Στρατηγική επίλυσης προβλημάτων

Για τον υπολογισμό των διανυσματικών μεγεθών δύναμης, έντασης δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι πρέπει να υπολογίζονται: Μέτρο - Διεύθυνση - Φορά.

(I) Δύναμη Coulomb

(α) Αν ζητείται σε ένα πρόβλημα ο υπολογισμός της δύναμης που ασκείται από ένα φορτίο σε ένα άλλο φορτίο, εργαζόμαστε όπως επιβάλλει ο νόμος του Coulomb, προσδιορίζοντας τα διανυσματικά χαρακτηριστικά της.

(β) Αν ζητείται ο υπολογισμός της δύναμης που δέχεται ηλεκτρικό φορτίο από σύστημα δύο ή περισσότερων φορτίων, θα υπολογίσουμε τη δύναμη που οφείλεται σε κάθε ένα από τα φορτία αυτά και στη συνέχεια θα προσθέσουμε τις δυνάμεις *διανυσματικά* για να προσδιορίσουμε τελικά το μέτρο, τη διεύθυνση και τη φορά της συνισταμένης.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots$$

(II) Ένταση σε σημείο ηλεκτρικού πεδίου

(α) Αν ζητείται σε ένα πρόβλημα ο υπολογισμός της έντασης σε σημείο ηλεκτρικού πεδίου, τη βρίσκουμε απλά εφαρμόζοντας τη σχέση ορισμού της $\vec{E} = \vec{F}/q$ ή αν πρόκειται για πεδίο που οφείλεται σε σημειακό φορτίο, πεδίο Coulomb, από τη σχέση:

$$E = k\frac{|Q|}{r^2}$$

Η διεύθυνση και η φορά της προσδιορίζεται από το είδος του φορτίου Q.

(β) Αν ζητείται ο υπολογισμός της έντασης σε σημείο (Α) ηλεκτρικού πεδίου που οφείλεται σε δύο ή περισσότερα σημειακά φορτία, προσδιορίζουμε την ένταση του πεδίου που προκαλεί κάθε ένα φορτίο πηγή στο σημείο (Α) και στη συνέχεια θα προσθέσουμε τις εντάσεις διανυσματικά για να προσδιορίσουμε τελικά το μέτρο, τη διεύθυνση και τη φορά της συνισταμένης.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots$$

(III) Δυναμικό

Το δυναμικό είναι μονόμετρο μέγεθος. Επομένως για τον υπολογισμό του αρκεί ο προσδιορισμός της αλγεβρικής του τιμής.

(α) Εάν ζητείται σε ένα πρόβλημα να γίνει ο υπολογισμός του δυναμικού σε σημείο (Α) ηλεκτρικού πεδίου, υπολογίζεται από τη σχέση ορισμού $V_A = U_A/q$ ή αν πρόκειται για πεδίο σημειακού ηλεκτρικού φορτίου υπολογίζεται και από τη σχέση:

$$V_A = k\frac{Q}{r}$$

και η *αλγεβρική τιμή* του αποτελέσματος είναι η ζητούμενη.
(*Το φορτίο Q το αντικαθιστούμε με το πρόσημό του.*)

(β) Εάν ζητείται το δυναμικό σε σημείο πεδίου που οφείλεται σε δύο ή περισσότερα σημειακά φορτία-πηγές, προσδιορίζουμε το δυναμικό που προκαλεί στο σημείο κάθε φορτίο πηγή και στη συνέχεια προσθέτουμε αλγεβρικά τα δυναμικά αυτά.

$$V_{ολ} = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots$$

Λυμένα προβλήματα

Πρόβλημα 1

Επίπεδος πυκνωτής έχει τετραγωνικούς οπλισμούς, πλευράς 10cm. Η απόσταση μεταξύ των οπλισμών του είναι ℓ = 1mm. Να υπολογιστεί:

(α) Η χωρητικότητά του.

(β) Η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη σ' αυτόν αν έχει φορτισθεί με φορτίο Q = 1μC.

Δίνεται $\varepsilon_o = 8{,}85 \cdot 10^{-12} C^2/N \cdot m^2$.

Λύση

(α) Από τη σχέση (16) για τη χωρητικότητα έχουμε:

$$C = \varepsilon_o \frac{s}{\ell} = \left(8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}\right)\frac{(0{,}1m)^2}{0{,}001m} = 8{,}85 \cdot 10^{-11} F$$

(β) Η ενέργεια του πυκνωτή από τη σχέση (17) είναι:

$$U = \frac{Q \cdot V}{2} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(10^{-6}C)^2}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-11} F} = 0{,}0056J$$

Πρόβλημα 2

Ένας πυκνωτής 90μF συνδέεται με μπαταρία 12V και φορτίζεται μέχρις ότου η τάση του να γίνει 12V. Πόσα ηλεκτρόνια μεταφέρθηκαν από τη μία πλάκα στην άλλη;

Δίνεται $q_e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}C$.

Λύση

Από τη σχέση ορισμού της χωρητικότητας, σχέση (15), έχουμε:

$$Q = CV = (90 \cdot 10^{-6}F) \cdot (12V) = 108 \cdot 10^{-5}C$$

Αυτό είναι το φορτίο σε κάθε έναν οπλισμό κατά απόλυτη τιμή. Ο αριθμός των ηλεκτρονίων που συναποτελούν το φορτίο Q είναι:

$$n = \frac{Q}{|q_e|} = \frac{108 \cdot 10^{-5}C}{1{,}6 \cdot 10^{-19}C} = 67{,}5 \cdot 10^{14} \text{ ηλεκτρόνια}$$

Πρόβλημα 3

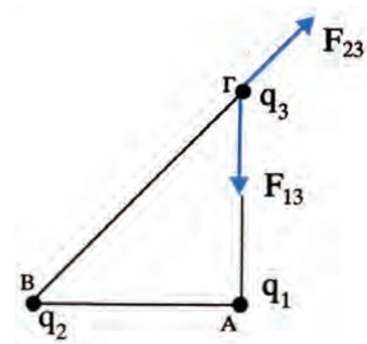
Τρία φορτία $q_1 = -15\mu C$, $q_2 = +15\mu C$ και $q_3 = +20\mu C$ βρίσκονται στις κορυφές Α, Β, Γ αντίστοιχα ενός ισοπλεύρου ορθογωνίου τριγώνου.

Να υπολογισθούν:

(α) Η συνισταμένη δύναμη που δέχεται το φορτίο q_3.

(β) Η ένταση του πεδίου στο μέσο της Μ υποτείνουσας (ΒΓ).

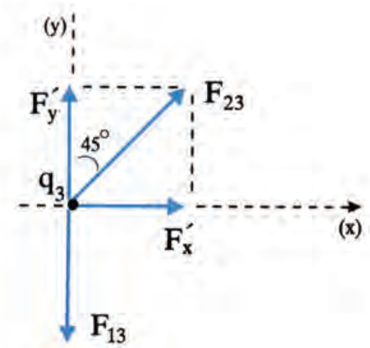
Δίνονται $k = 9 \cdot 10^9 Nm^2/C^2$ και (ΑΒ) = (ΑΓ) = 2m.



Λύση

Για τον υπολογισμό της δύναμης F, που δέχεται το φορτίο q_3, θα υπολογίσουμε τη δύναμη $F_{1,3}$ που ασκεί το φορτίο q_1 στο φορτίο q_3 και τη δύναμη $F_{2,3}$ που ασκεί το φορτίο q_2 στο φορτίο q_3.

Επειδή τα φορτία q_1 και q_3 είναι ετερώνυμα ενώ τα q_2, q_3 ομώνυμα, οι δυνάμεις $F_{1,3}$ και $F_{2,3}$ έχουν τις κατευθύνσεις που φαίνονται στο σχήμα.



Τα μέτρα των δυνάμεων είναι:

$$F_{1,3} = k\frac{|q_1 \cdot q_3|}{A\Gamma^2} = 9\cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\frac{15\cdot 10^{-6}C\cdot 20\cdot 10^{-6}C}{(2m)^2} \text{ ή}$$

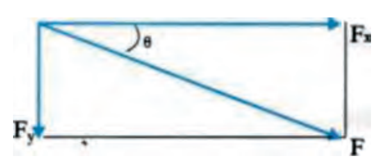
$$F_{1,3} = 675\cdot 10^{-3}N$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο προκύπτει: $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = 8m^2$

$$F_{2,3} = k\frac{|q_2 \cdot q_3|}{B\Gamma^2} = 9\cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\cdot\frac{15\cdot 10^{-6}C\cdot 20\cdot 10^{-6}C}{8m^2} \text{ ή}$$

$$F_{2,3} = 337{,}5\cdot 10^{-3}N$$

Αναλύουμε την $F_{2,3}$ σε δύο συνιστώσες F'_x και F'_y οι οποίες έχουν ίσα μέτρα, επειδή η δύναμη $F_{2,3}$ σχηματίζει γωνία 45^o με την (ΑΓ).



$$F'_x = F'_y = F_{2,3}\sigma\upsilon\nu 45^o = 337{,}5\cdot 10^{-3}N\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 475\cdot 10^{-3}N$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη συνισταμένη των δυνάμεων στους άξονες x και y, F_x και F_y αντίστοιχα.

$$F_x = F'_x = 475\cdot 10^{-3}N \text{ και}$$

$$F_y = F_{1,3} - F'_y = 675\cdot 10^{-3}N - 475\cdot 10^{-3}N \text{ ή}$$

$$F_y = 200\cdot 10^{-3}N$$

Η συνισταμένη των δυνάμεων F έχει μέτρο:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(475\cdot 10^{-3}N)^2 + (200\cdot 10^{-3}N)^2}$$

$$F = 515{,}4\cdot 10^{-3}N$$

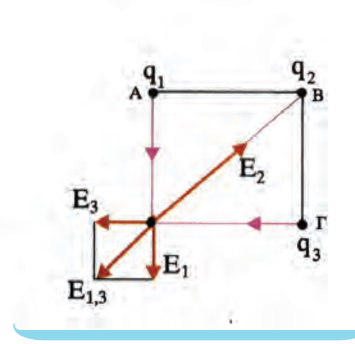
Η διεύθυνση της δύναμης F είναι: $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{F_y}{F_x} = \dfrac{200\cdot 10^{-3}N}{475\cdot 10^{-3}N} = 0{,}42$

Πρόβλημα 4

Τρία ηλεκτρικά φορτία $q_1 = q_3 = \sqrt{2}\cdot 10^{-8}C$ και $q_2 = -10^{-7}C$ βρίσκονται στις τρεις κορυφές ενός τετραγώνου πλευράς $d = 3m$. Να βρεθούν:

(α) Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται στην τέταρτη κορυφή.

(β) Το δυναμικό του πεδίου στην τέταρτη κορυφή.



Λύση

(α) Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην κορυφή Δ θα είναι ίση με τη συνισταμένη των εντάσεων που οφείλονται στα q_1, q_2, q_3. Σχεδιάζουμε τις εντάσεις $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{E}_3$ που δημιουργούν τα φορτία q_1, q_2, q_3 αντίστοιχα. Η κατεύθυνσή τους είναι η κατεύθυνση που προσδιορίζεται από τη φορά της αντίστοιχης δυναμικής γραμμής.

(Α→Δ, Δ→Β, Γ→Δ αντίστοιχα).

Όπως γνωρίζουμε: $E_1 = k\dfrac{|q_1|}{d^2}$, $E_3 = k\dfrac{|q_3|}{d^2}$

και επειδή $(B\Delta)^2 = 2d^2$

$$E_2 = k\frac{|q_2|}{2d^2}$$

Πρώτα βρίσκουμε τη συνισταμένη των $\vec{E}_1$ και $\vec{E}_3$.

$$E_{1,3} = \sqrt{E_1^2 + E_3^2} = \sqrt{2E_1^2} = E_1\sqrt{2} = k\frac{|q_1|}{d^2}\sqrt{2} \text{ ή}$$

$$E_{1,3} = 9\cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot 10^{-8}C}{(3m)^2}\sqrt{2} = 20\,\frac{N}{C}$$

Η διεύθυνση είναι ίδια με τη διεύθυνση της διαγώνιου ΒΔ, δηλαδή σχηματίζει γωνία 45° με τις E_1 και E_3.

Η E_2 είναι:

$$E_2 = 9\cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\cdot\frac{10^{-7}C}{2(3m)^2} = 50\,\frac{N}{C}$$

Η διεύθυνση της E_2 είναι ίδια με την $E_{1,3}$ και η φορά αντίθετη. Επομένως, η συνισταμένη τους θα είναι: $\vec{E}_{o\lambda} = \vec{E}_{1,3} + \vec{E}_2$

Η αλγεβρική τιμή της $\vec{E}_{o\lambda}$ είναι:

$$E_{ολ} = E_{1,3} - E_2 = 20\frac{N}{C} - 50\frac{N}{C} = -30\frac{N}{C}$$

Δηλαδή η $\vec{E}_{ολ}$ θα έχει τη διεύθυνση και τη φορά της $\vec{E}_2$.

(β)Το δυναμικό ως μονόμετρο μέγεθος στη θέση (Δ) υπολογίζεται άμεσα από το άθροισμα των δυναμικών που δημιουργούν τα τρία φορτία στη θέση Δ: $V_Δ = V_1 + V_2 + V_3$.

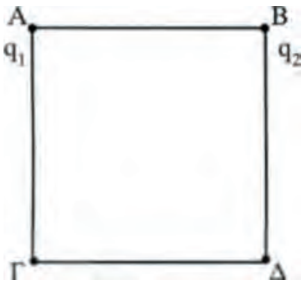
Τα δυναμικά είναι: $V_1 = V_3 = k\frac{q_1}{d} = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot 10^{-8}C}{3m} = 42{,}3V$

και επειδή $(BΔ) = d\sqrt{2}$ το V_2 είναι:

$$V_2 = k\frac{q_2}{(BΔ)} = k\frac{q_2}{d\sqrt{2}} = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \cdot \frac{(-10^{-7}C)}{3\sqrt{2}m} = -213{,}8V$$

Επομένως, το δυναμικό $V_Δ = 42{,}3V + (-213{,}8)V + 42{,}3V$ ή $V_Δ = -129{,}2V$

Πρόβλημα 5



Δίδονται δύο φορτία στις κορυφές Α και Β ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ, $q_1 = 2 \cdot 10^{-7}C$ και $q_2 = -10^{-7}C$, πλευράς $d = 3m$. Να βρεθεί:

(α) Η διαφορά δυναμικού $V_{ΓΔ}$ μεταξύ των σημείων Γ και Δ.

(β) Αν φορτίο $q = -10^{-6}C$ μετακινηθεί από τη θέση (Γ) στη θέση (Δ), πόσο είναι το έργο της δύναμης του πεδίου κατά τη μετακίνηση αυτή;

Λύση

(α) Η διαφορά δυναμικού $V_{ΓΔ}$ είναι: $V_{ΓΔ} = V_Γ - V_Δ$

Υπολογίζουμε τα δυναμικά $V_Γ$ και $V_Δ$.

$V_Γ = V_1 + V_2$, επομένως:

$V_Γ = k\frac{q_1}{(AΓ)} + k\frac{q_2}{(BΓ)}$ και $(AΓ) = d\sqrt{2}, (BΓ) = d$. Επομένως:

$$V_Γ = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-7}C}{3\sqrt{2}m} + 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \cdot \frac{(-10^{-7}C)}{3m} \simeq 125V$$

Όμοια $V_Δ = V_1 + V_2 = k\frac{q_1}{d} + k\frac{q_2}{BΔ}$ ή

$$V_Δ = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \cdot \frac{(2 \cdot 10^{-7}C)}{3m} + 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \cdot \frac{(-10^{-7}C)}{3\sqrt{2}m} \simeq 387V$$

Επομένως: $V_{ΓΔ} = V_Γ - V_Δ$ ή $V_Δ \simeq 125V + (-387)V \simeq -262V$

(β) Όπως μάθαμε $V_{ΓΔ} = \frac{W_{Γ \to Δ}}{q}$ ή $W_{Γ \to Δ} = V_{ΓΔ} \cdot q$

$$W_{Γ \to Δ} = (-262V) \cdot (-10^{-6}C) = -262 \cdot 10^{-6} Joule$$