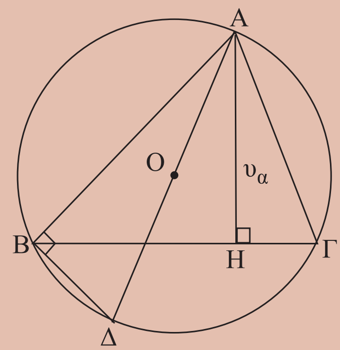
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4η

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του $υ_α$=ΑΗ. Να αποδείξετε ότι βγ = 2R$υ_α$, όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.



Σχήμα 10

Απόδειξη

Θεωρούμε τη διάμετρο ΑΔ. Τα τρίγωνα ΑΗΓ και ΑΒΔ είναι όμοια, αφού $\hat{B} = \hat{H} = 1∟$ και $\hat{Γ} = \hat{Δ}$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

Επομένως είναι

$$\frac{ΑΗ}{ΑΒ} = \frac{ΑΓ}{ΑΔ} \quad ή \quad βγ = 2Rυ_α.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 1∟$, τότε είναι $βγ = αυ_α = 2Rυ_α$.

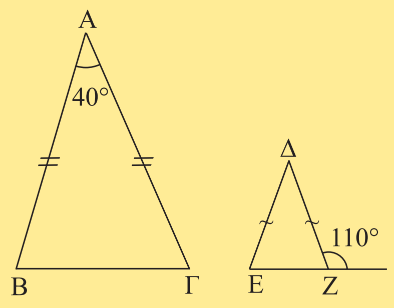
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

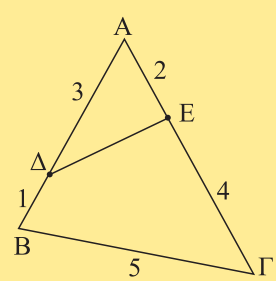
1. *i) Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε είναι όμοια;*
ii) Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια με ένα τρίτο τρίγωνο, τότε είναι και μεταξύ τους όμοια;

2. *Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι πάντα όμοια;*

3. *Στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΒ = 3ΔΕ. Να βρεθεί ο λόγος $\frac{ΕΖ}{ΒΓ}$.*

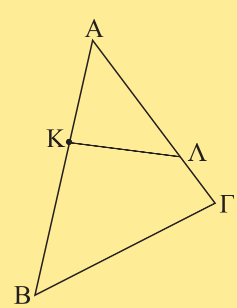


4. *Στο παρακάτω σχήμα να βρεθεί το μήκος του ΔΕ.*

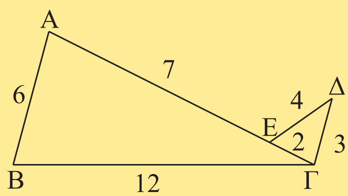


5. *Οι πλευρές ενός τριγώνου είναι 3cm, 4cm και 5cm. Ένα τρίγωνο όμοιο με αυτό έχει περίμετρο 24cm. Ποια είναι τα μήκη των πλευρών του;*

6. *Αν στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΒΚΛΓ είναι εγγράψιμο, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΚΛ είναι όμοια; Ποιες είναι οι ομόλογες πλευρές τους;*



7. *Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.*



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 1∟). Από τυχαίο σημείο Δ της ΑΓ φέρουμε ΔΕ⊥ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:*

i) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΓ είναι όμοια,

ii) ΑΓ·ΕΔ = ΑΒ·ΕΓ.

2. *Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε* $ΑΔ = \frac{1}{3}ΑΒ$ *και* $ΓΕ = \frac{2}{3}ΑΓ$. *Να αποδείξετε ότι:*

i) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια,

ii) ΒΓ = 3ΔΕ.

3. *Μία μεταλλική πλάκα έχει σχήμα ορθογώνιου τριγώνου με πλευρές α,β,γ. Η πλάκα θερμαίνεται και από τη διαστολή αυξάνεται κάθε πλευρά της κατά το* $\frac{1}{15}$ *της. Θα παραμείνει ορθογώνιο τρίγωνο το σχήμα της πλάκας;*

4. *Ένα δέντρο ρίχνει κάποια στιγμή σε οριζόντιο έδαφος σκιά μήκους 24m. Στο ίδιο σημείο, την ίδια στιγμή, μια κατακόρυφη ράβδος μήκους 2m ρίχνει σκιά μήκους 3m. Να βρεθεί το ύψος του δέντρου.*

5. *Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι :*

i) $ΑΔ^2 = ΔΒ \cdot ΔΓ$,

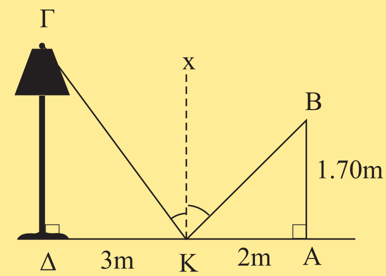
ii) $ΑΒ^2 = ΒΔ \cdot ΒΓ$,

iii) $ΑΒ \cdot ΑΓ = ΑΔ \cdot ΒΓ$.

6. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) και οι ευθείες Αx και Αy που σχηματίζουν ίσες γωνίες με τις ΑΒ και ΑΓ και τέμνουν τη ΒΓ και τον κύκλο αντίστοιχα στα Δ και Ε. Να αποδείξετε ότι* $ΑΔ \cdot ΑΕ = ΑΒ \cdot ΑΓ$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Ο παρατηρητής ΑΒ βλέπει το φως του λαμπτήρα Γ μέσα από τον καθρέπτη Κ. Να υπολογίσετε το ύψος του φανοστάτη ΔΓ, όταν είναι ΔΚ=3m, ΑΚ=2m και το ύψος του παρατηρητή 1,70m. (Είναι γνωστό από τη Φυσική ότι η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης).*



2. *Να αποδείξετε ότι:*

i) δύο παραλληλόγραμμα είναι όμοια, αν δύο διαδοχικές πλευρές του ενός είναι ανάλογες προς δύο διαδοχικές πλευρές του άλλου και οι γωνίες των πλευρών αυτών είναι ίσες,

ii) δύο ορθογώνια με ίση τη γωνία των διαγωνίων τους είναι όμοια.

3. *Θεωρούμε τους κύκλους* (O_1,R_1) *και* (O_2,R_2) *που τέμνονται στα σημεία Α και Β. Αν οι εφαπτόμενες στο Α τέμνουν τους κύκλους στα* A_1 *και* A_2 *αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι* $AB^2 = BA_1 \cdot BA_2$.

4. *Αν ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι τα ύψη και Η το ορθόκεντρο τριγώνου ΑΒΓ να αποδείξετε ότι*

$$ΗΔ \cdot ΗΑ = ΗΒ \cdot ΗΕ = ΗΓ \cdot ΗΖ.$$

5. *Από το μέσο Μ του τόξου* $\overset{\frown}{AB}$ *φέρουμε τις χορδές ΜΔ και ΜΖ, που τέμνουν τη χορδή ΑΒ στα Δ' και Ζ' αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι*

$$ΜΔ \cdot ΜΔ' = ΜΖ \cdot ΜΖ'.$$

6. *Σε ορθογώνιο τραπέζιο ($\hat{A} = \hat{Δ}$ = 1∟) οι διαγώνιοι είναι κάθετες. Να αποδείξετε ότι το ύψος του είναι μέσο ανάλογο των βάσεων.*

Σύνθετα Θέματα

1. *Να αποδείξετε ότι δύο τραπέζια με ανάλογες βάσεις και τις προσκείμενες σε δύο ομόλογες βάσεις τους γωνίες ίσες μία προς μία, είναι όμοια.*

2. *Έστω δοσμένη γωνία* $x\hat{O}y$ *και σημείο Μ. Ο τυχαίος κύκλος που διέρχεται από τα Ο και Μ τέμνει τις πλευρές Οx, Οy στα Β και Γ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι* $\frac{MB}{MΓ} = \frac{d}{d'}$, *όπου d, d' είναι οι αποστάσεις του Μ από τις Οx, Οy , αντίστοιχα.*

3. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 1∟) και το ύψος του ΑΔ. Η διχοτόμος της γωνίας* $\hat{Γ}$ *τέμνει το ΑΔ*