

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $\beta=7$, $\gamma=6$ και $\mu_a=7/2$. Να υπολογισθούν: i) η πλευρά a , ii) η προβολή της διαμέσου μ_a στη $B\Gamma$.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

2. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει

$$\mu_a^2 + \beta\gamma > \frac{a^2}{4}.$$

Ασκήσεις Εμπέδωσης

3. Δίνεται κύκλος (O,R) , μια διάμετρος του AB και έστω Γ, Δ τα μέσα των OA και OB αντίστοιχα.

Αν $MG^2 + M\Delta^2 = 5$, όπου M τυχαίο σημείο του κύκλου, να υπολογισθεί η ακτίνα R .

Ασκήσεις Εμπέδωσης

4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και έστω Θ το βαρύκεντρό του.

Να αποδείξετε ότι:

$$i) \mu_a^2 + \mu_b^2 + \mu_\gamma^2 = \frac{3}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

$$ii) \Theta A^2 + \Theta B^2 + \Theta \Gamma^2 = \frac{1}{3}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 60^\circ$, $\beta = 5$, $\gamma = 3$. Να υπολογισθεί η διάμεσός του μ_a .

Αποδεικτικές Ασκήσεις

2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και τυχαίο σημείο Δ της AB . Να αποδείξετε ότι

$$\Delta\Gamma^2 - \Delta B^2 = \frac{B\Gamma^2 \cdot A\Delta}{AB}.$$

Αποδεικτικές Ασκήσεις

3. i) Αν $ABΓΔ$ ορθογώνιο και M τυχαίο σημείο να αποδείξετε ότι $MA^2 + MΓ^2 = MB^2 + MΔ^2$.

ii) Αν $ABΓΔ$ τετράγωνο και σημείο M στο εσωτερικό του, ώστε $MA = 1$, $MB = \sqrt{2}$ και $MΓ = \sqrt{3}$, να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

4. Αν M, N είναι μέσα των διαγωνίων $ΑΓ, ΒΔ$ ενός τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$, να αποδείξετε ότι

$$AB^2 + BG^2 + GD^2 + DA^2 = AG^2 + BD^2 + 4MN^2$$

(Θεώρημα Euler).

Αποδεικτικές Ασκήσεις

5. Στην υποτείνουσα $BΓ$ ορθογώνιου τριγώνου $ΑΒΓ$ θεωρούμε τα σημεία $Δ$ και $Ε$ τέτοια, ώστε $ΒΔ=ΔΕ=ΕΓ$.

Να αποδείξετε ότι $ΑΔ^2 + ΑΕ^2 = \frac{5}{9}ΒΓ^2$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

6. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\beta^2 + \gamma^2 = 2a\mu_a$ να υπολογισθεί η γωνία \hat{A} .

Σύνθετα Θέματα

1. Δύο αδέρφια κληρονόμησαν αγροτεμάχιο σχήματος τραπεζίου και αποφάσισαν να το μοιράσουν ανοίγοντας δρόμο που θα ενώνει τα μέσα των παράλληλων πλευρών του. Αν οι βάσεις είναι 8km και 6km, ενώ οι μη παράλληλες πλευρές 5km και 7km, πόσο θα στοιχίσει η διάνοιξη του δρόμου, αν 1 χιλιόμετρο δρόμου κοστίζει 50.000 δρχ;

Σύνθετα Θέματα

2. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με $A\Gamma > AB$ και M, N τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Αν O το μέσο του MN , να αποδείξετε ότι:

$$O\Gamma^2 - OB^2 = \frac{A\Gamma^2 - AB^2}{2}$$

Σύνθετα Θέματα

3. Σε ημικόκλιο διαμέτρου $AB = 2a$ θεωρούμε τυχαίο σημείο M . Χωρίζουμε τη διάμετρο AB σε τρία ίσα τμήματα $AG = GD = DB$. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $MA^2 + MB^2 + MG^2 + MD^2$ είναι σταθερό.

Σύνθετα Θέματα

4. Δίνεται ρόμβος $ABΓΔ$ πλευράς a , O το κέντρο του και κύκλος $(O, \lambda a)$, $\lambda > 0$. Αν για τυχαίο σημείο M του κύκλου ισχύει $MA^2 + MB^2 + MΓ^2 + MΔ^2 = 18a^2$, να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ .

Σύνθετα Θέματα

5. Δίνεται ρόμβος $ABΓΔ$ πλευράς a , με διαγώνιο $ΒΔ = a$. Έστω τυχαίο σημείο P . Να αποδείξετε ότι

$$a^2 = (PA^2 - PB^2) + (PΓ^2 - PΔ^2).$$