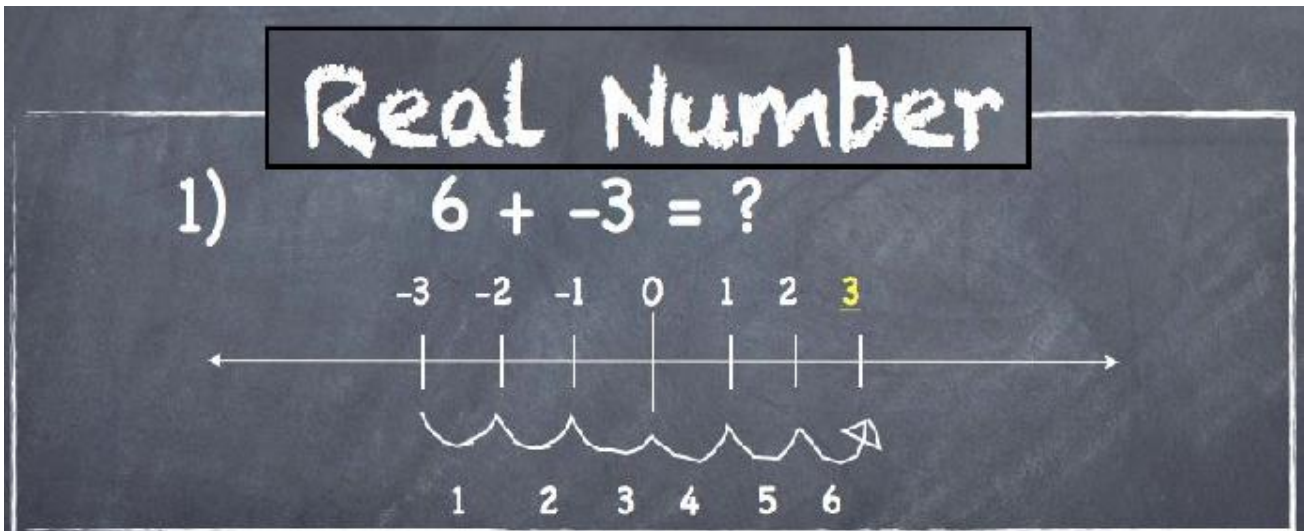


1. Αλγεβρικές Παραστάσεις



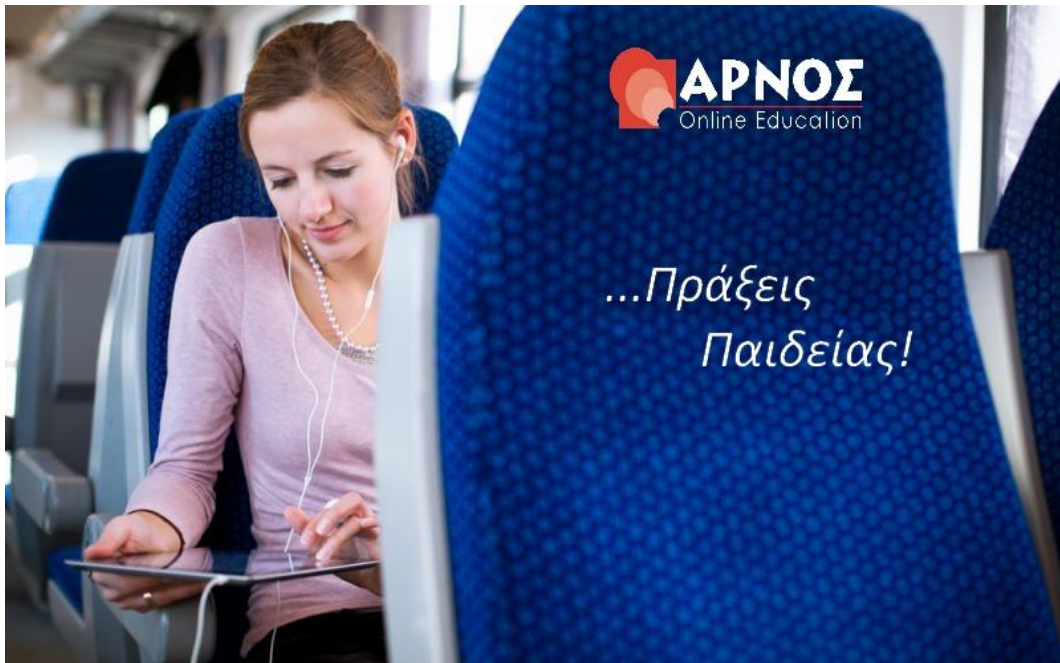
Λύσεις ασκήσεων Μαθηματικών Γ' Γυμνασίου

1.1.Α Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους

σχ. βιβλίο (σσ. 15-16)

Φροντιστηριακό e-μάθημα

Γυμνάσιο: 9.000 μαθήματα με βίντεο-διδασκαλία για όλο το σχολικό έτος **μόνο με 150 ευρώ!**



Μελέτη όπου, όποτε και όσο εσύ θες!



Διδάσκουμε μεθοδικά σε βίντεο τη θεωρία του σχολικού βιβλίου και λύνουμε όλες τις ασκήσεις

Δημιουργούμε συνεχώς νέα βίντεο με διδασκαλία για τις εκπαιδευτικές σου απαιτήσεις



Παίζουμε και μαθαίνουμε με on line test αξιολόγησης & SOS διαγωνίσματα προσομοίωσης για τις εξετάσεις

Λύνουμε απορίες ζωντανά on line καθημερινά 3 μ.μ. - 8 μ.μ.



Λύσεις Ασκήσεων Μαθηματικών Γ' Γυμνασίου σχ. βιβλίου (σσ. 15-16)

1.1 Α Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους

Ερωτήσεις κατανόησης

Ερώτηση 1

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα σημειώνοντας 'x' στην κατάλληλη θέση

	-3	$\frac{1}{2}$	6	$0,\bar{3}$	-0,8	$\sqrt{3}$	$\sqrt{16}$	3,14	π	$\frac{22}{7}$
Ακέραιος										
Ρητός										
Άρρητος										

Απάντηση

Γνωρίζοντας ότι οι ακέραιοι είναι όλοι οι αριθμοί ανήκουν στο σύνολο

$\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, οι ρητοί είναι όλοι οι αριθμοί που μπορούν να

πάρουν τη μορφή κλάσματος και άρρητος οποιοσδήποτε αριθμός που δεν μπορεί

να πάρει τη μορφή κλάσματος έχουμε ότι:

	-3	$\frac{1}{2}$	6	$0,\bar{3}$	-0,8	$\sqrt{3}$	$\sqrt{16}$	3,14	π	$\frac{22}{7}$
Ακέραιος	X		X				X			
Ρητός	X	X	X	X	X		X	X		X
Άρρητος						X			X	

Ερώτηση 2

Να συμπληρώσετε τις ισότητες

α) $-3 + 7 = \dots$	β) $-6 + 6 = \dots$	γ) $-2 - 9 = \dots$
δ) $(-2) \cdot \frac{1}{3} = \dots$	ε) $0 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = \dots$	στ) $\left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = \dots$
ζ) $(-6) : \left(-\frac{12}{5}\right) = \dots$	η) $\left(-\frac{8}{5}\right) : (+4) = \dots$	θ) $\left(-\frac{4}{3}\right) : \left(+\frac{4}{3}\right) = \dots$

Απάντηση

α) $-3 + 7 = 4$ β) $-6 + 6 = 0$ γ) $-2 - 9 = -11$ δ) $(-2) \cdot \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$

ε) $0 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = 0$ στ) $\left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = 1$ ζ) $(-6) : \left(-\frac{12}{5}\right) = \frac{5}{2}$

η) $\left(-\frac{8}{5}\right) : (+4) = -\frac{2}{5}$ θ) $\left(-\frac{4}{3}\right) : \left(+\frac{4}{3}\right) = -1$

Ερώτηση 3

Να συμπληρώσετε τις ισότητες

α) $(-3 \cdot 2 - 5)x = \dots$ β) $-3(2 - 5x) = \dots$ γ) $-3(2 - 5)x = \dots$

δ) $-2(x \dots) = \dots + 6$ ε) $(3 + x)(2 + y) = \dots$ στ) $4(\dots + \dots) = 12x + 8$

Απάντηση

Χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες της επιμεριστικής ιδιότητας

α) $(-3 \cdot 2 - 5)x = (-6 - 5)x = -11x$

β) $-3(2 - 5x) = -6 + 15x$

γ) $-3(2 - 5)x = -3(-3)x = 9x$

δ) $-2(x - 3) = -2x + 6$

ε) $(3 + x)(2 + y) = 6 + 3y + 2x + xy$

στ) $4(3x + 2) = 12x + 8$

Ερώτηση 4

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

- i) Αν δύο αριθμοί είναι αντίθετοι τότε
- α) είναι ομόσημοι β) έχουν ίσες απόλυτες τιμές
γ) έχουν γινόμενο μηδέν δ) έχουν γινόμενο την μονάδα
- ii) Αν δύο αριθμοί είναι αντίστροφοι τότε
- α) είναι ετερόσημοι β) έχουν άθροισμα μηδέν
γ) έχουν ίσες απόλυτες τιμές δ) έχουν γινόμενο την μονάδα

Απάντηση

- i) Σωστό το β
ii) Σωστό το δ

Ερώτηση 5

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες

- α) Οι αντίστροφοι αριθμοί είναι ομόσημοι
β) Το άθροισμα δύο ομόσημων είναι θετικός
γ) Η απόλυτη τιμή κάθε πραγματικού αριθμού είναι θετικός
δ) Δύο αριθμοί με γινόμενο θετικό και άθροισμα αρνητικό είναι αρνητικοί

Απάντηση

- α) Είναι **σωστό** γιατί έχουν θετικό γινόμενο αφού $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$
β) Είναι **λάθος**, γιατί π.χ. $-3 - 6 = -9$

γ) Είναι **λάθος** γιατί μπορεί να είναι και μηδέν.

δ) Είναι **σωστό** γιατί δύο αριθμοί με γινόμενο θετικό είναι ομόσημοι, άρα αν το άθροισμα αρνητικό θα είναι αρνητικοί.

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να κάνετε τις πράξεις

α) $2 + 3 \cdot 4 - 12 : (-4) + 1$ β) $2 + 3(4 - 12) : (-4 + 1)$

γ) $-3(-2) - 5 + 4 : (-2) - 6$ δ) $-8 : (-3 + 5) - 4(-2 + 6)$

Λύση

Χρησιμοποιούμε την επιμεριστική ιδιότητα και την προτεραιότητα των πράξεων.

α) $2 + 3 \cdot 4 - 12 : (-4) + 1 = 2 + 12 + 3 + 1 = 18$

β) $2 + 3(4 - 12) : (-4 + 1) = 2 + 3(-8) : (-3) = 2 + (-24) : (-3) = 2 + 8 = 10$

γ) $-3(-2) - 5 + 4 : (-2) - 6 = 6 - 5 - 2 - 6 = -7$

δ) $-8 : (-3 + 5) - 4(-2 + 6) = -8 : 2 - 4 \cdot 4 = -4 - 16 = -20$

Άσκηση 2

Τα αποτελέσματα των πράξεων σχηματίζουν το έτος που έγινε ένα γεγονός στην χώρα μας με παγκόσμιο ενδιαφέρον.

$-(5 - 4) - (+2) + (-6 + 4) - (-7) =$	<input type="text"/>
$4 - (-2 + 6 - 3) + (-9 + 6) =$	<input type="text"/>
$14 + (-6 + 5 - 3) - (-4 - 1) \cdot (-2) =$	<input type="text"/>
$(-3) \cdot (-2) + 4 - (+5) - (-1) : (-1) =$	<input type="text"/>

Λύση

Χρησιμοποιούμε τα παραδείγματα επίλυσης πράξεων της σελίδας 14

$$-(5-4) - (+2) + (-6+4) - (-7) = -1 - (+2) + (-2) - (-7) = -1 - 2 - 2 + 7 = 2$$

$$4 - (-2 + 6 - 3) + (-9 + 6) = 4 - (+1) + (-3) = 4 - 1 - 3 = 0$$

$$14 + (-6 + 5 - 3) - (-4 - 1)(-2) = 14 + (-4) - (-5)(-2) = 14 - 4 - 10 = 0$$

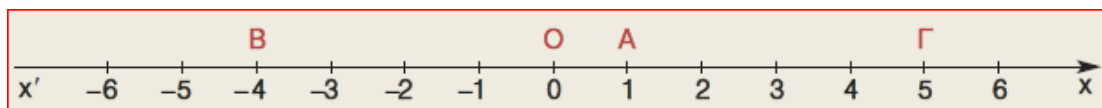
$$(-3)(-2) + 4 - (+5) - (-1) : (-1) = 6 + 4 - 5 - (+1) = 6 + 4 - 5 - 1 = 4$$

$-(5-4) - (+2) + (-6+4) - (-7) =$	2
$4 - (-2 + 6 - 3) + (-9 + 6) =$	0
$14 + (-6 + 5 - 3) - (-4 - 1) \cdot (-2) =$	0
$(-3) \cdot (-2) + 4 - (+5) - (-1) : (-1) =$	4

Έτος : 2004 Ολυμπιακοί Αγώνες στην Αθήνα. Κατάκτηση του Ευρωπαϊκού Κυπέλου από την Ελλάδα στην Πορτογαλία.

Άσκηση 3

Ένα αυτοκίνητο ξεκίνησε από την θέση Ο, κινήθηκε πάνω στον άξονα $x'x$ προς τα αριστερά στην θέση Β και στη συνέχεια προς τα δεξιά στη θέση Γ. Αν είναι $OA = 5$ km, τότε να βρείτε πόσο διάστημα διήνυσε το αυτοκίνητο και πόσο μετακινήθηκε από την αρχική του θέση.



Λύση

Πρέπει να υπολογίσουμε ξεχωριστά την απόσταση μεταξύ δυο σημείων για να μπορέσουμε να κάνουμε πράξεις μεταξύ τους.

$$OB + BΓ = 4OA + 9OA = 13OA = 13 \cdot 5 = 65 \text{ km}$$

Το διάστημα που διήνυσε το αυτοκίνητο είναι 65 km

$$OΓ = 5OA = 5 \cdot 5 = 25$$

Το αυτοκίνητο μετακινήθηκε από την αρχική του θέση κατά 25 km

Άσκηση 4

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$$\alpha) \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(+\frac{1}{12}\right) \quad \beta) -\left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{3} - \frac{11}{6}\right)$$

$$\gamma) -5 \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - 5 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) \quad \delta) \left(1 - \frac{7}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{5}\right) - \frac{3}{5} : \left(-\frac{2}{5} + \frac{2}{3}\right)$$

Λύση

Παράδειγμα επίλυσης πράξεων μεταξύ κλασμάτων αποτελούν τα παραδείγματα στη σελίδα 14

$$\alpha) \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(+\frac{1}{12}\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} - \frac{6}{12} - \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\beta) -\left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{3} - \frac{11}{6}\right) = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + \frac{5}{6} - \frac{1}{2} + \frac{5}{3} - \frac{11}{6} = \frac{6}{3} - \frac{4}{2} - \frac{6}{6} = 2 - 2 - 1 = -1$$

$$\gamma) -5 \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - 5 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right) = -\frac{5}{2} - \frac{2}{3} - \frac{5}{2} + \frac{10}{3} = -\frac{10}{2} + \frac{8}{3} = -\frac{15}{3} + \frac{8}{3} = -\frac{7}{3}$$

$$\delta) \left(1 - \frac{7}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{5} \right) - \frac{3}{5} : \left(-\frac{2}{5} + \frac{2}{3} \right) = \left(\frac{2}{2} - \frac{7}{2} \right) \left(\frac{5}{10} - \frac{8}{10} \right) - \frac{3}{5} : \left(-\frac{6}{15} + \frac{10}{15} \right) =$$

$$= \left(-\frac{5}{2} \right) \left(-\frac{3}{10} \right) - \frac{3}{5} : \left(+\frac{4}{15} \right) = \left(-\frac{5}{2} \right) \left(-\frac{3}{10} \right) - \frac{3}{5} \cdot \left(+\frac{15}{4} \right) = \frac{15}{20} - \frac{45}{20} = -\frac{30}{20} = -\frac{3}{2}$$

Άσκηση 5

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$$\alpha) \frac{-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - 1}{3 - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}} \quad \beta) \frac{-2 \cdot 3 - \frac{1}{4}}{-2 \cdot \left(3 - \frac{1}{4} \right)} \quad \gamma) -7 + \frac{-3 - \frac{1}{3}}{-2 + \frac{1}{3}}$$

Λύση

Για την επίλυση σύνθετων κλασμάτων, πρέπει πρώτα να επιλύσουμε τα επιμέρους κλάσματα στον αριθμητή και των παρονομαστή

$$\alpha) \frac{-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - 1}{3 - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{6}{6}}{\frac{18}{6} - \frac{1}{6} + \frac{3}{6}} = \frac{-\frac{5}{6}}{\frac{20}{6}} = \frac{-5 \cdot 6}{20 \cdot 6} = \frac{-5}{20} = -\frac{1}{4}$$

$$\beta) \frac{-2 \cdot 3 - \frac{1}{4}}{-2 \cdot \left(3 - \frac{1}{4} \right)} = \frac{-6 - \frac{1}{4}}{-6 + \frac{2}{4}} = \frac{-\frac{24}{4} - \frac{1}{4}}{-\frac{24}{4} + \frac{2}{4}} = \frac{-\frac{25}{4}}{-\frac{22}{4}} = \frac{-25 \cdot 4}{-22 \cdot 4} = \frac{25}{22}$$

$$\gamma) -7 + \frac{-3 - \frac{1}{3}}{-2 + \frac{1}{3}} = -7 + \frac{-\frac{9}{3} - \frac{1}{3}}{-\frac{6}{3} + \frac{1}{3}} = -7 + \frac{-\frac{10}{3}}{-\frac{5}{3}} = -7 + \frac{-10 \cdot 3}{-5 \cdot 3} = -7 + 2 = -5$$

Άσκηση 6

Οι ελάχιστες θερμοκρασίες μιας πόλης το πρώτο δεκαήμερο του έτους ήταν
1, -3, 0, 2, 1, -2, -5, 0, -3, -1. Να βρείτε την μέση ελάχιστη θερμοκρασία της πόλης στο δεκαήμερο αυτό .



Λύση

Θα πρέπει να βρούμε το άθροισμα των θερμοκρασιών και να τις διαιρέσουμε με τον αριθμό των μερών

$$\frac{1+(-3)+0+2+1+(-2)+(-5)+0+(-3)+(-1)}{10} = \frac{1-3+2+1-2-5-3-1}{10} = \frac{-10}{10} = -1$$

Η μέση ελάχιστη θερμοκρασία της πόλης στο δεκαήμερο είναι ίση με -1

Άσκηση 7

Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά χρησιμοποιώντας το κατάλληλο σύμβολο (+ ή -)

α) $12 \dots 5 \dots 20 = -3$ β) $-8 \dots 9 \dots 1 = 0$

γ) $\frac{5}{4} \dots \frac{3}{4} \dots \frac{10}{4} = 3$ δ) $-0,35 \dots 6,15 \dots 8,50 = 2$

Λύση

Θα κάνουμε συνδυασμό προσήμων. Θα μας βοηθήσει να ξεκινήσουμε με ένα τυχαίο σύμβολο πράξης και να δούμε αν τα αποτελέσματα είναι τα ζητούμενα.

α) $12 \dots 5 \dots 20 = -3 \quad \rightarrow \quad 12 + 5 - 20 = -3$

$$\beta) -8 \dots 9 \dots 1 = 0 \quad \rightarrow \quad -8 + 9 - 1 = 0$$

$$\gamma) \frac{5}{4} \dots \frac{3}{4} \dots \frac{10}{4} = 3 \quad \rightarrow \quad \frac{5}{4} - \frac{3}{4} + \frac{10}{4} = 3$$

$$\delta) -0,35 \dots 6,15 \dots 8,50 = 2 \quad \rightarrow \quad -0,35 - 6,15 + 8,50 = 2$$

Άσκηση 8

Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες

$$\alpha) 8 - (\alpha - \beta) + (\alpha - 5 - \beta) = 3$$

$$\beta) 2 - (\alpha + \beta - \gamma) - (4 + \gamma - \beta) - (-2 - \alpha) = 0$$

$$\gamma) -2(\alpha - 3) + \alpha(-7 + 9) - 3(+2) = 0$$

Λύση

Το πρόσημο των αριθμών εντός της παρένθεσης εξαρτάται από το πρόσημο της παρένθεσης και κάνουμε προσεκτικά τους υπολογισμούς

$$\alpha) 8 - (\alpha - \beta) + (\alpha - 5 - \beta) = 8 - \alpha + \beta + \alpha - 5 - \beta = 8 - \alpha + \beta + \alpha - 5 - \beta = 3$$

$$\beta) 2 - (\alpha + \beta - \gamma) - (4 + \gamma - \beta) - (-2 - \alpha) = \\ = 2 - \alpha - \beta + \gamma - 4 - \gamma + \beta + 2 + \alpha = 2 - 4 + 2 = 0$$

$$\gamma) -2(\alpha - 3) + \alpha(-7 + 9) - 3(+2) = -2\alpha + 6 - 7\alpha + 9\alpha - 6 = -2\alpha + 2\alpha = 0$$

Άσκηση 9

Αν $x + y = -5$ και $\omega + \phi = -7$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$$A = 4 - (x - \omega) - (y - \phi) \quad B = -(-5 - x + \phi) + (-8 + y) - (\omega - 4)$$

Λύση

Ξεκινάμε να απλοποιούμε τις A, B. Διαμορφώνουμε τις παραστάσεις που δίνονται και αντικαθιστούμε με τις ισότητες της υπόθεσης

$$A = 4 - (x - \omega) - (y - \phi) = 4 - x + \omega - y + \phi = 4 - (x + y) + (\omega + \phi) \\ = 4 - (-5) + (-7) = 4 + 5 - 7 = 2$$

$$B = -(-5 - x + \phi) + (-8 + y) - (\omega - 4) = 5 + x - \phi - 8 + y - \omega + 4 = \\ = 1 + (x + y) - (\phi + \omega) = 1 + (-5) - (-7) = 1 - 5 + 7 = 3$$

Άσκηση 10

Αν α και β είναι οι διαστάσεις ενός ορθογώνιου που έχει περίμετρο 56 και γ , δ οι διαστάσεις ενός άλλου ορθογώνιου που έχει περίμετρο 32, να υπολογίσετε την παράσταση $A = \alpha - (9 - 2\gamma) - (15 - \beta - 2\delta)$

Λύση

Γνωρίζουμε ότι το ορθογώνιο έχει τις απέναντι πλευρές ίσες. Άρα επιλύουμε πρώτα τα αθροίσματα των πλευρών των ορθογώνιων.

$$\text{Από την υπόθεση για το ορθογώνιο που έχει περίμετρο 56 έχουμε } 2\alpha + 2\beta = 56$$

$$\text{άρα } \alpha + \beta = 28$$

$$\text{Για το ορθογώνιο που έχει περίμετρο 32 έχουμε } 2\gamma + 2\delta = 32.$$

$$\text{Άρα } A = \alpha - (9 - 2\gamma) - (15 - \beta - 2\delta) = \alpha - 9 + 2\gamma - 15 + \beta + 2\delta$$

$$= (\alpha + \beta) - 24 + (2\gamma + 2\delta) = 28 - 24 + 32 = 36$$

Άσκηση 11

Τοποθετήστε καθέναν από τους παρακάτω αριθμούς
-7, -6, -5, -3, 1, 2, 4, 5, 9
σε ένα τετράγωνο, ώστε τα τρία αθροίσματα να είναι
ίσα μεταξύ τους.

<input type="text"/>	+	<input type="text"/>	+	<input type="text"/>	=	<input type="text"/>
<input type="text"/>	+	<input type="text"/>	+	<input type="text"/>	=	<input type="text"/>
<input type="text"/>	+	<input type="text"/>	+	<input type="text"/>	=	<input type="text"/>

Λύση

Ελέγχω αν δυο ομάδες αθροισμάτων έχουν την ίδια λύση αυτομάτως προκύπτει και το τρίτο ζευγάρι με τους υπόλοιπους αριθμούς.

$$\boxed{-7} + \boxed{2} + \boxed{5} = \boxed{0}$$

$$\boxed{-6} + \boxed{-3} + \boxed{9} = \boxed{0}$$

$$\boxed{-5} + \boxed{1} + \boxed{4} = \boxed{0}$$

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης – ΜΕΔ - Μαθηματικός



...Πράξεις Παιδείας!