ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

1. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε ο $z = (\lambda + 3i)(2 - i)$ να είναι:
α) πραγματικός αριθμός β) φανταστικός αριθμός.

2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y για τους οποίους ισχύει:

α) $(x + y) + (x - y)i = 3 - i$

β) $\sqrt{3x^2 + x - 6} + (x^2 - 3)i = 2 + i$

γ) $9 - 27i = (3x + 2y) - yi$.

3. Στο μιγαδικό επίπεδο να σημειώσετε τις εικόνες και τις διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών αριθμών: $1+i$, 1, i, $-2i$, $3+4i$, $3-4i$, 5, 0.

4. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις:
α) Το πραγματικό μέρος του z είναι ίσο με μηδέν.
β) Το φανταστικό μέρος του z είναι ίσο με μηδέν.
γ) Το πραγματικό μέρος του z είναι ίσο με το φανταστικό του μέρος.

5. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να εκτελέσετε τις πράξεις που σημειώνονται και να γράψετε το αποτέλεσμα στη μορφή $\alpha + \beta i$

α) $(-4 + 6i) - (7 - 2i)$ β) $(3 - 2i) - (6 + 4i)$

γ) $(3 + 4i) + (-8 - 7i) + (5 + 3i)$ δ) $(3 + 2i)(4 + 5i)$

ε) $3i(6 + i)$ στ) $(4 + 3i)(4 - 3i)$

ζ) $i(3 + i)(2 - i)$.

6. Να γράψετε τους παρακάτω μιγαδικούς στη μορφή $\alpha + \beta i$:

α) $\dfrac{1}{1-i}$ β) i^6

γ) $i^2 + 2i + 1$ δ) $(1 + i\sqrt{3})^2$

ε) $\dfrac{3+i}{2-i}$ στ) $\dfrac{6 - i\sqrt{2}}{1 + i\sqrt{2}}$.

7. Να βρείτε τους $x, y \in \mathbb{R}$, για τους οποίους ισχύει:

α) $(3-2i)^2 - (x+iy) = x - yi$

β) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2 + \dfrac{1}{x+iy} = 1+i$

γ) $(3-2i)(2x-iy) = 2(2x-iy) + 2i - 1$.

8. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $i^6 + i^{16} + i^{26} + i^{36} + i^{46} + i^{56}$

β) $\dfrac{1}{i^{11}} - \dfrac{1}{i^{41}} + \dfrac{1}{i^{75}} - \dfrac{1}{i^{1023}}$.

9. Ποιος είναι ο $\bar{z}$, όταν:

α) $z = -5 + 7i$ β) $z = -4 - 9i$ γ) $z = 4i$

δ) $z = 11$ ε) $z = -i$ στ) $z = 0$.