

## 2.4 Ρίζες πραγματικών αριθμών.

### Τεστ

#### Θέμα 1

1. Να δώσετε τον ορισμό της απόλυτης τιμής ενός πραγματικού αριθμού  $a$ .

2. Να αποδείξετε ότι:  $|a \cdot \beta| = |a| \cdot |\beta|$ .

3. Να απαντήσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) στις προτάσεις:

a.  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$

b. Αν  $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$  και  $\beta = 0$ .

c. Αν  $\alpha > \beta$  και  $\gamma > \delta \Leftrightarrow \alpha - \gamma > \beta - \delta$ .

d. Αν  $(\alpha > \beta$  και  $\gamma > \delta) \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$ .

e.  $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

f. Αν  $\alpha < \beta < 0$ , τότε  $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$ .

g. Αν  $\alpha > \beta > 0$ , τότε  $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$ .

h. Αν  $0 < \alpha < 1$ , τότε  $\alpha^2 > \alpha$ .

4. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά έτσι ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

a.  $(\beta + \alpha)(\dots + \alpha) = \alpha^2 - \beta^2$

b.  $\alpha^3 \dots + 3\alpha\beta^2 \dots = (\alpha - \beta)^3$

c.  $(\alpha - \beta)^2 + \dots = (\alpha + \beta)^2$

d.  $4x^4 - 2x^2 + \dots = (2x^2 \dots)^2$

5. Να γίνει αντιστοίχιση της στήλης Α με το την αντίστοιχη απόσταση στη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
$ x - 2  \geq 3$	$d(x, -3) \leq 2$
$ x + 2  \geq 3$	$d(x, 3) \leq 2$
$ x - 3  \leq 2$	$d(x, -2) \geq 3$
	$d(x, 2) \geq 3$

## Θέμα 2

1. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης  $A = \frac{(xy^2)^3(x^2y^{-1})^{-1}}{(y^{-1})^{-7}(-y)}$  για

$$x = 2020 \text{ και } y = \frac{1}{2020}.$$

2. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:

$$B = |2\pi - 8| + |16 - 4\pi| - |4\pi - 10|$$

3. Αν  $1 \leq x < 2$  και  $-9 \leq y < -4$ , να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται καθεμία από τις παρακάτω παραστάσεις:

a.  $x - 3xy$

b.  $\frac{x}{y}$

c.  $x^2 + y^2$

d.  $\frac{\sqrt{-y}}{(x+1)^2}$

4. Δίνονται οι αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  για τους οποίους ισχύει ότι:

$$|\alpha - 2| + |\alpha + 2\beta - 8| = 0$$

- a. Να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$ .

- b. Αν ισχύει ότι  $\alpha < x < \beta$ , να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = |x - 2| - |x - 3| + |2x - 7|$$

5. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\left[ \left( \frac{1}{\chi - \psi} + \frac{1}{\chi + \psi} \right) \cdot \frac{1}{2\chi} + \frac{1}{\chi^2 + \psi^2} \right] : \frac{2000\chi^2}{\chi^4 - \psi^4}$$

### Θέμα 3

1. Έστω οι αριθμοί  $\alpha = \left( \sqrt[3]{2\sqrt{2}} \right)^2$ ,  $\beta = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2} - 3$  και η

$$\text{παράσταση } A = \frac{x-a}{\sqrt{x^2-4x+4}} + \frac{2x+\beta}{\sqrt{4x^2-4x+1}}$$

a. Να υπολογίσετε τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$ .

b. Να γράψετε την παράσταση  $A$  χωρίς ριζικά.

c. Αν  $d(2x, 3) < 1$ , να αποδείξετε ότι  $A = 0$ .

d. Αν  $x \neq 2$  και  $x \neq \frac{1}{2}$ , να αποδείξετε ότι  $A < 2$ .

2. Αν  $1 < x < 3$  και  $2 < y < 8$  τότε:

a. Να βρείτε τα όρια των παραστάσεων:

$$\Pi_1 = 2x + y, \quad \Pi_2 = x - 3y, \quad \Pi_3 = \frac{2x}{y}$$

b. Να δείξετε ότι  $|x - 2| + |y - 5| < 5$ .

3. Να αποδείξετε ότι:  $(2x - 1)^2 - 3x(x - 1) + 3x = (x + 1)^2$ .

4. Να αποδείξετε ότι:  $(\alpha + \beta)^3 - (\alpha - \beta)^3 - 6\alpha^2\beta = 2\beta^3$ .

5. Να αποδείξετε ότι  $\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 = 4$ .

6. Να υπολογίσετε την παράσταση

$$K = \left(2020 + \frac{1}{2020}\right)^2 - \left(2020 - \frac{1}{2020}\right)^2$$

7. Να αποδείξετε ότι  $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2(\alpha + \beta - 1)$ .

**Θέμα 4**

1. Να δείξετε ότι:  $3 < \sqrt[3]{30} < 4$ .
2. Να συγκρίνετε τους αριθμούς  $\sqrt[3]{30}$  και  $6 - \sqrt[3]{30}$ .
3. Δίνεται η παράσταση:

$$K = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$$

- a. Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το  $x$  ώστε η παράσταση  $K$  να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.
  - b. Αν  $-2 < x < 3$ , να αποδείξετε ότι παράσταση  $K$  σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του  $x$ .
4. Να αποδείξετε ότι:  $\left| \frac{2x-2y}{y-x} \right| + |-3a| \cdot \frac{1}{|a|} - 5 = 0$ .

5. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  ισχύει:

$$\alpha^2 - 6\alpha + 9 + |\beta - 4| \leq 0$$

Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 3$  και  $\beta = 4$ .

6. Αν  $x \in (\alpha, \beta)$ , να γράψετε την παρακάτω παράσταση χωρίς απόλυτα:

$$K = 2|x - 3| + |9 - 3x| - 5|x - 4| + |-x^2 - 1|$$

7. Να λυθούν:

- a.  $|\beta x - 2| \geq 8$

- b.  $|x - \beta| = \alpha$

8. Στο οικόπεδο του παρακάτω σχήματος για την απόσταση  $\alpha$  σε  $m$  γνωρίζουμε ότι ισχύει:  $d(\alpha, 30) < 5$ .



- a. Να αποδείξετε ότι το  $a$  έχει μήκος μεταξύ 25 και 35 μέτρων.
- b. Διαθέτουμε συρματοπλέγμα μήκους 100 m. Μπορούμε με το συρματοπλέγμα αυτό αν περιφράξουμε το οικόπεδο;  
Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
- c. Να γράψετε χωρίς απόλυτα την:  $K = ||\alpha - 50| - 15| + \alpha$ .
9. Σε έναν άξονα τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $M$  αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9,  $x$  αντίστοιχα.
10. Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων  $|x - 5|$  και  $|x - 9|$ .
11. Αν ισχύει  $|x - 5| = |x - 9|$ ,
- a. Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου  $M$  αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- b. Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό  $x$  που παριστάνει το σημείο  $M$ . Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.