac{2}{3}$

οπότε $9y^2 + 12y + 4 = 9\left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = (3y+2)^2$

ζ) $-\omega^2 + 10\omega - 25$, $\Delta = 0$, $\alpha = -1$, $\omega_1 = \omega_2 = 5$

οπότε $-\omega^2 + 10\omega - 25 = -(\omega-5)^2$

Άσκηση 7

Αν α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha \neq 0$, να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μια τουλάχιστον λύση.

α) $\alpha x^2 - x + 1 - \alpha = 0$ **β)** $\alpha x^2 + (\alpha + \beta)x + \beta = 0$

Λύση

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, έχει μία τουλάχιστον λύση αν $\Delta \geq 0$.

α) $\alpha x^2 - x + 1 - \alpha = 0$, $\Delta = 1 - 4\alpha(1-\alpha) = 4\alpha^2 - 4\alpha + 1 = (2\alpha - 1)^2 \geq 0$

Άρα η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον λύση.

β) $\alpha x^2 + (\alpha + \beta)x + \beta = 0$

$\Delta = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 \geq 0$

Οπότε η εξίσωση έχει μια τουλάχιστον λύση.

Άσκηση 8

Δίνεται η εξίσωση $(\alpha + \gamma)x^2 - 2\beta x + (\alpha - \gamma) = 0$, όπου α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ. Αν η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

Λύση

Επειδή η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα τότε θα ισχύει ότι $\Delta = 0$ άρα

$4\beta^2 - 4(\alpha + \gamma)(\alpha - \gamma) = 0$

$4\beta^2 - 4(\alpha + \gamma)(\alpha - \gamma) = 0 \Leftrightarrow \beta^2 - (\alpha^2 - \gamma^2) = 0 \Leftrightarrow \beta^2 - \alpha^2 + \gamma^2 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ το οποίο είναι ισχύει για ορθογώνια τρίγωνα. Άρα ΑΒΓ ορθογώνιο.

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης – MED - Μαθηματικός

…Πράξεις Παιδείας!