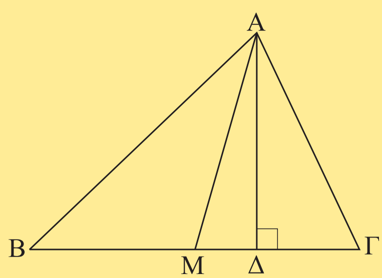
θεώρημα διαμέσων έχουμε $AM^2 - BM^2 = 2AB \cdot OH = 2AB \cdot \frac{k^2}{2AB} = k^2$. Επομένως ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η ε.

Διερεύνηση. Αν $k = 0$ είναι $MA^2 - MB^2 = 0$ ή $MA = MB$, οπότε το Μ ισαπέχει από τα σημεία Α,Β. Τότε ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Στο παρακάτω σχήμα η ΑΜ είναι διάμεσος και ΑΔ ύψος. Ποια σχέση είναι σωστή;*



i) $AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

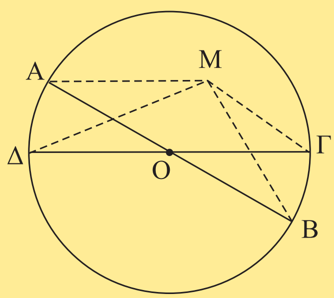
ii) $AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + 2A\Delta^2$

iii) $AB^2 + A\Gamma^2 = 2B\Gamma \cdot M\Delta$

iv) $AB^2 - A\Gamma^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2. *Στο παρακάτω σχήμα να συμπληρώσετε τα κενά*



i) $MA^2 + MB^2 =$ .... + ...

ii) $M\Gamma^2 + M\Delta^2 =$ .... + ...

Να εξηγήσετε γιατί $MA^2 + MB^2 = M\Gamma^2 + M\Delta^2$.

3. *Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\beta^2 + \gamma^2 = 5\alpha^2$ τότε:*

α. $\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$ β. $\mu_\alpha = \frac{3\alpha}{4}$ γ. $\mu_\alpha = \frac{3\alpha}{2}$ δ. $\mu_\alpha = \frac{2\alpha}{3}$

Κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση και αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\beta=7$, $\gamma=6$ και $\mu_\alpha=7/2$. Να υπολογισθούν: i) η πλευρά α, ii) η προβολή της διαμέσου μ_α στη ΒΓ.*

2. *Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει*

$$\mu_\alpha^2 + \beta\gamma > \frac{\alpha^2}{4}.$$

3. *Δίνεται κύκλος (Ο,R), μια διάμετρός του ΑΒ και έστω Γ, Δ τα μέσα των ΟΑ και ΟΒ αντίστοιχα. Αν $M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 5$, όπου Μ τυχαίο σημείο του κύκλου, να υπολογισθεί η ακτίνα R.*

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) και έστω Θ το βαρύκεντρό του. Να αποδείξετε ότι:*

i) $\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \frac{3}{4}\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)$,

ii) $\Theta A^2 + \Theta B^2 + \Theta\Gamma^2 = \frac{1}{3}\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 60°$, $\beta = 5$, $\gamma = 3$. Να υπολογισθεί η διάμεσός του μ_α.*

2. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και τυχαίο σημείο Δ της ΑΒ. Να αποδείξετε ότι*

$$\Delta\Gamma^2 - \Delta B^2 = \frac{B\Gamma^2 \cdot A\Delta}{AB}.$$

3. *i) Αν ΑΒΓΔ ορθογώνιο και Μ τυχαίο σημείο να αποδείξετε ότι $MA^2+M\Gamma^2=MB^2+M\Delta^2$.*
ii) Αν ΑΒΓΔ τετράγωνο και σημείο Μ στο εσωτερικό του, ώστε $MA = 1$, $MB= \sqrt{2}$ και $M\Gamma= \sqrt{3}$, να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου.

4. *Αν Μ,Ν είναι μέσα των διαγωνίων ΑΓ,ΒΔ ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι*

$$AB^2+B\Gamma^2+\Gamma\Delta^2+\Delta A^2=A\Gamma^2+B\Delta^2+4MN^2$$

(Θεώρημα Euler).