

ΦΥΛΛΟ ΘΕΜΑΤΩΝ Α: Live διδασκαλία**Διδακτικοί Στόχοι**

- A.** Να θυμηθούμε πως επιλύουμε εξισώσεις α' βαθμού.
- B.** Να θυμηθούμε πως επιλύουμε παραμετρικές εξισώσεις α' βαθμού.
- Γ.** Να θυμηθούμε πως επιλύουμε κλασματικές εξισώσεις.
- Δ.** Να θυμηθούμε πως επιλύουμε εξισώσεις της μορφής $|x| = a$ και $|x| = |a|$.
- Ε.** Να θυμηθούμε ποια είναι τα βασικά βήματα για την επίλυση προβλημάτων και να μπορούμε να τα εφαρμόσουμε.
- Ζ.** Επίλυση τύπων.

Ασκήσεις**Θέμα 1**

Να λυθεί η εξίσωση: $5(x - 3) + 10(2 - 5x) + 10x = -(15 + 10x)$.

Λύση

$$5(x - 3) + 10(2 - 5x) + 10x = -(15 + 10x) \Leftrightarrow$$

$$5x - 15 + 20 - 50x + 10x = -15 - 10x \Leftrightarrow$$

$$5x - 50x + 10x + 10x = -15 + 15 - 20 \Leftrightarrow$$

$$-25x = -20 \Leftrightarrow x = \frac{-20}{-25} \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}$$

Θέμα 2

Να λυθεί η εξίσωση: $2\omega - \left(\frac{15}{9}\omega - 5\right) = \frac{\omega-6}{3} + 7$

Λύση

$$2\omega - \left(\frac{15}{9}\omega - 5\right) = \frac{\omega-6}{3} + 7 \Leftrightarrow$$

$$2\omega - \frac{15}{9}\omega + 5 = \frac{\omega-6}{3} + 7 \Leftrightarrow$$

$$9 \cdot 2\omega - 9 \cdot \frac{15}{9}\omega + 9 \cdot 5 = 9 \cdot \frac{\omega-6}{3} + 9 \cdot 7 \Leftrightarrow$$

$$18\omega - 15\omega + 45 = 3(\omega - 6) + 63 \Leftrightarrow$$

$$18\omega - 15\omega + 45 = 3\omega - 18 + 63 \Leftrightarrow$$

$$18\omega - 15\omega - 3\omega = -45 - 18 + 63 \Leftrightarrow$$

$$0 \cdot \omega = 0 \text{ ταυτότητα ή αόριστη}$$

Θέμα 3

Να λυθεί για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να λυθεί η εξίσωση:

$$(\lambda^3 - 4\lambda)x = \lambda^2 + 4\lambda + 4$$

Λύση

$$(\lambda^3 - 4\lambda)x = \lambda^2 + 4\lambda + 4 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 4)x = (\lambda + 2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda(\lambda - 2)(\lambda + 2)x = (\lambda + 2)^2 \quad (1)$$

$$1^{\text{η}} \text{ περίπτωση: } \lambda(\lambda - 2)(\lambda + 2) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0 \text{ και } \lambda \neq 2 \text{ και } \lambda \neq -2$$

$$\text{Τότε, η εξίσωση έχει μία λύση: } x = \frac{(\lambda+2)^2}{\lambda(\lambda-2)(\lambda+2)} = \frac{\lambda+2}{\lambda(\lambda-2)}$$

$$2^{\text{η}} \text{ περίπτωση: } \lambda(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = -2$$

$$\text{Για } \lambda = 0 \text{ η εξίσωση (1) γίνεται: } 0 \cdot x = 2^2 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 4 \text{ αδύνατη.}$$

$$\text{Για } \lambda = 2 \text{ η εξίσωση (1) γίνεται: } 0 \cdot x = 4^2 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 16 \text{ αδύνατη.}$$

$$\text{Για } \lambda = -2 \text{ η εξίσωση (1) γίνεται: } 0 \cdot x = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0 \text{ ταυτότητα.}$$

Θέμα 4

Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ η εξίσωση: $\frac{ax}{3} - \frac{\beta}{3} + \frac{x}{2} = 3x - a$

α) έχει 1 λύση β) είναι ταυτότητα γ) είναι αδύνατη

Λύση

$$\begin{aligned}\frac{ax}{3} - \frac{\beta}{3} + \frac{x}{2} &= 3x - a \Leftrightarrow 2ax - 2\beta + 3x = 18x - 6a \Leftrightarrow \\ 2ax + 3x - 18x &= 2\beta - 6a \Leftrightarrow 2ax - 15x = 2\beta - 6a \Leftrightarrow \\ (2a - 15)x &= 2\beta - 6a\end{aligned}$$

α) **1 λύση** έχει όταν $2a - 15 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{15}{2}$ και $\beta \in \mathbb{R}$.

β) **Ταυτότητα** είναι όταν είναι της μορφής $0x = 0$ δηλαδή όταν:

$$2a - 15 = 0 \text{ και } 2\beta - 6a = 0 \Leftrightarrow$$

$$a = 3 \text{ και } 2\beta - 18 = 0 \Leftrightarrow$$

$$a = 3 \text{ και } \beta = 9$$

γ) **Αδύνατη** είναι όταν $2a - 15 = 0$ και $2\beta - 6a \neq 0 \Leftrightarrow$

$$a = 3 \text{ και } \beta \neq 9$$

Θέμα 5

Η Μαρία λέει στην Κωνσταντίνα:

«Θέλω να πάρεις ένα αριθμό, να τον πολλαπλασιάσεις με 5, πρόσθεσε το 20 στο γινόμενο, διάλεξε το άθροισμα με το 5 και αφάιρεσε τώρα τον αριθμό που πήρες στην αρχή. Θα βρεις αποτέλεσμα 4». Έχει δίκιο η Μαρία ;

Λύση

Έστω x ο αριθμός. Τότε:

$$\begin{aligned}\frac{x \cdot 5 + 20}{5} - x &= 4 \Leftrightarrow \frac{5x + 20}{5} - x = 4 \Leftrightarrow \\ 5x + 20 - 5x &= 20 \Leftrightarrow 5x - 5x = 20 - 20 \Leftrightarrow \\ 0x &= 0 \quad \text{ταυτότητα, δηλαδή ισχύει για κάθε τιμή του } x.\end{aligned}$$

Θέμα 6

Ένας πατέρας είναι μεγαλύτερος από τον γιο του κατά 30 χρόνια και πριν 3 χρόνια το άθροισμα των ηλικιών τους ήταν 32. Να βρεθούν οι ηλικίες τους.

Λύση

Σήμερα

Πριν 3 χρόνια

Γιος: x ετών

$x - 3$

Πατέρας: $x + 30$

$x + 30 - 3 = x + 27$

$$x + 27 + x - 3 = 32 \Leftrightarrow x + x = 32 - 27 + 3 \Leftrightarrow$$

$$2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$$

Επομένως: Γιος $\rightarrow$ 4 ετών, Πατέρας: 34 ετών

Θέμα 7

Να επιλυθεί η εξίσωση:

$$\frac{5}{x+3} - \frac{2x+1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{x+2}$$

Λύση

Παραγοντοποιώ το: $x^2 + 5x + 6$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4 \cdot 6 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = -2, \quad x_2 = -3$$

$$\text{Άρα: } x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$$

$$ΕΚΠ = (x+2)(x+3) \neq 0 \Leftrightarrow x+2 \neq 0 \text{ και } x+3 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$x \neq -2 \text{ και } x \neq -3$$

$$\begin{aligned} \frac{5}{x+3} - \frac{2x+1}{x^2+5x+6} &= \frac{1}{x+2} \Leftrightarrow \\ \frac{5}{x+3} + \frac{2x+1}{(x+2)(x+3)} &= \frac{1}{x+2} \Leftrightarrow \\ 5(x+2) + (2x+1) &= x+3 \Leftrightarrow \\ 5x+10+2x+1 &= x+3 \Leftrightarrow \\ 5x+2x-x &= -10-1+3 \Leftrightarrow \\ 6x &= -8 \Leftrightarrow \\ x &= -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3} \text{ δεκτή} \end{aligned}$$

Θέμα 8

Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$1. |3x - 4| = 1$$

$$2. |x - 4| = 2|1 - 5x|$$

$$3. \frac{|3x-2|-4}{5} = \frac{|3x-2|-3}{2} + \frac{4|3x-2|-1}{3}$$

$$4. |x - 4| = 2x - 1$$

Λύση

$$1. |3x - 4| = 1 \Leftrightarrow 3x - 4 = 1 \text{ ή } 3x - 4 = -1 \Leftrightarrow$$

$$3x = 5 \text{ ή } 3x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \text{ ή } x = 1$$

$$2. |x - 4| = 2|1 - 5x| \Leftrightarrow$$

$$x - 4 = 2(1 - 5x) \text{ ή } x - 4 = -2(1 - 5x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 4 = 2 - 10x \text{ ή } x - 4 = -2 + 10x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 11x = 6 \text{ ή } -9x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{6}{11} \text{ ή } x = -\frac{2}{9}$$

$$3. \frac{|3x-2|-4}{5} = \frac{|3x-2|-3}{2} + \frac{4|3x-2|-1}{3} \Leftrightarrow \text{ΕΚΠ}=30$$

$$30 \cdot \frac{|3x-2|-4}{5} = 30 \cdot \frac{|3x-2|-3}{2} + 30 \cdot \frac{4|3x-2|-1}{3} \Leftrightarrow$$

$$6(|3x-2|-4) = 15(|3x-2|-3) + 10(4|3x-2|-1) \Leftrightarrow$$

$$6|3x-2|-24 = 15|3x-2|-45 + 40|3x-2|-10 \Leftrightarrow$$

$$6|3x-2|-15|3x-2|-40|3x-2| = 24-45-10 \Leftrightarrow$$

$$-49|3x-2| = -31 \Leftrightarrow |3x-2| = \frac{31}{49} \Leftrightarrow$$

$$3x-2 = \frac{31}{49} \text{ ή } 3x-2 = -\frac{31}{49} \Leftrightarrow$$

Η Γνώση με τρόπο απλό και κατανοητό!

$$\begin{aligned}
 3x &= \frac{31}{49} + 2 & \text{ή} & & 3x &= -\frac{31}{49} + 2 & \Leftrightarrow \\
 147x &= 31 + 98 & \text{ή} & & 147x &= -31 + 98 & \Leftrightarrow \\
 147x &= 129 & \text{ή} & & 147x &= 67 & \Leftrightarrow \\
 x &= \frac{129}{147} = \frac{43}{49} & \text{ή} & & x &= \frac{67}{147}
 \end{aligned}$$

4. $|x - 4| = 2x - 1$ (1)

Για να έχει λύση η (1) πρέπει να είναι: $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow x - 4 = 2x - 1 & \text{ή} & & x - 4 = -2x + 1 & \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x - 2x = 4 - 1 & \text{ή} & & x + 2x = 4 + 1 & \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -x = 3 & \text{ή} & & 3x = 5 & \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = -3 \text{ (απορρίπτεται)} & \text{ή} & & x = \frac{5}{3} \text{ (δεκτή)}
 \end{aligned}$$

Θέμα 9

1. Να επιλυθεί ο τύπος $E = \frac{\pi R^2 \mu^0}{360^0}$ ως προς μ .
2. Να επιλυθεί ο τύπος $E = \frac{(B+\beta)v}{2}$ ως προς β .

Λύση

$$\begin{aligned}
 1. \quad E &= \frac{\pi R^2 \mu^0}{360^0} & \Leftrightarrow & & \pi R^2 \mu^0 &= 360^0 E & \Leftrightarrow & & \mu^0 &= \frac{360^0 E}{\pi R^2} \\
 2. \quad E &= \frac{(B+\beta)v}{2} & \Leftrightarrow & & (B + \beta)v &= 2E & \Leftrightarrow & & Bv + \beta v &= 2E & \Leftrightarrow \\
 & & & & \beta v &= 2E - Bv & \Leftrightarrow & & \beta &= \frac{2E - Bv}{v}
 \end{aligned}$$