

ΦΥΛΛΟ ΘΕΜΑΤΩΝ Α: Live διδασκαλία**Διδακτικοί Στόχοι**

- A.** Να θυμηθούμε πως επιλύουμε εξισώσεις 2^{ου} βαθμού.
- B.** Να θυμηθούμε πως επιλύουμε παραμετρικές εξισώσεις 2^{ου} βαθμού.
- Γ.** Επίλυση προβλημάτων .
- Δ.** Παραστάσεις με τύπους Vieta.
- Ε.** Να θυμηθούμε πως επιλύουμε πως δημιουργούμε εξισώσεις δευτέρου βαθμού με γνωστές ρίζες.

Ασκήσεις**Θέμα 1**

Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$1) (x - 2)^2 + 2x(x + 6) = 2(3x + 10)$$

$$2) \frac{2}{x} + \frac{2x-3}{x-2} + \frac{2-x^2}{x^2-2x} = 0$$

$$3) x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$4) (x - 2)^2 - 3|x - 2| + 2 = 0$$

Λύση

$$1) (x - 2)^2 + 2x(x + 6) = 2(3x + 10) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + 2x^2 + 12x = 6x + 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 8x + 4 - 6x - 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 16 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-16) = 4 + 192 = 196$$

Άρα, η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{196}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm 14}{6}$$

$$x_1 = \frac{-2 - 14}{6} = -\frac{16}{6} = -\frac{8}{3}$$

$$x_2 = \frac{-2 + 14}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$2) \frac{2}{x} + \frac{2x-3}{x-2} + \frac{2-x^2}{x^2-2x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} + \frac{2x-3}{x-2} + \frac{2-x^2}{x(x-2)} = 0 \quad (1)$$

$$ΕΚΠ = x(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$x \neq 0 \text{ και } x-2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$x \neq 0 \text{ και } x \neq 2$$

$$(1) \Leftrightarrow 2(x-2) + x(2x-3) + 2-x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x-4+2x^2-3x+2-x^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-2=0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = \frac{1-3}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \text{ δεκτή}$$

$$x_2 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ απορρίπτεται}$$

$$3) x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Θέτουμε $y = x^2$. Η εξίσωση γίνεται: $y^2 - 5y + 4 = 0$.

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 9$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$y_1 = 1, y_2 = 4$$

$$x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$4) (x - 2)^2 - 3|x - 2| + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x - 2|^2 - 3|x - 2| + 2 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Θέτουμε } |x - 2| = \omega.$$

$$\omega^2 - 3\omega + 2 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$$

$$\omega_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$\omega = 1 \quad \text{ή} \quad \omega = 2$$

$$|x - 2| = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 1 \quad \text{ή} \quad x - 2 = -1 \Leftrightarrow$$

$$x = 3 \quad \text{ή} \quad x = 1$$

ή

$$|x - 2| = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 2 \quad \text{ή} \quad x - 2 = -2 \Leftrightarrow x = 4 \quad \text{ή} \quad x = 0$$

Θέμα 2

Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 4x - 6 = 0$, Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

1) $x_1 + x_2$

2) $x_1 x_2$

3) $x_1^2 + x_2^2$

4) $x_1^3 + x_2^3$

5) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

6) $\frac{x_1-1}{x_2+3} + \frac{x_2-1}{x_1+3}$

Λύση

Από τύπους Vieta έχουμε:

$$1) x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-4}{1} = 4$$

$$2) x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-6}{1} = -6$$

$$3) x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4^2 - 2(-6) = 16 + 12 = 28$$

$$4) x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = 4 \cdot (28 + 6) = 136$$

$$5) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} 6) \frac{x_1-1}{x_2+3} + \frac{x_2-1}{x_1+3} &= \frac{(x_1-1)(x_1+3) + (x_2-1)(x_2+3)}{(x_2+3)(x_1+3)} = \\ &= \frac{x_1^2 + 3x_1 - x_1 - 3 + x_2^2 + 3x_2 - x_2 - 3}{(x_2+3)(x_1+3)} = \\ &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1 + x_2) - 6}{x_1 x_2 + 3(x_1 + x_2) + 9} = \frac{28 + 2 \cdot 4 - 6}{-6 + 3 \cdot 4 + 9} = \frac{30}{15} = 2 \end{aligned}$$

Θέμα 3

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- 1) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ .
- 2) Για $\lambda = 2$ να λύσετε την εξίσωση (1).

Λύση

- 1) Αφού το 1 είναι λύση της (1) σημαίνει ότι την επαληθεύει, δηλαδή: $1^2 - (\lambda - 1) \cdot 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda + 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow -\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 8$

- 2) Για $\lambda = 2$ η (1) γίνεται: $x^2 - x + 6 = 0$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1 - 24 = -23 < 0$$

Άρα η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες, είναι δηλαδή αδύνατη.

Θέμα 4

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, $\lambda \neq -2$.

Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες:

- 1) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
- 2) Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 2.

Λύση

- 1) Για να έχει η εξίσωση δύο ρίζες πραγματικές και άνισες πρέπει

$$\begin{aligned}\Delta > 0 &\Leftrightarrow (2\lambda)^2 - 4(\lambda + 2)(\lambda - 1) > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4\lambda^2 - 4\lambda^2 + 4\lambda - 8\lambda + 8 > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -4\lambda + 8 > 0 \Leftrightarrow -4\lambda > -8 \Leftrightarrow \lambda < 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2) S = x_1 + x_2 = 2 &\Leftrightarrow -\frac{\beta}{a} = 2 \Leftrightarrow -\frac{2\lambda}{\lambda + 2} = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2\lambda = 2\lambda + 4 \Leftrightarrow -4\lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ δεκτό}\end{aligned}$$

Θέμα 5

Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση: $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

- 1) να έχει δύο ρίζες άνισες
- 2) να έχει μία ρίζα διπλή
- 3) να έχει πραγματικές ρίζες
- 4) να μην έχει καμία πραγματική ρίζα

Λύση

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2\lambda)^2 - 4(\lambda^2 - \lambda + 1) = 4\lambda^2 - 4\lambda^2 + 4\lambda - 4 = 4\lambda - 4$$

- 1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow 4\lambda - 4 > 0 \Leftrightarrow 4\lambda > 4 \Leftrightarrow \lambda > 1$
- 2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow 4\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$
- 3) $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4\lambda - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 4\lambda \geq 4 \Leftrightarrow \lambda \geq 1$
- 4) $\Delta < 0 \Leftrightarrow 4\lambda - 4 < 0 \Leftrightarrow \lambda < 1$

Θέμα 6

Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 2x + \lambda - 2 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- 1) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.
- 2) Στην περίπτωση που η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 να προσδιορίσετε το λ ώστε να ισχύει: $x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) = 1$.

Λύση

$$\begin{aligned} 1) \Delta \geq 0 &\Leftrightarrow 2^2 - 4(\lambda - 2) \geq 0 \Leftrightarrow 4 - 4\lambda + 8 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -4\lambda + 12 \geq 0 \Leftrightarrow -4\lambda \geq -12 \Leftrightarrow \lambda \leq 3 \end{aligned}$$

2) Για $\lambda \leq 3$ έχουμε:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{2}{1} = -2$$

$$x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda - 2}{1} = \lambda - 2$$

$$x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda - 2 - 2(-2) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda - 2 + 4 = 1 \Leftrightarrow \lambda = -1 < 3 \text{ δεκτό}$$

Θέμα 7

Αν x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης $-x^2 + x + 3 = 0$ να βρείτε την εξίσωση που έχει ως ρίζες τα ζεύγη:

1) $x_1^2 x_2, x_1 x_2^2$

2) $\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_1}$

Λύση

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{-1} = 1, \quad x_1 x_2 = \frac{3}{-1} = -3$$

Η εξίσωση θα είναι της μορφής $x^2 - Sx + P = 0$.

1) $S = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) = -3 \cdot 1 = -3$

$$P = x_1^2 x_2 \cdot x_1 x_2^2 = x_1^3 x_2^3 = (x_1 x_2)^3 = (-3)^3 = -27$$

Άρα, η εξίσωση θα είναι $x^2 - (-3)x + (-27) = 0 \Leftrightarrow$
 $x^2 + 3x - 27 = 0$

2) $S = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{(x_1^2 + x_2^2)}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{1 - 6}{-3} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$

$$P = \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_1} = 1$$

Άρα, η εξίσωση θα είναι $x^2 - \frac{5}{3}x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

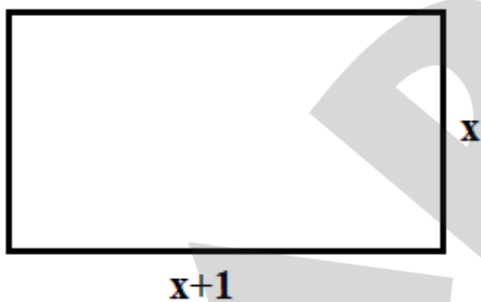
$$3x^2 - 5x + 3 = 0$$

Θέμα 8

Το πάτωμα του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $(x + 1)$ μέτρα και x μέτρα.

- 1) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.
- 2) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του.

Λύση



Πρέπει $x > 0$.

- 1) Περίμετρος:

$$\Pi = 2(x + 1) + 2x = 2x + 2 + 2x = 4x + 2 = 2(2x + 1), x > 0$$

$$E = x(x + 1) = x^2 + x, x > 0$$

- 2) $E = 90 \Leftrightarrow x^2 + x = 90 \Leftrightarrow x^2 + x - 90 = 0$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1 - 4(-90) = 361$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 19}{2}$$

$$x = -10 \text{ απορρίπτεται} \quad \text{ή} \quad x = 9$$

Διαστάσεις: πλάτος 9 m και μήκος 10 m.

Θέμα 9

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5) = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- 1) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1).
- 2) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για $\lambda \in \mathbb{R}$.
- 3) Αν x_1, x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4$.

Λύση

- 1) $\Delta = (-\lambda)^2 - 4(-\lambda^2 - 5) = \lambda^2 + 4\lambda^2 + 20 = 5\lambda^2 + 20 = 5(\lambda^2 + 4)$
- 2) $5 > 0, \lambda^2 \geq 0$ και $4 > 0$ οπότε $\Delta > 0$ για κάθε λ πραγματικό.
Οπότε, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για $\lambda \in \mathbb{R}$.
- 3) $x_1 + x_2 = \lambda, x_1 x_2 = -(\lambda^2 + 5)$
 $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4 \Leftrightarrow x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 = -4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -\lambda^2 - 5 - 2\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow -\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$
 $\Delta = 2^2 - 4(-3) = 16$
 $\lambda = \frac{-2 \pm 4}{2}$
 $\lambda = -3 \text{ ή } \lambda = 1$

Θέμα 10

Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

- 1) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.
- 2) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 x_2$ των ριζών.
Αν $\lambda < 0$, τότε:
- 3) Το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- 4) Να αποδείξετε ότι $|x_1 + x_2| \geq 2x_1 x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου.

Λύση

- 1) $\Delta = (\lambda^2 + 1)^2 - 4\lambda^2 = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, οπότε το τριώνυμο έχει πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.
- 2) $S = x_1 + x_2 = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda}$, $P = x_1 x_2 = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$
- 3) Αφού το γινόμενο των ριζών $P = 1 > 0$, καταλαβαίνουμε ότι οι ρίζες είναι ομόσημες.
Είναι: $S < 0$ γιατί: $\lambda^2 + 1 > 0$ και $\lambda < 0$ οπότε οι ρίζες είναι αρνητικές.
- 4) $|x_1 + x_2| \geq 2x_1 x_2 \Leftrightarrow \frac{\lambda^2 + 1}{|\lambda|} \geq 2 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 \geq 2|\lambda| \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow |\lambda|^2 - 2|\lambda| + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (|\lambda| - 1)^2 \geq 0$ ισχύει για κάθε λ .