

2.2 Κατακόρυφη και Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης

Ασκήσεις επανάληψης κεφαλαίου 2

1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις :

a. $F(x) = 3x - 6$

b. $F(x) = -4x + \sqrt{2}$

c. $F(x) = x^2 - 1$

d. $F(x) = 2x^3 + 5$

2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις :

a. $F(x) = x^2 - 3x + 2$

b. $F(x) = -3x^2 + 6x - 5$

c. $F(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$

d. $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$

e. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ x^3, & x < 0 \end{cases}$

f. $F(x) = |x - 2|$

3. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση

$f(x) = 2x^3 + 5x - 2$ και στη συνέχεια να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(2016)$ και $f(2017)$.

4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{x}$ και στη συνέχεια να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\pi)$ και $f(3,2)$.

Η Γνώση με τρόπο απλό και κατανοητό!

1

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x - 12$.
- Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
 - Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
 - Να λύσετε την ανίσωση $x^3 + 2x > 12$
6. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων :
- $F(x) = 2|x| - 1$
 - $F(x) = 5 - 3|x|$
 - $F(x) = -|x + 2| - 3$
 - $F(x) = 2|x + 1| - 1$
7. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων :
- $F(x) = 3x^2 + 1$
 - $F(x) = 2 - 4x^4$
 - $F(x) = (x + 1)^2 - 3$
 - $F(x) = 2 - (x - 1)^4$
8. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων :
- $f(x) = \sqrt{x} + 3$
 - $f(x) = 1 - 2\sqrt{x - 2}$
 - $f(x) = \frac{-2}{1 + \sqrt{x}}$
 - $f(x) = x^2 - 2x + 2$
 - $f(x) = -x^2 + 5x - 2$
 - $f(x) = x^2 - 4x + 5$

9. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις :

a. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2}$ έχει ελάχιστο το $\frac{1}{2}$ και να ορίσετε τη θέση του ελαχίστου.

b. $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$ έχει μέγιστο για $x = 2$ και ελάχιστο για $x = -2$.

10. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές.

a. $F(x)=x^4-6x^2+7$

b. $F(x) = -x^2-2|x|-2$

c. $F(x) = \sqrt{1-|x|}$

d. $F(x)=x+\frac{1}{x}$

e. $F(x)=x^2-\frac{2}{|x|}$

f. $F(x) = \frac{x^2+1}{x^3+4x}$

g. $F(x)=\frac{2}{x-1}$

h. $F(x)=\sqrt{x-1}$

11. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, γνησίως μονότονη, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από τα σημεία $A(2,3)$ και $B(-1,5)$.

a. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .

b. Να συγκρίνετε τους αριθμούς : i) $f(-1)$ και $f(0)$ ii) $f(\alpha-1)$ και $f(\alpha)$

Η Γνώση με τρόπο απλό και κατανοητό!

3

c. Να λυθούν οι ανισώσεις : i) $f(x) < 3$ ii) $f(x) > 5$

12. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από τα σημεία $A(5,2)$ και $B(4,9)$.

a. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f αιτιολογώντας την απάντησή σας.

b. Να λύσετε την ανίσωση : $f(5-3x) < 2$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} - \frac{\alpha}{x} - \frac{3}{2}$ της οποίας η γραφική

παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, -\frac{5}{2})$.

a. Να βρείτε την τιμή του α .

b. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

c. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$.

d. Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{x} > \frac{2}{x} + \frac{3}{2}$.

14. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(2, \frac{1}{3})$ και ισχύει : $3f(x) + 1 \leq 0$, για κάθε x

$\in \mathbb{R}$.

a. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της f .

b. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη.

c. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = (x - 2)^2 - \frac{1}{3}$.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+5x+1}{x}$, ορισμένη στο $B = (0,+\infty)$.
- Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f στο $(0,+\infty)$.
 - Να δείξετε ότι $f\left(\frac{1}{2016}\right) + \frac{3}{7}f\left(\frac{1}{2017}\right) > 10$
16. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, περιττή, η γραφική παράσταση της οποίας τέμνει τον x -άξονα στο $A(-2,0)$. Να αποδείξετε ότι
- $$3 \cdot f(2) + 5 \cdot f(-2) - 7 \cdot f(0) = 0$$
17. Έστω συνάρτηση $f: (\alpha, 2)$, άρτια συνάρτηση για την οποία ισχύει :
- $$f(1) - f(-1) = \alpha^2 + \beta^2.$$
- Να βρείτε τα
- α
- και
- β
- .
18. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν πεδίο ορισμού το A και είναι περιττές, να δείξετε ότι :
- Η συνάρτηση $h(x) = f(x) + g(x)$ είναι περιττή.
 - Η συνάρτηση $\phi(x) = f(x) \cdot g(x)$ είναι άρτια.
19. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Να δείξετε ότι η συνάρτηση :
- $g(x) = f(2+x) - f(2-x)$ είναι περιττή.
 - Η συνάρτηση $h(x) = f(3-x) + f(3+x)$ είναι άρτια.
20. Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ μια περιττή συνάρτηση, η οποία παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 \neq 0$. Να αποδείξετε ότι η f έχει στο σημείο $(-x_0)$ η f παρουσιάζει μέγιστο.

**Β.(ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΚΑΙ ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΓΡΑΦΙΚΗΣ
ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ)**

1. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις

συναρτήσεις : α) $\phi(x) = |x|$, $f(x) = \phi(x) + 3$, $g(x) = |x| - 2$

β) $\phi(x) = |x|$, $f(x) = |x-2|$, $g(x) = |x+1|$

γ) $\phi(x) = |x|$, $f(x) = |x-2| + 1$, $g(x) = |x+1| - 2$

2. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :

a. $F(x) = x^2 + 1$

b. $F(x) = (x-2)^2$

c. $F(x) = -(x-1)^2$

d. $F(x) = (x+1)^2 - 1$

e. $F(x) = -(x-2)^2 + 3$

3. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις στο ίδιο σύστημα αξόνων:

α) $\phi(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x} - 2$, $g(x) = \frac{1}{x-1}$

β) $\phi(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x+2} - 1$

4. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

α) $f(x) = \sqrt{|x|}$ β) $f(x) = x^3 - 1$ γ) $h(x) = \sqrt{x-2} + 1$

δ) $\varphi(x) = 2 - \sqrt{x+1}$

5. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων και με τη βοήθεια αυτών να βρείτε το σύνολο τιμών τους :

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3, & x < 1 \\ \frac{1}{x} + 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{β) } f(x) = \begin{cases} -x^3 + 1, & x < 1 \\ 1 - \frac{2}{x+1}, & x \geq 1 \end{cases}$$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x-2| - 1$.

- a. Να μελετήσετε την f ως προς τα ολικά ακρότατα.
- b. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
- c. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- d. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται :
 - i. Από τη C_f και τον $\chi'\chi$.
 - ii. Από τη C_f , τους άξονες $\chi'\chi$, $\psi'\psi$ και την ευθεία $x = 4$.