

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Η διάμεσος AM και η διχοτόμος BD τριγώνου $ABΓ$

τέμνονται στο E . Να αποδείξετε ότι $\frac{AE}{EM} = 2 \frac{AD}{ΔΓ}$.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

2. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=6$, $B\Gamma=10$, $A\Gamma=9$. Αν AD , AE η εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος της γωνίας \hat{A} , να υπολογισθεί το DE .

Ασκήσεις Εμπέδωσης

3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και η διάμεσός του AM . Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}MB$ τέμνει την AB στο Δ και την προέκταση της GA στο E , να αποδείξετε ότι $EA \cdot \Delta B = EG \cdot A\Delta$.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

4. Αν M είναι το μέσο της πλευράς $BΓ$ ενός τριγώνου $ΑΒΓ$ και οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}MB$ και $\hat{A}MG$ τέμνουν τις πλευρές AB και AG στα Δ και E αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\Delta E // BΓ$.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

5. Αν AD , BE και $ΓZ$ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου $ABΓ$, να αποδείξετε ότι :

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{EA} \cdot \frac{ZC}{ZA} = 1.$$

Διατυπώστε και αποδείξτε ανάλογη πρόταση για τις εξωτερικές διχοτόμους.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

6. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) . Αν Δ τυχαίο σημείο του τόξου $B\Gamma$ και η $A\Delta$ τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο E , να αποδείξετε ότι $E\Delta \cdot \Delta\Gamma = E\Gamma \cdot \Delta B$.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

7. Σε ένα ημικύκλιο διαμέτρου AB φέρουμε τις εφαπτόμενες στα άκρα της διαμέτρου, καθώς και μία εφαπτομένη σε τυχαίο σημείο του E , που τέμνει την ευθεία AB στο Z και τις άλλες δύο εφαπτόμενες στα Γ και Δ . Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ, Δ είναι συζυγή αρμονικά των E, Z .

Ασκήσεις Εμπέδωσης

8. Δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι 20m και 36m. Η διχοτόμος της γωνίας, η οποία περιέχεται μεταξύ των δύο αυτών πλευρών, διαιρεί την τρίτη πλευρά σε δύο μέρη, τα οποία διαφέρουν κατά 12m. Να υπολογισθεί η τρίτη πλευρά.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

2. Από το μέσο M της πλευράς $BΓ$ ενός τριγώνου $ΑΒΓ$ φέρουμε την παράλληλη στη διχοτόμο του $ΑΔ$, που τέμνει τις $ΑΒ$, $ΑΓ$ στα $Ε$, $Ζ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $ΒΕ = ΓΖ$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Δίνονται οι διαδοχικές γωνίες $x\hat{O}y = y\hat{O}z = z\hat{O}t = 45^\circ$ και τα σημεία A, Δ των Ox, Ot αντίστοιχα, τέτοια ώστε $OA = O\Delta$. Αν B, Γ είναι τα σημεία τομής της $A\Delta$ με τις Oy, Oz αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $AB^2 = B\Gamma \cdot A\Delta$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, η διχοτόμος του $A\Delta$ και το έγκεντρό του I .

i) Να υπολογισθεί ο λόγος $\frac{AI}{I\Delta}$, ως συνάρτηση των πλευρών α, β, γ του τριγώνου.

ii) Αν $\beta + \gamma = 2\alpha$ και K το βαρύκεντρο του τριγώνου, τότε:

α) $IK \parallel B\Gamma$ β) $ZE = \frac{\beta + \gamma}{3}$, όπου Z, E τα σημεία

Αποδεικτικές Ασκήσεις

4. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών \hat{B} και $\hat{\Gamma}$ ενός τριγώνου $AB\Gamma$, τέμνουν τη διάμεσό του AM στα Δ και E αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\frac{A\Delta}{\Delta M} + \frac{AE}{EM} > 2$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

5. Οι μη παράλληλες πλευρές τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$ ($AB\parallel\Gamma\Delta$) τέμνονται στο O . Αν η διχοτόμος της γωνίας $A\hat{O}B$ τέμνει τις AB , $\Gamma\Delta$ στα E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

i) $Z\Delta \cdot B\Gamma = Z\Gamma \cdot A\Delta$,

ii) $EA \cdot B\Gamma = EB \cdot A\Delta$.

Σύνθετα θέματα

1. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) .
Αν η κάθετη διάμετρος $K\Lambda$ στη $B\Gamma$ τέμνει τις AB , $A\Gamma$
στα E , Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα E , Z είναι συ-
ζυγή αρμονικά των K , Λ .

Σύνθετα θέματα

2. Αν οι διχοτόμοι δύο απέναντι γωνιών τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ τέμνονται πάνω στη διαγώνιο που ενώνει τις δύο άλλες κορυφές του, τότε είναι $AB \cdot \Gamma\Delta = A\Delta \cdot B\Gamma$. Να εξετασθεί αν ισχύει η αντίστροφη πρόταση.

Σύνθετα θέματα

3. Δίνεται τόξο \widehat{AB} κύκλου (O,R) . Να ορίσετε σημείο M του τόξου \widehat{AB} , τέτοιο ώστε $\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν δοσμένα τμήματα.

Σύνθετα θέματα

4. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ και τα σημεία E, Z των πλευρών του AD, AB αντίστοιχα, ώστε $ΔE = BZ$. Αν H είναι το σημείο τομής των BE και $ΔZ$, να αποδείξετε ότι η GH είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{Γ}Δ$.

Σύνθετα θέματα

5. Να κατασκευάσετε τρίγωνο $AB\Gamma$ με βάση $B\Gamma=a$,
ύψος $AH=v$ και $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν δοσμένα τμήματα.