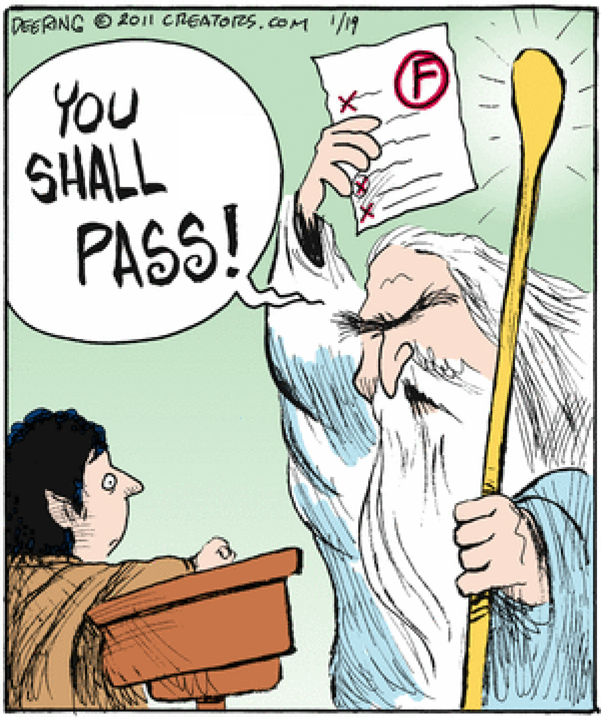
2. Εξισώσεις – Ανισώσεις



Λύσεις ασκήσεων Μαθηματικών Γ' Γυμνασίου

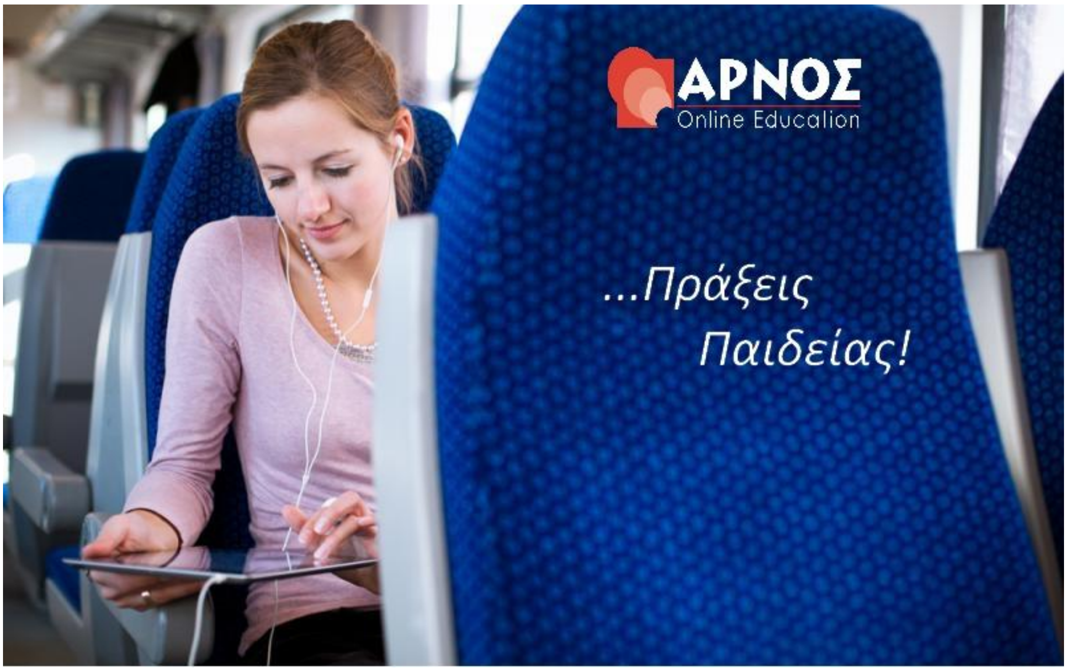
Γενικές Ασκήσεις 2ου κεφαλαίου

σχ. βιβλίο (σσ. 118-119)

ΑΡΝΟΣ Online Education

Φροντιστηριακό e-μάθημα

Γυμνάσιο: 9.000 μαθήματα με βίντεο-διδασκαλία
για όλο το σχολικό έτος μόνο με 150 ευρώ!



Μελέτη όπου, όποτε και όσο εσύ θες!

Διδάσκουμε μεθοδικά σε βίντεο τη θεωρία του σχολικού βιβλίου και λύνουμε όλες τις ασκήσεις

Δημιουργούμε συνεχώς νέα βίντεο με διδασκαλία για τις εκπαιδευτικές σου απαιτήσεις

Παίζουμε και μαθαίνουμε με on line test αξιολόγησης & SOS διαγωνίσματα προσομοίωσης για τις εξετάσεις

Λύνουμε απορίες ζωντανά on line καθημερινά 3 μ.μ. - 8 μ.μ.

Λύσεις Ασκήσεων Μαθηματικών Γ΄ Γυμνασίου σχ. βιβλίου (σσ. 118-119)

Γενικές Ασκήσεις 2ου κεφαλαίου

Άσκηση 1

Αν $\alpha \neq \beta$, να λύσετε τις εξισώσεις

α) $(x+\alpha)^2 - (x+\beta)^2 = \beta^2 - \alpha^2$ **β)** $\dfrac{x+\alpha}{\beta} - \dfrac{x+\beta}{\alpha} = \dfrac{\alpha}{\beta} - 1$

Απάντηση

α) $(x+\alpha)^2 - (x+\beta)^2 = \beta^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 - x^2 - 2\beta x - \beta^2 = \beta^2 - \alpha^2$

$\Leftrightarrow 2\alpha x - 2\beta x = 2\beta^2 - 2\alpha^2 \Leftrightarrow 2x(\alpha - \beta) = 2(\beta^2 - \alpha^2)$ $(\alpha - \beta \neq 0)$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{2(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)}{2(\alpha-\beta)} = \dfrac{-2(\beta+\alpha)(\alpha-\beta)}{2(\alpha-\beta)} = -\alpha - \beta$

Αφού από την υπόθεση $\alpha \neq \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta \neq 0$.

β) Πρέπει $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ για να ορίζεται το κλάσμα

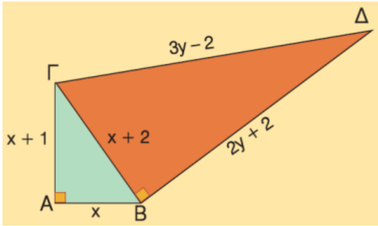
$\dfrac{x+\alpha}{\beta} - \dfrac{x+\beta}{\alpha} = \dfrac{\alpha}{\beta} - 1 \Leftrightarrow \alpha\beta\dfrac{x+\alpha}{\beta} - \alpha\beta\dfrac{x+\beta}{\alpha} = \alpha\beta\dfrac{\alpha}{\beta} - \alpha\beta$

$\Leftrightarrow \alpha(x+\alpha) - \beta(x+\beta) = \alpha^2 - \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha x + \alpha^2 - \beta x - \beta^2 = \alpha^2 - \alpha\beta$

$\Leftrightarrow \alpha x - \beta x = \beta^2 - \alpha\beta \Leftrightarrow x(\alpha - \beta) = \beta(\beta - \alpha) \Leftrightarrow x = \dfrac{\beta(\beta-\alpha)}{(\alpha-\beta)} = \dfrac{-\beta(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)} = -\beta$

Αφού από την υπόθεση $\alpha \neq \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta \neq 0$.

Άσκηση 2



Στο διπλανό σχήμα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ είναι ορθογώνια. Να βρείτε τα x και y

Απάντηση

ΑΒΓ ορθογώνιο. Άρα $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$. Οπότε,

$(x + 2)^2 = x^2 + (x + 1)^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + x^2 + 2x + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = -1$

Όμως $x > 0$.Άρα $x = 3$.

Επίσης $ΓΔ^2 = ΒΓ^2 + ΒΔ^2$. Οπότε,

$(3y - 2)^2 = 5^2 + (2y + 2)^2 \Leftrightarrow 9y^2 - 12y + 4 = 25 + 4y^2 + 8y + 4$

$\Leftrightarrow 5y^2 - 20y - 25 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 4y - 5 = 0 \Leftrightarrow (y + 1)(y - 5) = 0$

$\Leftrightarrow y = 5$ ή $y = -1$

Όμως $y > 0$. Άρα $y = 5$

Άσκηση 3

Το γινόμενο δύο διαδοχικών θετικών ακεραίων αν διαιρεθεί με το άθροισμα τους δίνει πηλίκο 7 και υπόλοιπο 23 . Να βρείτε τους αριθμούς

Απάντηση

Έστω οι διαδοχικοί θετικοί ακέραιοι ν και ν + 1

Σύμφωνα με τον τύπο της διαίρεσης $Δ = δ\cdot π + υ$ (εδώ $Δ = ν(ν + 1)$,

$δ = ν + ν + 1 = 2ν + 1$, $π = 7$ και $υ = 23$)

προκύπτει ότι

$ν(ν + 1) = (2ν + 1)\cdot 7 + 23 \Leftrightarrow ν^2 + ν = 14ν + 7 + 23 \Leftrightarrow ν^2 - 13ν - 30 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-13)^2 - 4\cdot1\cdot(-30) = 169 + 120 = 289 > 0$

Άρα έχει δυο ρίζες , $\nu_1 = \dfrac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{13+17}{2} = 15$ ή

$\nu_2 = \dfrac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{13-17}{2} = \dfrac{3-1}{4} = -2$

Όμως ο ν είναι θετικός ακέραιος. Άρα $\nu = 15$ και $\nu + 1 = 16$

Άσκηση 4

Να λύσετε τις εξισώσεις για τις διάφορες τιμές του $\alpha \neq 0$

α) $\dfrac{x}{x-\alpha} + \dfrac{2x}{x+\alpha} = \dfrac{2\alpha^2}{x^2-\alpha^2}$ **β)** $\dfrac{3\alpha}{x^2-\alpha x} + \dfrac{1}{x^2+\alpha x} = \dfrac{6x}{x^2-\alpha^2}$

Απάντηση

α) $x^2 - \alpha^2 = (x+\alpha)(x-\alpha)$.

Άρα το ΕΚΠ των παρονομαστών είναι το $(x+\alpha)(x-\alpha)$ και θα πρέπει

$(x+\alpha)(x-\alpha) \neq 0 \Leftrightarrow x+\alpha \neq 0$ και $x-\alpha \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\alpha$ και $x \neq \alpha$. Τότε έχουμε διαδοχικά

$$\frac{x}{x-\alpha} + \frac{2x}{x+\alpha} = \frac{2\alpha^2}{x^2-\alpha^2} \Leftrightarrow \frac{x}{x-\alpha} + \frac{2x}{x+\alpha} = \frac{2\alpha^2}{(x-\alpha)(x+\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow (x-\alpha)(x+\alpha)\frac{x}{x-\alpha} + (x-\alpha)(x+\alpha)\frac{2x}{x+\alpha} = (x-\alpha)(x+\alpha)\frac{2\alpha^2}{(x-\alpha)(x+\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow x(x+\alpha) + 2x(x-\alpha) = 2\alpha^2 \Leftrightarrow x^2 + \alpha x + 2x^2 - 2\alpha x = 2\alpha^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - \alpha x - 2\alpha^2 = 0$$

Βρίσκουμε την διακρίνουσα την $\Delta = (-\alpha)^2 - 4\cdot 3(-2\alpha^2) = \alpha^2 + 24\alpha^2 = 25\alpha^2$

Και λύσεις τις $x_1 = \dfrac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{\alpha+\sqrt{25\alpha^2}}{2\cdot 3} = \dfrac{\alpha+5\alpha}{6} = \dfrac{\alpha+5\alpha}{6} = \dfrac{6\alpha}{6} = \alpha$

$$x_2 = \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{\alpha-5\alpha}{6} = \frac{-4\alpha}{6} = \frac{-2\alpha}{3}$$

Άρα $x = \frac{-2\alpha}{3}$ διότι $x \neq \alpha$

β) $x^2+\alpha x = x(x+\alpha)$ και $x^2-\alpha^2 = (x+\alpha)(x-\alpha)$.

Άρα το ΕΚΠ των παρονομαστών είναι το $x(x+\alpha)(x-\alpha)$ και θα πρέπει

$x(x+\alpha)(x-\alpha) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$, $x+\alpha \neq 0$ και $x-\alpha \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $x \neq 0$, $x \neq -\alpha$ και $x \neq \alpha$. Τότε έχουμε διαδοχικά

$$\frac{3\alpha}{x^2-\alpha x} + \frac{1}{x^2+\alpha x} = \frac{6x}{x^2-\alpha^2} \Leftrightarrow \frac{3\alpha}{x(x-\alpha)} + \frac{1}{x(x+\alpha)} = \frac{6x}{(x-\alpha)(x+\alpha)} \Leftrightarrow$$

$$x(x+\alpha)(x-\alpha)\frac{3\alpha}{x(x-\alpha)} + x(x+\alpha)(x-\alpha)\frac{1}{x(x+\alpha)} = x(x+\alpha)(x-\alpha)\frac{6x}{(x-\alpha)(x+\alpha)}$$

$\Leftrightarrow 3\alpha(x+\alpha) + x - \alpha = 6x^2 \Leftrightarrow 3\alpha x + 3\alpha^2 + x - \alpha = 6x^2$

$\Leftrightarrow 6x^2 - 3\alpha x - 3\alpha^2 - x + \alpha = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - (3\alpha+1)x - 3\alpha^2 + \alpha = 0$

Υπολογίζουμε την διακρίνουσα

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (3\alpha+1)^2 - 24(-3\alpha^2+\alpha) = 9\alpha^2 + 6\alpha + 1 + 72\alpha^2 - 24\alpha =$

$= 81\alpha^2 - 18\alpha + 1 = (9\alpha-1)^2 \geq 0$

Προκύπτουν οι λύσεις

$$x_1 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(3\alpha+1)+(9\alpha-1)}{12} = \frac{3\alpha+1+9\alpha-1}{12} = \frac{12\alpha}{12} = \alpha$$

$$x_2 = \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(3\alpha+1)-(9\alpha-1)}{12} = \frac{3\alpha+1-9\alpha+1}{12} = \frac{2-6\alpha}{12} = \frac{2(1-3\alpha)}{12} = \frac{1-3\alpha}{6}$$

Δεκτή είναι η $x = \frac{1-3\alpha}{6}$ διότι $x \neq \alpha$

Άσκηση 5

Αν μία λύση της εξίσωσης $x^2 + (\lambda - 5)x + \lambda = 0$ είναι ο αριθμός 1 , να βρείτε την άλλη λύση.

Απάντηση

Θέτουμε $x = 1$ και έχουμε διαδοχικά

$1^2 + (\lambda - 5)\cdot 1 + \lambda = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 + \lambda - 5 + \lambda = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\lambda = 4 \;\Leftrightarrow\; \lambda = 2$

Οπότε προκύπτει ότι η εξίσωση $x^2 - 3x + 2 = 0$

Όμως $x^2 - 3x + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x-1)(x-2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1$ ή $x = 2$

Άρα η άλλη λύση είναι η $x = 2$

Άσκηση 6

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$, αν είναι γνωστό ότι το $x - 3$ είναι παράγοντας του $P(x)$

Λύση

Για να βρούμε την παραγοντοποιημένη μορφή της $P(x)$ θα πρέπει να διαιρέσουμε με το $(x - 3)$

$x^3 + 3x^2 - 13x - 15$ $-x^3 + 3x^2$	$x - 3$
$6x^2 - 13x - 15$ $-6x^2 + 18x$	$x^2 + 6x + 5$
$5x - 15$ $-5x + 15$	
0	

Άρα προκύπτει από την διαίρεση ότι $x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = (x^2 + 6x + 5)(x - 3)$

Οπότε η εξίσωση $P(x) = 0$ παίρνει την μορφή $(x^2 + 6x + 5)(x - 3) = 0$

$(x^2 + 6x + 5)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 5 = 0$ ή $x - 3 = 0$

όμως $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

και $x^2 + 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = -5$

Άσκηση 7

Να βρείτε δύο διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς τέτοιους ώστε το άθροισμα των αντιστρόφων τους αυξημένο κατά τον αντίστροφο του γινομένου τους να είναι ίσο με 1.

Απάντηση

Έστω ν, $\nu + 1$ διαδοχικοί ακέραιοι, με $\nu \neq 0, \nu + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \nu \neq -1$

Από την εκφώνηση προκύπτει η εξίσωση $\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{\nu(\nu+1)} = 1$

$\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{\nu(\nu+1)} = 1 \Leftrightarrow \nu(\nu + 1)\frac{1}{\nu} + \nu(\nu + 1)\frac{1}{\nu+1} + \nu(\nu + 1)\frac{1}{\nu(\nu+1)} = \nu(\nu + 1)$

$\Leftrightarrow \nu + 1 + \nu + 1 = \nu(\nu + 1) \Leftrightarrow \nu + 1 + \nu + 1 = \nu^2 + \nu \Leftrightarrow \nu^2 - \nu - 2 = 0$

Βρίσκουμε την διακρίνουσα της εξίσωσης

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$

Με λύσεις τις $\nu_1 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{1+3}{2} = 2$

$\nu_2 = \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{1-3}{2} = -1$

Η $\nu = -1$ απορρίπτεται επειδή πρέπει $\nu \neq -1$

Άρα $\nu = 2$ και $\nu + 1 = 3$.

Άσκηση 8

Να βρείτε τις διαστάσεις ενός οικοπέδου σχήματος ορθογωνίου, αν είναι γνωστό ότι

οι πλευρές του διαφέρουν κατά 2 m και το εμβαδόν του οικοπέδου είναι 399 m^2 .

Απάντηση

Θεωρούμε τις πλευρές του οικοπέδου x, x + 2 και το εμβαδόν του οικοπέδου

E = x(x+ 2).

Άρα, σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε ότι x(x+ 2) = 399

Όμως x(x+ 2) = 399 $\Leftrightarrow$ $x^2 + 2x - 399 = 0$

Άρα προκύπτει η διακρίνουσα $\Delta = 2^2 - 4\cdot 1\cdot(-399) = 1600$

Με λύσεις τις $x_1 = \dfrac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-2+40}{2} = 19$

$x_2 = \dfrac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-2-40}{2} = -21$

Όμως x > 0. Άρα x = 19, x + 2 = 21

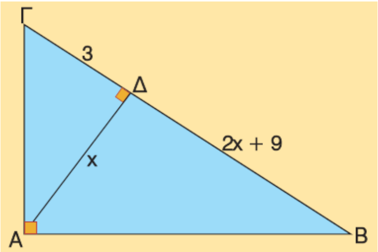
Άσκηση 9

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90^o$)

και το ύψος του ΑΔ. Αν είναι ΑΔ = x ,

ΒΔ = 2x + 9 και ΓΔ = 3 , να

υπολογίσετε τον αριθμό x



Απάντηση

Τα τρίγωνα ΑΒΓ , ΑΔΓ και ΑΔΒ είναι ορθογώνια,

Άρα έχουμε ότι έχουμε ότι $AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B^2$ **(1)**

$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2$ **(2)**

$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$.

Άρα από **(1)**, **(2)** προκύπτει ότι $B\Gamma^2 = 2A\Delta^2 + \Delta B^2 + \Delta\Gamma^2$ όμως $B\Gamma = B\Delta + \Delta\Gamma$ άρα

$(B\Delta + \Delta\Gamma)^2 = 2A\Delta^2 + \Delta B^2 + \Delta\Gamma^2$ και με αντικατάσταση έχουμε διαδοχικά

$(2x + 12)^2 = 2x^2 + (2x + 9)^2 + 3^2 \Leftrightarrow$

$4x^2 + 48x + 144 = 2x^2 + 4x^2 + 36x + 81 + 9 \Leftrightarrow 2x^2 - 12x - 54 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 27 = 0$

Βρίσκουμε την διακρίνουσα Δ = $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-27) = 144$

Με λύσεις τις $x_1 = \dfrac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{6+12}{2} = 9$

$x_2 = \dfrac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{6-12}{2} = -3$

Όμως $x > 0$. Άρα $x = 9$

Άσκηση 10

Να συγκρίνετε τους αριθμούς $(1 + \alpha)(1+ \beta)$ και $1 + \alpha + \beta$

Απάντηση

Αφαιρούμε τους όρους $(1 + \alpha)(1+ \beta) - (1 + \alpha + \beta) = 1 + \alpha + \beta + \alpha\cdot\beta - 1 - \alpha - \beta = \alpha\cdot\beta$

Άρα το πρόσημο της διαφοράς εξαρτάται από το πρόσημο των α, β. Οπότε:

Για α, β ομόσημους ισχύει ότι $\alpha\cdot\beta > 0$, οπότε $(1+\alpha)(1+\beta) > 1+\alpha+\beta$

Για α, β ετερόσημους $\alpha\cdot\beta < 0$, οπότε $(1+\alpha)(1+\beta) < 1+\alpha+\beta$

Για $\alpha = 0$, ή $\beta = 0$ ισχύει ότι $\alpha\cdot\beta = 0$, οπότε $(1+\alpha)(1+\beta) = 1+\alpha+\beta$

Άσκηση 11

α) Να αποδείξετε ότι $(\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2 = 2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma)$

β) Αν για τους προηγούμενους αριθμούς α , β , γ ισχύει

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$, να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=\gamma$

Απάντηση

α) Βρίσκουμε το ανάπτυγμα του πρώτου σκέλους

$(\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2 = \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2+\gamma^2-2\alpha\gamma+\alpha^2$

$= 2\alpha^2-2\alpha\beta+2\beta^2-2\beta\gamma+2\gamma^2-2\alpha\gamma = 2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma)$

β) Για $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma = 0$, οπότε

$(\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2 = 0$

επειδή $(\alpha-\beta)^2 \geq 0$, $(\beta-\gamma)^2 \geq 0$ και $(\gamma-\alpha)^2 \geq 0$

η σχέση ισχύει αν $\alpha-\beta=0$, $\beta-\gamma=0$ και $\gamma-\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma$

Άσκηση 12

Να αποδείξτε ότι $\dfrac{4}{\nu(\nu+2)} - \dfrac{1}{(\nu+1)(\nu+2)} > \dfrac{2}{\nu(\nu+1)}$ για κάθε θετικό ακέραιο ν

Απάντηση

Πολλαπλασιάζουμε όλα τα μέρη της εξίσωσης με το ν(ν + 1)(ν + 2) και προκύπτει ότι:

$$\nu(\nu+1)(\nu+2)\frac{4}{\nu(\nu+2)} - \nu(\nu+1)(\nu+2)\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)} > \nu(\nu+1)(\nu+2)\frac{2}{\nu(\nu+1)}$$

$\Leftrightarrow\ 4(\nu+1) - \nu > 2(\nu+2)$

$\Leftrightarrow\ 4\nu + 4 - \nu > 2\nu + 4 \ \Leftrightarrow\ \nu > 0$ το οποίο ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο ν

Άσκηση 13

Αν α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου, να αποδείξετε ότι

α) $\alpha^2 + \beta^2 > \gamma^2 - 2\alpha\beta$ **β)** $\alpha^2 + \beta^2 < \gamma^2 + 2\alpha\beta$ **γ)** $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 < 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$

Απάντηση

α) $\alpha^2 + \beta^2 > \gamma^2 - 2\alpha\beta \ \Leftrightarrow\ \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - \gamma^2 > 0 \ \Leftrightarrow\ (\alpha+\beta)^2 - \gamma^2 > 0$

$\Leftrightarrow\ (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma) > 0$ που ισχύει γιατί

$\alpha+\beta+\gamma > 0$ γιατί οι α, β και γ είναι πλευρές τριγώνου και

$\alpha+\beta-\gamma > 0$ που ισχύει λόγω της τριγωνικής ανισότητας (το άθροισμα δυο πλευρών τριγώνου είναι μεγαλύτερο από τη τρίτη πλευρά).

β) $\alpha^2 + \beta^2 < \gamma^2 + 2\alpha\beta \ \Leftrightarrow\ \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta - \gamma^2 < 0 \ \Leftrightarrow\ (\alpha-\beta)^2 - \gamma^2 < 0$

$\Leftrightarrow\ (\alpha-\beta+\gamma)(\alpha-\beta-\gamma) < 0$ που ισχύει γιατί

$(\alpha-\beta+\gamma) > 0 \Leftrightarrow \alpha+\gamma-\beta > 0$ το οποίο ισχύει λόγω της τριγωνικής ανισότητας

$(\alpha-\beta-\gamma) < 0 \ \Leftrightarrow\ \alpha < \beta+\gamma$ το οποίο ισχύει για τον ίδιο λόγο.

γ) Αφού ισχύει ότι $\alpha^2 + \beta^2 < \gamma^2 + 2\alpha\beta$ τότε για κάθε πλευρά του τριγώνου θα ισχύει ότι $\beta^2 + \gamma^2 < \alpha^2 + 2\beta\gamma$ και $\alpha^2 + \gamma^2 < \beta^2 + 2\alpha\gamma$

Προσθέτω αυτές τις ανισότητες κατά μέλη και προκύπτει ότι

$2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 < \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma \ \Leftrightarrow\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 < 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$

Άσκηση 14

Να διατάξτε τους θετικούς ακέραιους α, β, γ από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, αν ισχύει $2007\alpha = 2008\beta = 2009\gamma$.

Απάντηση

Επιλύω ανά δύο τις ισότητες.

$2007\alpha = 2008\beta \Leftrightarrow \alpha = \frac{2008}{2007}\cdot\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$, αφού $\frac{2008}{2007} > 1$ και $\alpha, \beta > 0$

Και $2008\beta = 2009\gamma \Leftrightarrow \beta = \frac{2009}{2008}\cdot\gamma \Leftrightarrow \beta > \gamma$ $\frac{2009}{2008} > 1$ και $\beta, \gamma > 0$

Άρα προκύπτει ότι $\alpha > \beta > \gamma$

Άσκηση 15

Αν $\alpha > 4$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(\alpha + 1)x^2 - (3\alpha - 2)x + \alpha + 1 = 0$ έχει δύο λύσεις άνισες.

Απάντηση

Αρκεί να δείξουμε ότι η διακρίνουσα Δ είναι θετική

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (3\alpha - 2)^2 - 4(\alpha + 1)(\alpha + 1) = 9\alpha^2 - 12\alpha + 4 - 4(\alpha^2 + 2\alpha + 1) =$

$= 9\alpha^2 - 12\alpha + 4 - 4\alpha^2 - 8\alpha - 4 = 5\alpha^2 - 20\alpha = 5\alpha(\alpha - 4)$

Όμως $5\alpha(\alpha - 4) > 0$ διότι $5\alpha > 0$, $\alpha - 4 > 0$ διότι $\alpha > 4$

Άρα η εξίσωση έχει δυο λύσεις άνισες.

Άσκηση 16

Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ που ικανοποιούν τη σχέση

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha - 4\beta - 6\gamma + 14 = 0$

Απάντηση

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha-4\beta-6\gamma+14=0 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha-4\beta-6\gamma+1+4+9=0$

$(\alpha-1)^2+(\beta-2)^2+(\gamma-3)^2=0$

Που ικανοποιείται όταν και οι τρεις όροι είναι 0.

Οπότε $\alpha-1=0,\ \beta-2=0,\ \gamma-3=0$

Άρα $\alpha=1,\ \beta=2,\ \gamma=3$

Άσκηση 17

Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $A=\alpha^2-10\alpha\beta+27\beta^2-8\beta+8$

Για ποιες τιμές των α και β η παράσταση γίνεται ελάχιστη ;

Απάντηση

$A = \alpha^2-10\alpha\beta+27\beta^2-8\beta+8 = \alpha^2-10\alpha\beta+25\beta^2+2\beta^2-8\beta+8 =$

$= (\alpha-5\beta)^2+2(\beta^2-4\beta+4) = (\alpha-5\beta)^2+2(\beta-2)^2 \geq 0$

Επειδή $(\alpha-5\beta)^2 \geq 0$ και $2(\beta-2)^2 \geq 0$ η ελάχιστη τιμή της παράστασης είναι το 0.

Για να ισχύει αυτό πρέπει $(\alpha-5\beta)^2=0$ και $2(\beta-2)^2=0$

Οπότε $\alpha-5\beta=0$ και $\beta-2=0 \Leftrightarrow \alpha=5\beta$ και $\beta=2 \Leftrightarrow \alpha=10$ και $\beta=2$

Άσκηση 18

– Ο καθηγητής

Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x-19}{2001}+\frac{x-17}{2003}+\frac{x-15}{2005}+\frac{x-13}{2007}=4$

– Ο μαθητής

Κύριε αυτή η εξίσωση ούτε μέχρι το 2020 δεν λύνεται

Εσείς μπορείτε να την λύσετε ;

Υπόδειξη : Παρατηρήστε ότι $\frac{x-19}{2001}=\frac{x-2020+2001}{2001}=\frac{x-2020}{2001}+1$ κλπ

Απάντηση

Σύμφωνα με την παρατήρηση τα κλάσματα γίνονται

$$\frac{x-17}{2003}=\frac{x-2020+2003}{2003}=\frac{x-2020}{2003}+\frac{2003}{2003}=\frac{x-2020}{2003}+1$$

Όπως και $\frac{x-15}{2005}=\frac{x-2020}{2005}+1$

Όπως και $\frac{x-13}{2007}=\frac{x-2020}{2007}+1$

Άρα από την υπόθεση και από **(1)**, **(2)**, **(3)** προκύπτει

$$\frac{x-2020}{2001}+1+\frac{x-2020}{2003}+1+\frac{x-2020}{2005}+1+\frac{x-2020}{2007}+1=4$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2020}{2001}+\frac{x-2020}{2003}+\frac{x-2020}{2005}+\frac{x-2020}{2007}=0$$

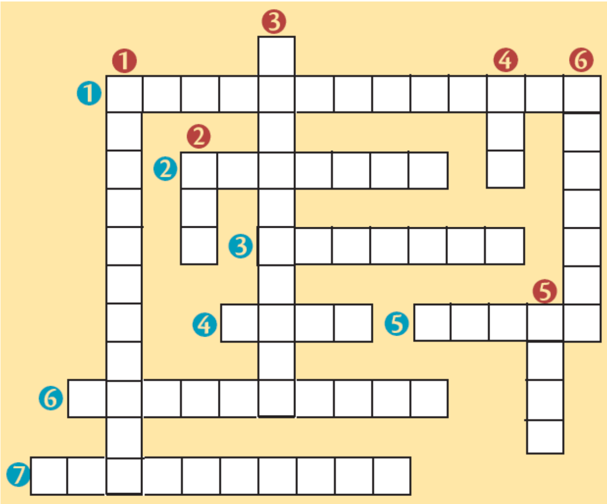
$$\Leftrightarrow (x-2020)\left[\frac{1}{2001}+\frac{1}{2003}+\frac{1}{2005}+\frac{1}{2007}\right]=0$$

Το οποίο ισχύει μόνο όταν $x-2020=0$ επειδή $\left[\frac{1}{2001}+\frac{1}{2003}+\frac{1}{2005}+\frac{1}{2007}\right]>0.$

Άρα $x=2020$

Άσκηση 19

Να λύσετε το σταυρόλεξο.



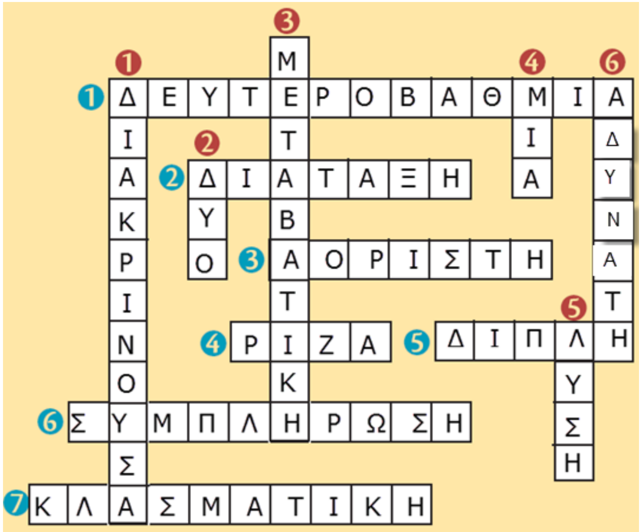
Οριζόντια

1. Είναι η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$
2. Ορίζεται μεταξύ πραγματικών αριθμών
3. Η εξίσωση αυτή επαληθεύεται για κάθε τιμή του αγνώστου
4. Ο αριθμός 2 είναι .....της εξίσωσης $x^2 - 5x + 6 = 0$
5. Είναι η λύση της εξίσωσης $(x-1)^2 = 0$
6. Η επίλυση μιας εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού γίνεται και με ....τετραγώνου
7. Η εξίσωση αυτή περιέχει κλάσμα με άγνωστο στον παρονομαστή .

Κάθετα

1. Το πρόσημο της καθορίζει το πλήθος των λύσεων μιας εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού .
2. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ με $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$ έχει ....λύσεις
3. Ιδιότητα που ισχύει και στην διάταξη πραγματικών αριθμών
4. Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει......λύση
5. Λέγεται και ρίζα μιας εξίσωσης
6. Είναι η εξίσωση $0x = 7$

Απάντηση



Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης – MED - Μαθηματικός

Σολωμού 29 Αθήνα ☎ 210.38.22.157 ☎ 210.38.22.495
On-lineΦροντιστήριο www.arnos.gr info@arnos.gr

ΑΡΝΟΣ
Online Education

…Πράξεις Παιδείας!