5. *Στην υποτείνουσα ΒΓ ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε τέτοια, ώστε ΒΔ=ΔΕ=ΕΓ. Να αποδείξετε ότι* $A\Delta^2 + AE^2 = \frac{5}{9}B\Gamma^2$.

6. *Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει* $\beta^2+\gamma^2=2\alpha\mu_\alpha$ *να υπολογισθεί η γωνία* $\hat{A}$.

Σύνθετα Θέματα

1. *Δύο αδέλφια κληρονόμησαν αγροτεμάχιο σχήματος τραπεζίου και αποφάσισαν να το μοιράσουν ανοίγοντας δρόμο που θα ενώνει τα μέσα των παράλληλων πλευρών του. Αν οι βάσεις είναι 8km και 6km, ενώ οι μη παράλληλες πλευρές 5km και 7km, πόσο θα στοιχίσει η διάνοιξη του δρόμου, αν 1 χιλιόμετρο δρόμου κοστίζει 50.000 δρχ;*

2. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με ΑΓ>ΑΒ και Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Αν Ο το μέσο του ΜΝ, να αποδείξετε ότι:*

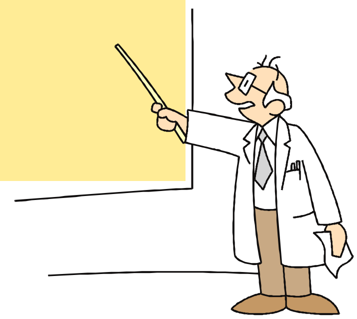
$$O\Gamma^2 - OB^2 = \frac{A\Gamma^2 - AB^2}{2}$$

3. *Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ = 2α θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ. Χωρίζουμε τη διάμετρο ΑΒ σε τρία ίσα τμήματα ΑΓ=ΓΔ=ΔΒ. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα* $MA^2+MB^2+M\Gamma^2+M\Delta^2$ *είναι σταθερό.*

4. *Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ πλευράς α, Ο το κέντρο του και κύκλος (Ο,λα), λ>0. Αν για τυχαίο σημείο Μ του κύκλου ισχύει* $MA^2+MB^2+M\Gamma^2+M\Delta^2=18\alpha^2$, *να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ.*

5. *Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ πλευράς α, με διαγώνιο ΒΔ = α. Έστω τυχαίο σημείο Ρ. Να αποδείξετε ότι*

$$\alpha^2 = (PA^2 - PB^2) + (P\Gamma^2 - P\Delta^2).$$



Μετρικές σχέσεις σε κύκλο

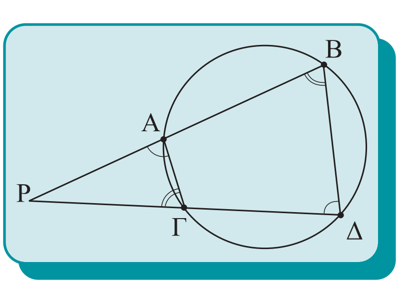
9.7 Τέμνουσες κύκλου

Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο (O,R) και ένα εξωτερικό ή εσωτερικό σημείο του Ρ. Από το Ρ φέρουμε δύο τυχαίες ευθείες που τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Α, Β και Γ, Δ αντίστοιχα. Το ακόλουθο θεώρημα εκφράζει ότι ΡΑ · ΡΒ = ΡΓ · ΡΔ.

Θεώρημα Ι

Αν δύο χορδές ΑΒ, ΓΔ ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε ένα σημείο Ρ , τότε ισχύει

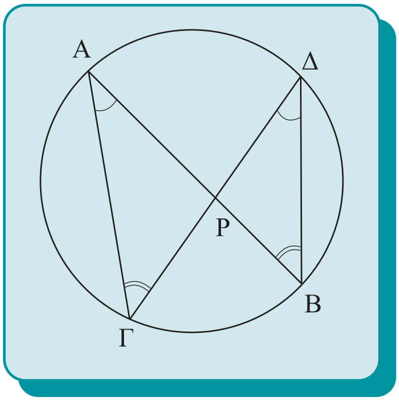
ΡΑ · ΡΒ = ΡΓ · ΡΔ.



Σχήμα 17α

Απόδειξη

Τα τρίγωνα ΡΑΓ και ΡΒΔ είναι όμοια, αφού $P\hat{A}\Gamma = P\hat{\Delta}B$ και $P\hat{\Gamma}A = P\hat{B}\Delta$ (Στο σχ.17α έχουμε ότι $P\hat{A}\Gamma = P\hat{\Delta}B$ γιατί το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο και η $P\hat{A}\Gamma$ είναι εξωτερική του γωνία. Στο σχ.17β $P\hat{A}\Gamma = P\hat{\Delta}B$ ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο).

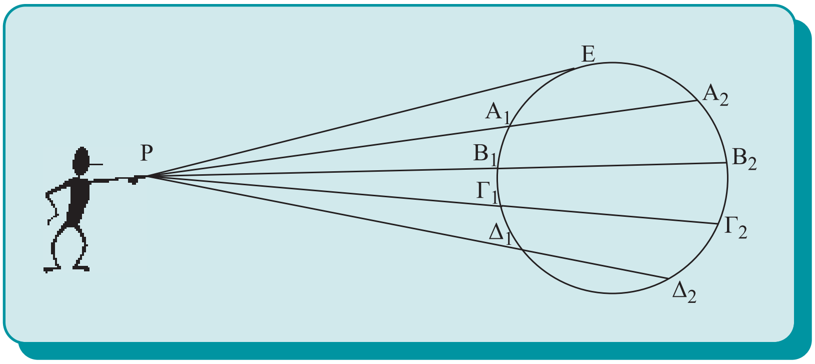


Σχήμα 17β

Επομένως, ισχύει ότι

$$\frac{\mathbf{P A}}{\mathbf{P \Delta}}=\frac{\mathbf{P \Gamma}}{\mathbf{P B}} \quad \text{ή} \quad \mathbf{PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta}.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι τα γινόμενα των τμημάτων που ορίζουν οι τέμνουσες ενός κύκλου $PA_1 \cdot PA_2$, $PB_1 \cdot PB_2$, $P\Gamma_1 \cdot P\Gamma_2$, ... παραμένουν σταθερά. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα γινόμενα αυτά εξαρτώνται μόνο από τις θέσεις του σημείου Ρ και του κύκλου (Ο,R).
Στην ειδική περίπτωση της εφαπτομένης, όπου τα δύο σημεία τομής ταυτίζονται, το θεώρημα ισχύει.



Σχήμα 18

Θεώρημα ΙΙ

Αν από ένα εξωτερικό σημείο Ρ κύκλου (Ο,R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΡΕ και μία ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Α, Β, τότε ισχύει ότι

$$\mathbf{PE^2 = PA \cdot PB.}$$

Απόδειξη

Φέρουμε την ευθεία ΡΟ η οποία τέμνει τον κύκλο στα σημεία Γ και Δ. Θέτουμε ΟΡ = δ, οπότε από το θεώρημα Ι έχουμε ότι:

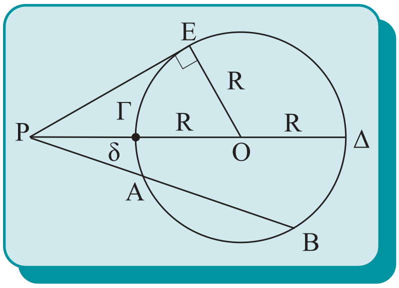
$$PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta =$$

$$=(\delta - R)(\delta + R) = \delta^2 - R^2.$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΡΟΕ προκύπτει ότι

$$PE^2 = PO^2 - OE^2 = \delta^2 - R^2$$

Άρα $PE^2 = PA \cdot PB$.



Σχήμα 19

Στην προηγούμενη απόδειξη είδαμε ότι αν μια ευθεία διέρχεται από ένα εξωτερικό σημείο P κύκλου (O,R) και τέμνει τον κύκλο σε σημεία A, B τότε $\mathbf{PA \cdot PB = \delta^2 - R^2}$. Όμοια αποδεικνύεται ότι $\mathbf{PA \cdot PB = R^2 - \delta^2}$, αν το P είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου.

Η διαφορά $\delta^2 - R^2$ λέγεται ***δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O,R)*** και συμβολίζεται

$$\Delta^{P}_{(O,R)} = \delta^2 - R^2 = OP^2 - R^2.$$

Ας εξετάσουμε τι συμβαίνει όταν το P είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου ή όταν ανήκει σε αυτόν. Τότε η δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O,R) είναι αρνητική ή ίση με το μηδέν αντίστοιχα.

Επεκτείνοντας, λοιπόν, τον ορισμό της δύναμης σημείου ως προς κύκλο καταλαβαίνουμε ότι ουσιαστικά εκφράζει τη σχετική θέση του σημείου P ως προς τον κύκλο (O,R), καθώς εξαρτάται μόνο από το δ, δηλαδή την απόσταση του P από το κέντρο του κύκλου. Επομένως, έχουμε ότι:

- **το P είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (O,R) αν και μόνο αν**

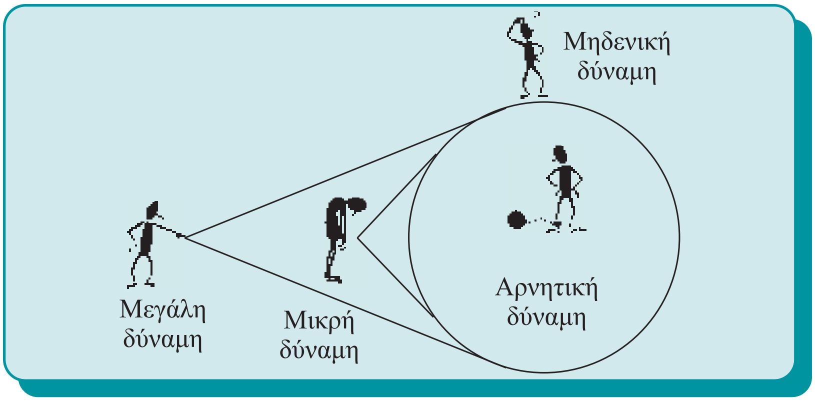
$$\mathbf{\Delta^{P}_{(O,R)} > 0}$$

- **το P είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (O,R) αν και μόνο αν**

$$\mathbf{\Delta^{P}_{(O,R)} < 0}$$

- **το P είναι σημείο του κύκλου (O,R) αν και μόνο αν**

$$\mathbf{\Delta^{P}_{(O,R)} = 0}$$



Σχήμα 20

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Αν δύο τμήματα ΑΒ και ΓΔ ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε ένα σημείο Ρ έτσι ώστε $ΡΑ \cdot ΡΒ = ΡΓ \cdot ΡΔ$, τότε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι εγγράψιμο.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε το σημείο τομής Ρ των τμημάτων ΑΒ, ΓΔ ή των προεκτάσεών τους (σχ.17).
Η δοσμένη σχέση $ΡΑ \cdot ΡΒ = ΡΓ \cdot ΡΔ$ γράφεται $\frac{ΡΑ}{ΡΓ} = \frac{ΡΔ}{ΡΒ}$ και αφού $Α\hat{Ρ}Γ = Β\hat{Ρ}Δ$, τα τρίγωνα ΑΡΓ και ΒΡΔ θα είναι όμοια.
Επομένως $Ρ\hat{Β}Δ = Ρ\hat{Γ}Α$, οπότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η εφαρμογή εκφράζει το αντίστροφο του θεωρήματος Ι.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Ας θεωρήσουμε ευθεία ε και τρία σημεία της Ρ, Α, Β, με το Α μεταξύ των Ρ και Β. Έστω σημείο Ε εκτός της ευθείας ε τέτοιο, ώστε $ΡΕ^2 = ΡΑ \cdot ΡΒ$. Τότε το τμήμα ΡΕ είναι εφαπτόμενο στον κύκλο, που ορίζουν τα σημεία Α, Β, Ε.

Απόδειξη

Έστω (Ο,R) ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Α, Β, Ε (σχ.19). Τότε $ΡΕ^2 = ΡΑ \cdot ΡΒ = ΟΡ^2 - R^2 = ΟΡ^2 - ΟΕ^2$ ή $ΡΕ^2 + ΟΕ^2 = ΟΡ^2$, οπότε το τρίγωνο ΟΕΡ είναι ορθογώνιο και η ΡΕ εφάπτεται στον κύκλο (Ο,R).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η εφαρμογή αυτή εκφράζει το αντίστροφο του θεωρήματος ΙΙ.

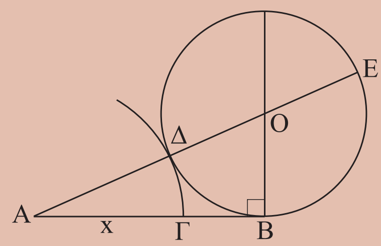
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η *Διαίρεση τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο (Χρυσή Τομή)*

Να διαιρεθεί ένα τμήμα ΑΒ, σε δύο άνισα τμήματα ΑΓ, ΓΒ ώστε το μεγαλύτερο από αυτά να είναι μέσο ανάλογο του μικρότερου και του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος.

Απόδειξη

Έστω ΑΒ = α και ΑΓ = x το μεγαλύτερο από τα τμήματα στα οποία χωρίζεται το ΑΒ από το Γ (σχ.21). Τότε ΓΒ = α – x και θα πρέπει να ισχύει η σχέση: $\mathbf{ΑΓ^2 = ΑΒ \cdot ΓΒ}$ ή $x^2 = α(α-x)$ (1).
Η σχέση (1) γράφεται $x^2 + αx - α^2 = 0$ ή $x(x+α) = α^2$ (2).

Έτσι, για να κατασκευάσουμε το x γράφουμε κύκλο $\left(Ο, \frac{α}{2}\right)$ που εφάπτεται στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ στο σημείο Β και φέρουμε την ΑΟ, η οποία τέμνει τον κύκλο στα σημεία Δ, Ε. Τότε ισχύει ότι $AB^2 = A\Delta \cdot AE = A\Delta(A\Delta + \Delta E) = A\Delta(A\Delta + AB)$ ή $\alpha^2 = A\Delta(A\Delta + \alpha)$ οπότε το ΑΔ έχει το ζητούμενο μήκος και το Γ είναι η τομή του κύκλου (Α, ΑΔ) και του τμήματος ΑΒ.



Σχήμα 21

ΣΧΟΛΙΟ

*Το πρόβλημα της διαίρεσης ενός ευθύγραμμου τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο είναι γνωστό σήμερα και ως πρόβλημα της **Χρυσής Τομής**. Με το πρόβλημα αυτό επιλύεται γεωμετρικά η εξίσωση $x^2 = a(a - x)$ ή $x^2 + ax - a^2 = 0$.*

Η θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2 + \alpha x - a^2 = 0$ είναι $x = \frac{\alpha(\sqrt{5} - 1)}{2}$, από όπου προκύπτει ότι $\frac{\alpha}{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{x}{\alpha - x}$, που είναι η αναλογία της «χρυσής τομής».

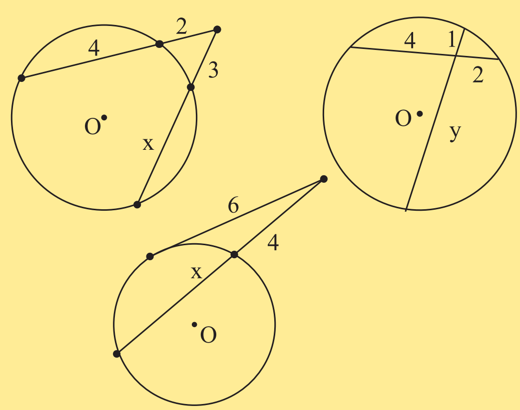
Ο παραπάνω λόγος συμβολίζεται διεθνώς με το γράμμα φ, δηλαδή $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

*Ο συμβολισμός προέρχεται από το όνομα του γλύπτη της κλασικής αρχαιότητας Φειδία ο οποίος κατασκεύασε τον Παρθενώνα. Οι αρχαίοι Έλληνες φιλόσοφοι διαπίστωσαν ότι όπου εμφανίζεται ο λόγος φ (αρχιτεκτονική, γλυπτική κτλ.), δημιουργεί την **αίσθηση της αρμονίας**.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

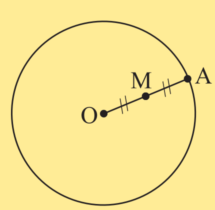
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Να προσδιορισθούν οι τιμές των x, y, στα παρακάτω σχήματα:*



2. *Ποια η δύναμη σημείου Ρ ως προς κύκλο (Ο,R) όταν Ρ≡Ο;*

3. *Αν στο διπλανό σχήμα είναι $\Delta^{M}_{(O,R)} = -3$, να υπολογίσετε την ακτίνα R του κύκλου.*



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Δίνεται κύκλος (Κ,6) και σημείο Α, ώστε ΑΚ=14cm. Αν από το σημείο Α φέρουμε τέμνουσα ΑΒΓ που τέμνει τον κύκλο κατά χορδή ΒΓ=6cm, να υπολογίσετε το ΑΒ.*

2. *Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ο κύκλος, που διέρχεται από το Α και τα μέσα Μ, Ν των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, εφάπτεται της ΒΓ στο Δ, να αποδείξετε ότι*

$$A\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta \Gamma.$$

3. *Θεωρούμε κύκλο (Ο,R) και τις χορδές του ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται στο Ρ. Αν ισχύει ότι $\frac{PA}{PB} = \frac{P\Delta}{P\Gamma}$ να αποδείξετε ότι οι χορδές ΑΒ, ΓΔ είναι ίσες.*

4. *Να αποδείξετε ότι η προέκταση της κοινής χορδής δύο τεμνόμενων κύκλων διχοτομεί κάθε κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα τους.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Αν Ε είναι το μέσο της ΑΔ και η ΒΕ προεκτεινόμενη τέμνει τον κύκλο στο Ζ, να αποδείξετε ότι:*

i) $BE = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}$, *ii)* ΒΕ=5ΕΖ.

2. *Από σημείο Α εκτός κύκλου (Ο,R) φέρουμε τέμνουσα ΑΒΓ και εφαπτόμενο τμήμα ΑΔ. Αν η διχοτόμος της γωνίας* $\hat{A}$ *τέμνει τις ΒΔ,ΓΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΕΒ·ΖΓ = ΕΔ·ΖΔ.*

3. *Αν η διάμεσος ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Ε ,να αποδείξετε ότι:*

i) $AM \cdot ME = \frac{B\Gamma^2}{4}$, *ii)* $AB^2+A\Gamma^2=2AM \cdot AE$.

4. *Δίνεται κύκλος (Ο,R) και ευθεία ε που δεν τέμνει τον κύκλο. Από σημείο Μ της ε φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ, ΜΒ και* $O\Gamma \perp \varepsilon$ *. Αν η ΑΒ τέμνει την ΟΓ στο Ν, να αποδείξετε ότι* $ON \cdot O\Gamma = R^2$.

5. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ* ($\hat{A} = 1\llcorner$), *εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) και το ύψος του ΑΔ. Αν μεταβλητή ευθεία που διέρχεται από το Γ τέμνει το ύψος στο Μ και τον κύκλο στο Η, να αποδείξετε ότι*

$$\Gamma M \cdot \Gamma H = \Gamma A^2.$$

Σύνθετα Θέματα

1. *Αν η διχοτόμος ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Ε και είναι* $A\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma$, *να αποδείξετε ότι* $AE^2=2E\Gamma^2$.

2. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με* $\beta^2+\gamma^2=2\alpha^2$ *. Αν η διάμεσος ΑΜ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Δ να αποδείξετε ότι* $M\Delta = \frac{\alpha\sqrt{3}}{6}$.

3. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι* $\mu_\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}\beta$. *Αν Μ το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΜ εφάπτεται της ΒΓ στο Β.*

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του ΑΔ, η διάμεσός του ΑΜ και ο περιγεγραμμένος κύκλος (Κ) του τριγώνου ΑΔΜ. Αν Ε, Ζ είναι τα σημεία τομής των ΑΒ και ΑΓ με τον κύκλο (Κ) αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΒΕ=ΓΖ.*

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *Έστω ΑΒ, ΓΔ δύο ευθύγραμμα τμήματα. Ικανή και αναγκαία συνθήκη, ώστε* $AB \perp \Gamma\Delta$ *είναι να ισχύει ότι* $A\Gamma^2 - A\Delta^2 = B\Gamma^2 - B\Delta^2$.

2. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας* $\hat{A}$, *να αποδείξετε ότι*

$$AB \cdot A\Gamma = A\Delta^2 + B\Delta \cdot \Delta\Gamma.$$

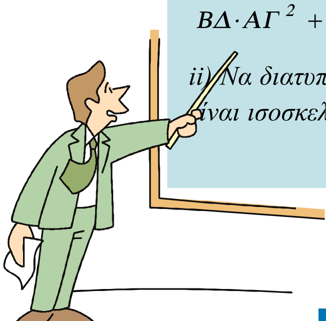
3. *Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ οξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ και ΒΔ το ύψος του, να αποδείξετε ότι* $AM^2=BM^2+A\Delta \cdot A\Gamma$.

4. ***Θεώρημα Stewart***

i) Έστω Δ σημείο της πλευράς ΒΓ, τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι

$$B\Delta \cdot A\Gamma^2 + \Delta\Gamma \cdot AB^2 = B\Gamma\left(A\Delta^2 + B\Delta \cdot \Delta\Gamma\right).$$

ii) Να διατυπώσετε το θεώρημα Stewart όταν το ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ=ΑΓ).



5. *Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με* $\mu_\beta \perp \mu_\gamma$. *Να αποδείξετε ότι:*

i) $\beta^2 + \gamma^2 = 5\alpha^2$,

ii) αν ΑΔ ύψος και Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, τότε $AH \cdot A\Delta = 2\alpha^2$.

6. *Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ. Αν Δ η προβολή του Μ πάνω στην ΑΒ να αποδείξετε ότι* $B\Gamma^2=3AB^2+A\Gamma^2 - 4AB \cdot A\Delta$.

7. *Δίνεται κύκλος (Ο,R) μια ακτίνα ΟΑ και χορδή ΒΓ παράλληλη προς την ΟΑ. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα* $AB^2+A\Gamma^2$ *είναι σταθερό.*

8. *Δίνεται κύκλος (Ο,R), μία διάμετρος ΑΒ και Γ, Δ τα μέσα των ΟΑ, ΟΒ αντίστοιχα. Αν μία χορδή ΕΗ που διέρχεται από το Γ είναι* $EH = \frac{\sqrt{13}}{2}R$, *να αποδείξετε ότι* $E\hat{\Delta}H = 1\llcorner$.