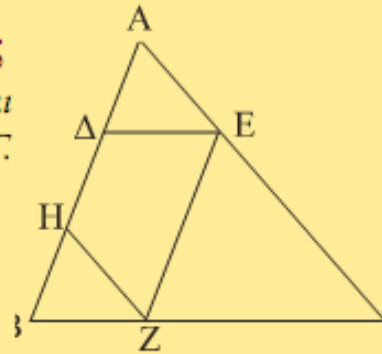


### Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Στο διπλανό σχήμα είναι  $\Delta E \parallel B\Gamma$ ,  $EZ \parallel AB$  και  $ZH \parallel A\Gamma$ .

Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{HB}{HA}$$



### Ασκήσεις Εμπέδωσης

2. Από την κορυφή  $A$  παραλληλογράμμου  $ABΓΔ$  φέρουμε ευθεία  $\varepsilon$  η οποία τέμνει τη διαγώνιο  $BΔ$  στο  $E$ , την πλευρά  $BΓ$  στο  $Z$  και την προέκταση της  $ΔΓ$  στο  $H$ . Να αποδείξετε ότι

$$i) \frac{AZ}{AH} = \frac{AB}{\Delta H}, \quad ii) AE^2 = EA \cdot EH.$$

### Ασκήσεις Εμπέδωσης

3. Οι μη παράλληλες πλευρές  $AD$ ,  $BΓ$  τραapeζίου  $ABΓΔ$  τέμνονται στο  $O$ . Η παράλληλη από το  $B$  προς την  $ΑΓ$  τέμνει την  $AD$  στο  $E$ . Να αποδείξετε ότι το  $OA$  είναι μέσο ανάλογο των  $OD$  και  $OE$ .

### Ασκήσεις Εμπέδωσης

4. Από σημείο  $\Delta$  της πλευράς  $B\Gamma$  τριγώνου  $AB\Gamma$  φέρουμε την παράλληλη προς τη διάμεσό του  $AM$ , που τέμνει τις ευθείες  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι  $\frac{AE}{AZ} = \frac{AB}{A\Gamma}$ .

### Ασκήσεις Εμπέδωσης

5. Δίνεται τετράπλευρο  $ABΓΔ$  και σημείο  $E$  της διαγωνίου  $ΑΓ$ . Οι παράλληλες από το  $E$  προς τις  $BΓ, ΓΔ$  τέμνουν τις  $AB, AD$  στα  $Z$  και  $H$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι  $ZH // ΔB$ .

### Ασκήσεις Εμπέδωσης

6. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και σημεία  $\Delta, E$  της πλευράς  $B\Gamma$ , ώστε  $B\Delta = \Gamma E < \frac{B\Gamma}{2}$ . Οι παράλληλες από τα  $\Delta$  και  $E$  προς τις  $AG$  και  $AB$  αντίστοιχα τέμνουν την  $AB$  στο  $Z$  και την  $AG$  στο  $H$ . Να αποδείξετε ότι  $ZH // B\Gamma$ .

### Ασκήσεις Εμπέδωσης

7. Από τυχαίο σημείο  $K$  της διαμέσου  $AM$  τριγώνου  $ABΓ$  φέρουμε παράλληλες προς τις  $AB$  και  $AG$ , που τέμνουν τη  $BΓ$  στα  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι  $M\Delta = ME$ .

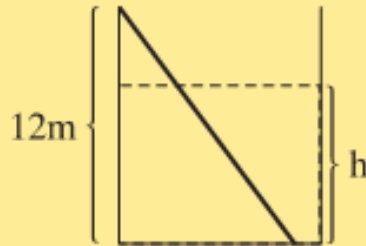
### Ασκήσεις Εμπέδωσης

8. Δίνεται τραπέζιο  $ABΓΔ$  ( $AB//ΓΔ$ ) και  $E$  το μέσο της μικρής βάσης  $AB$ . Αν η  $ΔE$  τέμνει την  $AΓ$  στο  $Z$  και την προέκταση της  $ΓB$  στο  $H$ , να αποδείξετε ότι τα  $Z, H$  είναι συζυγή αρμονικά των  $Δ, E$ .



### Ασκήσεις Εμπέδωσης

9. Δεξαμενή ύψους  $v=12m$  περιέχει νερό που φτάνει σε ύψος  $h$ . Ράβδος μήκους  $15m$  τοποθετείται στη δεξαμενή, όπως στο διπλανό σχήμα. Βγάζουμε τη ράβδο και παρατηρούμε ότι το τμήμα που βρέχτηκε έχει μήκος  $10m$ . Μπορούμε να υπολογίσουμε το ύψος  $h$  του νερού;



### Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Αν τα  $\Gamma, \Delta$  είναι συζυγή αρμονικά των  $A, B$  και  $O$  είναι το μέσο του  $AB$ , να αποδείξετε ότι τα  $\Gamma$  και  $\Delta$  βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του  $O$ .

## Αποδεικτικές Ασκήσεις

2. Να διαιρεθεί ευθύγραμμο τμήμα  $AB = a$  σε τμήματα  $x, y, \omega$  τέτοια, ώστε  $4x = 6y = 3\omega$ .

### Αποδεικτικές Ασκήσεις

3. Δίνεται τρίγωνο  $ABΓ$  εγγεγραμμένο σε κύκλο  $(O,R)$  και έστω  $\Delta$  η τομή της διαμέτρου  $AE$  με τη  $BΓ$ . Αν  $Z$  και  $H$  είναι οι προβολές του  $\Delta$  στις  $AB$  και  $AΓ$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι  $ZH \parallel BΓ$ .

### Αποδεικτικές Ασκήσεις

4. Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  και σημείο  $E$  της  $ΔB$  τέτοιο, ώστε  $ΔE = \frac{1}{5} ΔB$ . Αν η  $ΓE$  τέμνει την  $ΑΔ$  στο  $Z$ , να αποδείξετε ότι  $AZ = 3ΔZ$ .

### Αποδεικτικές Ασκήσεις

5. Από την κορυφή  $B$  παραλληλογράμμου  $ABΓΔ$  φέρουμε ευθεία  $\epsilon$ , που τέμνει την πλευρά  $ΑΔ$  στο  $E$  και την προέκταση της  $ΓΔ$  στο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\Delta A}{\Delta E} - \frac{\Delta \Gamma}{\Delta Z} = 1.$$

### Αποδεικτικές Ασκήσεις

6. Δίνεται τρίγωνο  $ABΓ$  και τα σημεία  $Δ, Ε$  της  $BΓ$  ώστε  $BΔ = ΔΕ = ΕΓ$ . Η παράλληλη από το  $Δ$  προς την  $AB$  τέμνει τη διάμεσο  $AM$  στο  $K$ . Να αποδείξετε ότι:

- i) Το  $K$  είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου  $ABΓ$ .
- ii)  $KE // AG$ .

### Αποδεικτικές Ασκήσεις

7. Τραπεζίου  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB\parallel\Gamma\Delta$ ) οι διαγώνιες  $A\Gamma$ ,  $B\Delta$  τέμνονται στο  $O$ . Από το  $O$  φέρουμε παράλληλες προς τις  $A\Delta$ ,  $B\Gamma$  που τέμνουν τη  $\Delta\Gamma$  στα  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι  $\Delta E = \Gamma Z$ .



### Σύνθετα θέματα

1. Δίνεται τρίγωνο  $ABΓ$  και τα σημεία  $Δ$  και  $Ε$  των

πλευρών του  $AB$  και  $ΑΓ$  αντίστοιχα, ώστε  $\frac{ΔA}{ΔB} = \frac{ΕΓ}{ΕA}$ .

Να αποδείξετε ότι τα μέσα  $K, Λ, Μ$  των  $AB, ΑΓ$  και  $ΔΕ$  αντίστοιχα, είναι συνευθειακά σημεία.

**Σύνθετα θέματα**

2. Από το μέσο  $M$  της πλευράς  $BΓ$  τριγώνου  $ΑΒΓ$  φέρουμε τυχαία ευθεία, που τέμνει τις  $ΑΒ$  και  $ΑΓ$  στα  $Z$  και  $H$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι  $ZΑ \cdot ΗΓ = ΗΑ \cdot ΖΒ$ .

### Σύνθετα θέματα

3. Δίνεται ευθεία  $\varepsilon$ , τέσσερα διαδοχικά σημεία της  $A$ ,  $\Gamma$ ,  $B$ ,  $\Delta$  και σημείο  $O$  εκτός αυτής. Από το  $B$  φέρουμε παράλληλη προς την  $OA$ , η οποία τέμνει τις  $OG$ ,  $O\Delta$  στα  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα  $\Gamma$ ,  $\Delta$  είναι συζυγή αρμονικά των  $A$ ,  $B$ , αν και μόνο αν  $BE = BZ$ .

### Σύνθετα θέματα

4. Αν ένα σημείο  $\Delta$  χωρίζει εσωτερικά την πλευρά  $B\Gamma$  τριγώνου  $AB\Gamma$  σε λόγο  $\lambda$  και ένα σημείο  $E$  χωρίζει εσωτερικά το  $A\Delta$  σε λόγο  $\kappa$ , να υπολογισθεί ο λόγος στον οποίο χωρίζει η ευθεία  $BE$  την πλευρά  $A\Gamma$ .

### Σύνθετα θέματα

5. Η εφαπτομένη ενός κύκλου σε σημείο του  $M$  τέμνει τις εφαπτόμενες στα άκρα  $A, B$  μιάς διαμέτρου του  $AB$ , στα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$  αντίστοιχα. Αν  $K$  είναι το σημείο τομής των  $B\Gamma, A\Delta$ , να αποδείξετε ότι  $MK \perp AB$ .