

1. Αλγεβρικές Παραστάσεις

$$\begin{aligned}2 \times 2 &= 2^2 = 4 \\2 \times 2 \times 2 &= 2^3 = 8 \\2 \times 2 \times 2 \times 2 &= 2^4 = 16 \\2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 &= 2^5 = 32 \\2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 &= 2^6 = 64 \\2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 &= 2^7 = 128\end{aligned}$$

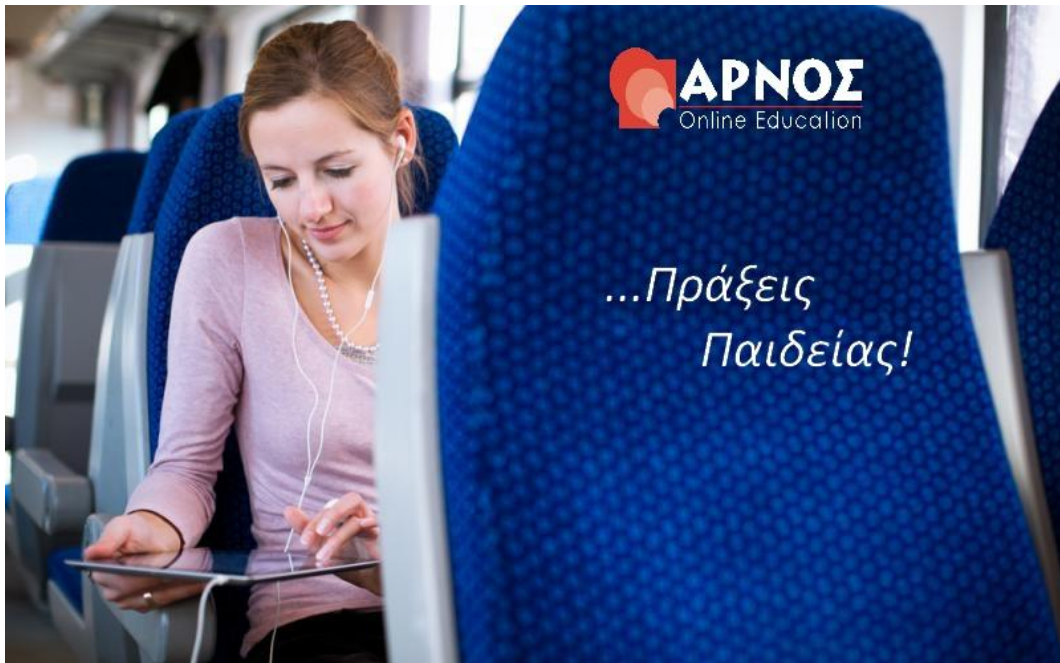
Λύσεις ασκήσεων Μαθηματικών Γ' Γυμνασίου

1.1.Β Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

σχ. βιβλίο (σ. 19)

Φροντιστηριακό e-μάθημα

Γυμνάσιο: 9.000 μαθήματα με βίντεο-διδασκαλία για όλο το σχολικό έτος **μόνο με 150 ευρώ!**



Μελέτη όπου, όποτε και όσο εσύ θες!



Διδάσκουμε μεθοδικά σε βίντεο τη θεωρία του σχολικού βιβλίου και λύνουμε όλες τις ασκήσεις

Δημιουργούμε συνεχώς νέα βίντεο με διδασκαλία για τις εκπαιδευτικές σου απαιτήσεις



Παίζουμε και μαθαίνουμε με on line test αξιολόγησης & SOS διαγωνίσματα προσομοίωσης για τις εξετάσεις

Λύνουμε απορίες ζωντανά on line καθημερινά 3 μ.μ. - 8 μ.μ.



Λύσεις Ασκήσεων Μαθηματικών Γ' Γυμνασίου σχ. βιβλίου (σ. 19)

1.1 Β Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

Ερωτήσεις κατανόησης

Ερώτηση 1

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες

- α) Για κάθε αριθμό a ισχύει $a + a + a + a = a^4$
- β) Για κάθε αριθμό a ισχύει $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$
- γ) Οι αριθμοί $(-5)^6$ και -5^6 είναι αντίθετοι
- δ) Οι αριθμοί $\left(\frac{2}{3}\right)^8$ και $\left(\frac{3}{2}\right)^8$ είναι αντίστροφοι
- ε) Για κάθε αριθμό a ισχύει $(3a)^2 = 9a^2$
- στ) Ο αριθμός $-(-5)^2$ είναι θετικός
- ζ) Ο αριθμός -3^{-2} είναι θετικός

Απάντηση

- α) Είναι **λάθος**, γιατί δεν ισχύει για την πρόσθεση. $a + a + a + a = 4a$
- β) Είναι **σωστό**. Ισχύει για τον πολλαπλασιασμό
- γ) Είναι **σωστό**. Όταν υψώνουμε σε άρτιο αριθμό τότε το πρόσημο της παρένθεσης γίνεται θετικό. $(-5)^6 = 5^6$ και -5^6 είναι αντίθετοι

δ) Είναι **σωστό**, γιατί $\left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^8 = \left(\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 2}\right)^8 = 1^8 = 1$

ε) Είναι **σωστό**, γιατί $(3\alpha)^2 = 3^2 \alpha^2 = 9\alpha^2$

στ) Είναι **λάθος**, διότι $(-5)^2$ θετικό, αλλά η παρένθεση έχει αρνητικό πρόσημο

ζ) Είναι **λάθος**, διότι $-3^{-2} = -\frac{1}{3^2} = -\frac{1}{9}$ είναι αρνητικός.

Ερώτηση 2

Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά χρησιμοποιώντας το κατάλληλο σύμβολο =

ή \neq

α) $(-1)^6 \dots 1$ β) $3^{-2} \dots 9$ γ) $-4^2 \dots -16$ δ) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-1} \dots \frac{2}{5}$

ε) $5^{-2} \dots \frac{1}{-25}$ στ) $\left(\frac{2}{5}\right)^0 \dots 0$ ζ) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 \dots \frac{1}{32}$ η) $(7+2)^2 \dots 7^2 + 2^2$

Απάντηση

Υψώνουμε προσεκτικά στη δύναμη που μας ζητείται. Στη άρτια δύναμη αλλάζει το πρόσημο του αριθμού, όταν υπάρχει παρένθεση ενώ στην περιττή παραμένει ίδιο. Όταν δεν υπάρχει παρένθεση το πρόσημο δεν υψώνεται στη δύναμη και παραμένει ίδιο.

α) $(-1)^6 = 1$ γιατί υψώνουμε σε άρτια δύναμη το (-1)

β) $3^{-2} \neq 9$ γιατί $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

γ) $-4^2 = -16$ γιατί υψώνουμε σε άρτια δύναμη μόνο το 4.

δ) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{5}$ γιατί $\left(\frac{5}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^1 = \frac{2}{5}$

ε) $5^{-2} \neq \frac{1}{-25}$ γιατί $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

στ) $\left(\frac{2}{5}\right)^0 \neq 0$ γιατί $a^0 = 1$ άρα για κάθε $a \neq 0$

ζ) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 \neq \frac{1}{32}$ γιατί $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{2^5} = -\frac{1}{32}$

η) $(7+2)^2 \neq 7^2 + 2^2$ γιατί $(7+2)^2 = 9^2 = 81$ ενώ $7^2 + 2^2 = 49 + 4 = 53$

Ερώτηση 3

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

i) Η τιμή της παράστασης $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ είναι α) $-\frac{4}{9}$ β) $-\frac{9}{4}$ γ) $\frac{9}{4}$ δ) $\frac{4}{9}$

ii) Η τιμή της παράστασης $\left[(-2)^0\right]^3$ είναι α) -2^3 β) -6 γ) 2^3 δ) 1

iii) Η τιμή της παράστασης $2^3 + 3^2$ είναι α) 5^5 β) 17 γ) 5^6 δ) 6^5

Απάντηση

i) Σωστό είναι το (γ) γιατί $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

ii) Σωστό είναι το (δ) γιατί $\left[(-2)^0\right]^3 = (1)^3 = 1$

iii) Σωστό είναι το (β) γιατί $2^3 + 3^2 = 8 + 9 = 17$

Ερώτηση 4

Να συμπληρώσετε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας κάθε παράσταση της στήλης Α το αποτέλεσμα της στήλης Β.

	Στήλη Α	Στήλη Β
α.	$(2^4)^{-1}$	1. $\frac{1}{4}$
β.	$(2^{-5})^2 \cdot 2^{10}$	2. -2^4
γ.	$(-2)^{-2}$	3. 4
δ.	$(2^4 : 2^3) \cdot 2^2$	4. 2^3
		5. 2^{-4}
		6. 1

α	β	γ	δ

Απάντηση

Κάνουμε τις πράξεις των δυνάμεων των πραγματικών αριθμών έτσι όπως αναφέρονται στην θεωρία (σ. 17)

Ιδιότητες	Παραδείγματα
$a^{\mu} \cdot a^{\nu} = a^{\mu+\nu}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$
$a^{\mu} : a^{\nu} = a^{\mu-\nu}$	$3^5 : 3^3 = 3^{5-3} = 3^2$
$(a\beta)^{\nu} = a^{\nu}\beta^{\nu}$	$(2x)^2 = 2^2x^2 = 4x^2$
$\left(\frac{a}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{a^{\nu}}{\beta^{\nu}}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$
$(a^{\mu})^{\nu} = a^{\mu\nu}$	$(2^{-3})^{-2} = 2^6 = 64$
$\left(\frac{a}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{a}\right)^{\nu}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4$

α. $(2^4)^{-1} = 2^{-1 \cdot 4} = 2^{-4}$

β. $(2^{-5})^2 \cdot 2^{10} = 2^{-10} \cdot 2^{10} = 2^0 = 1$

γ. $(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$

δ. $(2^4 : 2^3) \cdot 2^2 = (2^{4-3}) \cdot 2^2 = 2 \cdot 2^2 = 2^3$

Επομένως:

α	β	γ	δ
5	6	1	4

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να γράψετε κάθε μία από τις παρακάτω παραστάσεις ως μία δύναμη

α) $2^{-5} \cdot 2^8$ β) $3^4 : 3^{-2}$ γ) $2^3 \cdot 5^3$ δ) $(5^{-2})^{-4}$

ε) $3^{-2} \cdot (-3)^4$ στ) $\frac{(-6)^6}{2^6}$ ζ) $4^2 : 3^4$ η) $27 \cdot 3^4 \cdot \frac{1}{3^5}$

Λύση

Εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των δυνάμεων.

α) $a^m \cdot a^v = a^{m+v}$ $2^{-5} \cdot 2^8 = 2^{-5+8} = 2^3$

β) $a^m \cdot a^v = a^{m+v}$ $3^4 : 3^{-2} = 3^{4-(-2)} = 3^{4+2} = 3^6$

γ) $(a\beta)^v = a^v \beta^v$ $2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3$

δ) $(a^m)^v = a^{mv}$ $(5^{-2})^{-4} = 5^{(-2)(-4)} = 5^8$

ε) $a^m \cdot a^v = a^{m+v}$ $3^{-2} \cdot (-3)^4 = 3^{-2} \cdot 3^4 = 3^{-2+4} = 3^2$

στ) $\left(\frac{a}{\beta}\right)^v = \frac{a^v}{\beta^v}$ $\frac{(-6)^6}{2^6} = \left(\frac{-6}{2}\right)^6 = (-3)^6 = 3^6$

Συνδυασμός ιδιοτήτων με μετασχηματισμό των βάσεων

ζ) Επειδή $4 = 2^2$ έχουμε $4^2 : 3^4 = (2^2)^2 : 3^4 = 2^4 : 3^4 = (2:3)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4$

η) Επειδή $27 = 3^3$ έχουμε $27 \cdot 3^4 \cdot \frac{1}{3^5} = 3^3 \cdot 3^4 \cdot 3^{-5} = 3^{3+4-5} = 3^2$

Άσκηση 2

Να υπολογίσετε την τιμή κάθε παράστασης

α) $(2^{-2})^3 \cdot 2^8$ β) $(-3)^2 \cdot (-3)^{-4}$ γ) $(0,75)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$ δ) $36^3 : (-12)^3$

ε) $(2,5)^4 \cdot (-4)^4$ στ) $4^{12} : 2^{20}$ ζ) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{12} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-14}$ η) $(0,01)^3 \cdot 10^5$

Λύση

Συνδυάζουμε τις ιδιότητες και όπου χρειάζεται μετασχηματίζουμε τις βάσεις.

α) $(2^{-2})^3 \cdot 2^8 = 2^{-6} \cdot 2^8 = 2^2 = 4$

β) $(-3)^2 \cdot (-3)^{-4} = (-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$

γ) Επειδή $\frac{3}{4} = 0,75$ έχουμε $(0,75)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = (0,75)^{-2} \cdot 0,75^2 = 0,75^0 = 1$

δ) $36^3 : (-12)^3 = [36 : (-12)]^3 = (-3)^3 = -27$

ε) $(2,5)^4 \cdot (-4)^4 = [2,5(-4)]^4 = (-10)^4 = 10000$

στ) $4^{12} : 2^{20} = (2^2)^{12} : 2^{20} = 2^{24} : 2^{20} = 2^4 = 16$

ζ) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{12} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-14} = \left(\frac{2}{3}\right)^{12} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-14} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

η) Επειδή $0,01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$ έχουμε

$$(0,01)^3 \cdot 10^5 = [10^{-2}]^3 \cdot 10^5 = 10^{-6} \cdot 10^5 = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

Άσκηση 3

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $(x^2)^3 \cdot 5x^4$ β) $(xy^3)^2 \cdot x^3y$ γ) $(-2x)^2 \cdot (-2x^2)$

δ) $\left(-\frac{2}{3}x\right)^3 : x^2$ ε) $(-3x^2)^3 \cdot (-2x^3)^2$ στ) $\frac{3}{-2}x^3 : \left(-\frac{3}{2}x\right)^2$

Λύση

Εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των δυνάμεων (όπου υπάρχουν).

α) $(x^2)^3 \cdot 5x^4 = x^6 \cdot 5x^4 = x^6 \cdot 5x^4 = 5 \cdot x^4 x^6 = 5x^{10}$

β) $(xy^3)^2 \cdot x^3y = (x^2y^6) \cdot x^3y = x^2y^6 \cdot x^3y = x^2x^3y^6y = x^5y^7$

γ) $(-2x)^2 \cdot (-2x^2) = 4x^2 \cdot (-2x^2) = (-2) \cdot 4 \cdot x^2 x^2 = -8x^4$

δ) $\left(-\frac{2}{3}x\right)^3 : x^2 = \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^3 x^3}{x^2} = \frac{-\frac{8}{27}x^3}{x^2} = \frac{-8x^3}{27x^2} = -\frac{8}{27}x$

ε) $(-3x^2)^3 \cdot (-2x^3)^2 = -27x^6 \cdot 4x^6 = -27 \cdot 4 \cdot x^6 x^6 = -108x^{12}$

στ) $\frac{3}{-2}x^3 : \left(-\frac{3}{2}x\right)^2 = \frac{\frac{3}{-2}x^3}{\left(-\frac{3}{2}x\right)^2} = \frac{-\frac{3x^3}{2}}{\frac{9x^2}{4}} = -\frac{3x^3}{2} \cdot \frac{4}{9x^2} = -\frac{4 \cdot 3 \cdot x^3}{2 \cdot 9 \cdot x^2} = -\frac{2x^3}{3x^2} = -\frac{2}{3}x$

Άσκηση 4

Να υπολογίσετε την τιμή κάθε παράστασης:

A = $3 \cdot (-2)^2 + 4 - (-7)^0 \cdot 2 - 8(2^{-1} - 1) - 2 \cdot 3^2$ B = $(-4)^2 : 2 - 5 - (-3) \cdot 2^2 - (-2)^4$

Γ = $(2,5)^2 \cdot (1,25)^3 \cdot (-4)^2 \cdot (-8)^3$ Δ = $(25^7 \cdot 8^4) : (5^7 \cdot 40^4)$

Λύση

Προτεραιότητα των πράξεων. Πρώτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις, στη συνέχεια κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις, στο τέλος κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= 3 \cdot (-2)^2 + 4 - (-7)^0 \cdot 2 - 8(2^{-1} - 1) - 2 \cdot 3^2 = 3 \cdot 4 + 4 - 1 \cdot 2 - 8 \left(\frac{1}{2} - 1 \right) - 2 \cdot 9 = \\ &= 12 + 4 - 2 - 8 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{2} \right) - 18 = 12 + 4 - 2 - 8 \left(-\frac{1}{2} \right) - 18 = \\ &= 12 + 4 - 2 + 4 - 18 = 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{B} = (-4)^2 : 2 - 5 - (-3) \cdot 2^2 - (-2)^4 = 16 : 2 - 5 - (-3) \cdot 4 - 16 = 8 - 5 + 12 - 16 = -1$$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma} &= (2,5)^2 \cdot (1,25)^3 \cdot (-4)^2 \cdot (-8)^3 = (2,5)^2 \cdot (-4)^2 \cdot (1,25)^3 \cdot (-8)^3 \\ &= [2,5(-4)]^2 \cdot [1,25(-8)]^3 = (-10)^2(-10)^3 = (-10)^5 = -100000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Delta} &= (25^7 \cdot 8^4) : (5^7 \cdot 40^4) = \frac{25^7 \cdot 8^4}{5^7 \cdot 40^4} = \frac{25^7}{5^7} \cdot \frac{8^4}{40^4} = \left(\frac{25}{5} \right)^7 \cdot \left(\frac{8}{40} \right)^4 = \\ &= 5^7 \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^4 = 5^7 \cdot \frac{1}{5^4} = 5^3 = 125 \end{aligned}$$

Άσκηση 5

Αν τριπλασιάσουμε την πλευρά ενός τετραγώνου πόσες φορές μεγαλώνει το εμβαδόν του ;

Λύση

Το εμβαδόν E ενός τετράγωνου με πλευρά a , είναι $E = a^2$

Αν τριπλασιάσουμε την πλευρά του, αυτή θα γίνει $3 \cdot a$ και το εμβαδόν

$$E' = (3a)^2 = 9a^2 = 9E.$$

Το εμβαδόν του νέου τετράγωνου θα είναι εννέα φορές το αρχικό.

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης – ΜΕΔ - Μαθηματικός



...Πράξεις Παιδείας!