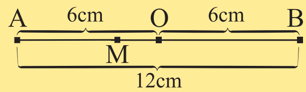
4. *Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 12 cm και το μέσο του Ο. Να βρεθεί σημείο Μ του ΑΟ, ώστε τα σημεία Μ και Β να διαιρούν εσωτερικά και εξωτερικά αντίστοιχα το τμήμα ΑΟ στον ίδιο λόγο.*



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Οι γωνίες ενός τριγώνου είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 4, 3, 2. Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου σε μοίρες.*

2. *Ο λόγος μιας γωνίας ω προς την παραπληρωματική της είναι* $\frac{1}{3}$. *Να βρεθεί η γωνία ω.*

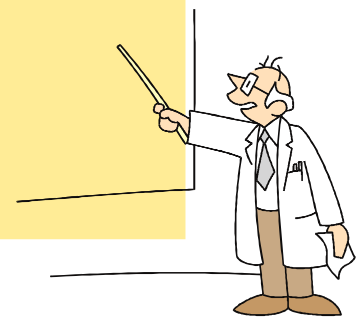
3. *Οι πλευρές ενός τριγώνου είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 6, 3, 4. Αν η περίμετρος του τριγώνου είναι 65cm, να βρεθούν τα μήκη των πλευρών του.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Οι εξωτερικές γωνίες ενός τριγώνου είναι ανάλογες των αριθμών 2, 3 και 4. Να υπολογισθούν οι εσωτερικές του γωνίες.*

2. *Σε ευθεία ε παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ και Δ, ώστε ΑΒ = 6cm, ΒΓ = 12cm, ΓΔ = 2cm. Να βρεθεί σημείο Μ του ΒΓ, το οποίο διαιρεί εσωτερικά τα τμήματα ΑΔ και ΒΓ στον ίδιο λόγο.*

3. *Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των αναλογιών, να διαιρέσετε δοσμένο τμήμα ΑΒ = α σε δύο τμήματα, τα οποία έχουν λόγο* $\frac{3}{4}$.



7.7 Θεώρημα του Θαλή

Είδαμε στην § 5.6 ότι αν παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες και ορίζουν **ίσα** τμήματα πάνω στη μία, θα ορίζουν ίσα τμήματα και πάνω στην άλλη. Τα παραπάνω γενικεύονται για οποιονδήποτε λόγο στο επόμενο θεώρημα που είναι γνωστό ως θεώρημα του Θαλή.

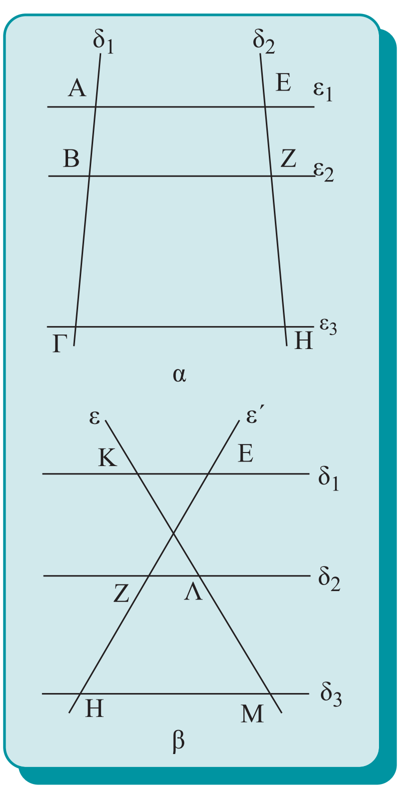
Θεώρημα

Αν τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες τέμνουν δυο άλλες ευθείες, ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα.

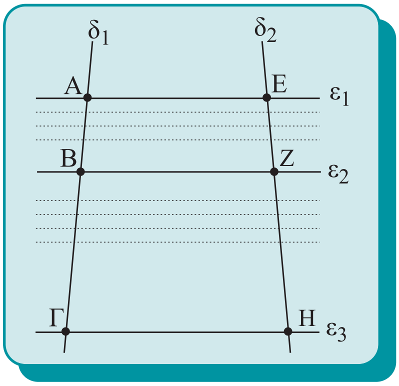
Δηλαδή:

Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$, **τότε** $\frac{ΑΒ}{ΕΖ} = \frac{ΒΓ}{ΖΗ} = \frac{ΑΓ}{ΕΗ}$ **(σχ.8α).**

Αν $\delta_1 // \delta_2 // \delta_3$, **τότε** $\frac{ΚΛ}{ΕΖ} = \frac{ΛΜ}{ΖΗ} = \frac{ΚΜ}{ΕΗ}$ **(σχ.8β).**



Σχήμα 8



Σχήμα 9

Απόδειξη

(i) Αν τα τμήματα ΑΒ και ΒΓ (σχ.9) είναι σύμμετρα, υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα μ τέτοιο, ώστε ΑΒ = κμ και ΒΓ = λμ (1), όπου κ, λ φυσικοί αριθμοί. Διαιρούμε το τμήμα ΑΒ σε κ τμήματα ίσα με το μ και το ΒΓ σε λ τμήματα ίσα με το μ.

Από τα σημεία που ορίζονται με τον παραπάνω τρόπο φέρουμε ευθείες παράλληλες προς την $ε_1$, οι οποίες τέμνουν τη $δ_2$. Επειδή τα τμήματα που ορίζονται πάνω στη $δ_1$ είναι ίσα μεταξύ τους, τότε και τα τμήματα που ορίζονται πάνω στη $δ_2$ θα είναι ίσα τμήματα, που το μήκος του καθενός ας είναι ν. Τότε θα έχουμε ΕΖ = κν και ΖΗ = λν (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι: $\dfrac{ΑΒ}{ΒΓ}=\dfrac{κμ}{λμ}=\dfrac{κ}{λ}$ και

$$\frac{ΕΖ}{ΖΗ}=\frac{κν}{λν}=\frac{κ}{λ}, \quad \text{οπότε} \quad \frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{ΕΖ}{ΖΗ} \quad \text{ή} \quad \frac{ΑΒ}{ΕΖ}=\frac{ΒΓ}{ΖΗ} \quad (3).$$

Από την αναλογία (3) παίρνουμε:

$$\frac{ΑΒ}{ΕΖ}=\frac{ΒΓ}{ΖΗ}=\frac{ΑΒ+ΒΓ}{ΕΖ+ΖΗ} \quad \text{ή} \quad \frac{ΑΒ}{ΕΖ}=\frac{ΒΓ}{ΖΗ}=\frac{ΑΓ}{ΕΖ}.$$

(ii) Αν τα τμήματα ΑΒ και ΒΓ είναι ασύμμετρα, ο λόγος $\dfrac{ΑΒ}{ΒΓ}$ είναι ασύμμετρος αριθμός. Αποδεικνύεται ότι και σε αυτή την περίπτωση ισχύει η προηγούμενη αναλογία.

Ισχύει και το **αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή**.

Θεώρημα

Θεωρούμε δύο ευθείες $δ_1$ και $δ_2$ που τέμνουν δύο παράλληλες ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ στα σημεία Α, Β και Ε, Ζ αντίστοιχα.
Αν Γ και Η είναι σημεία των ευθειών $δ_1$ και $δ_2$ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $\dfrac{ΑΒ}{ΒΓ}=\dfrac{ΕΖ}{ΖΗ}$, τότε η ευθεία ΓΗ είναι παράλληλη προς τις $ε_1$ και $ε_2$ (σχ.9).

Πόρισμα

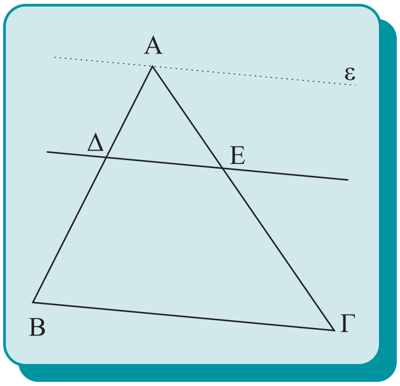
Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα και αντίστροφα.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΔΕ//ΒΓ (σχ.10).

Φέρουμε από την κορυφή Α ευθεία ε//ΒΓ//ΔΕ, οπότε από το θεώρημα του Θαλή προκύπτει ότι

$$\frac{ΑΔ}{ΑΕ} = \frac{ΔΒ}{ΕΓ}.$$



Σχήμα 10

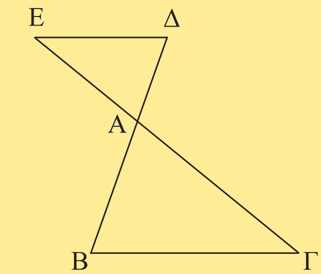
Μια σημαντική εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή είναι το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα

Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το παραπάνω πόρισμα ισχύει και στην περίπτωση που η ΔΕ τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ.



Σχήμα 11

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΔΕ//ΒΓ (σχ.12). Θα αποδείξουμε ότι:

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ}.$$

Επειδή ΔΕ//ΒΓ, από το θεώρημα του Θαλή έχουμε

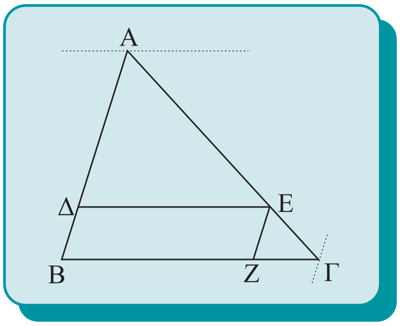
$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} \quad (1).$$

Φέρουμε την ΕΖ παράλληλη της ΑΒ, οπότε το ΔΕΖΒ είναι παραλληλόγραμμο, άρα ΔΕ=ΒΖ (2).

Επειδή ΕΖ//ΑΒ, από το θεώρημα του Θαλή έχουμε

$$\frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΒΖ}{ΒΓ} \quad ή \quad \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ} \quad (3).$$

Από τις (1) και (3) προκύπτει ότι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ}$.



Σχήμα 12

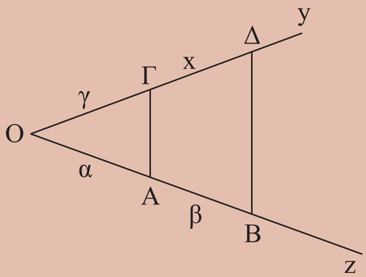
• Με τη βοήθεια του θεωρήματος του Θαλή γίνονται ορισμένες γεωμετρικές κατασκευές. Δύο από τις σπουδαιότερες είναι τα παρακάτω προβλήματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1 (Κατασκευή τέταρτης αναλόγου)

Αν δοθούν τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ, να κατασκευασθεί το τμήμα x, που ορίζεται από την αναλογία $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{x}$.

Λύση

Έστω μια γωνία $z\hat{O}y$. Πάνω στη μία πλευρά της Oz παίρνουμε διαδοχικά τα τμήματα ΟΑ = α, ΑΒ = β και πάνω στην Oy το τμήμα ΟΓ = γ. Από το Β φέρουμε την παράλληλη προς την ΑΓ, που τέμνει την Oy στο Δ. Τότε ΓΔ = x γιατί



Σχήμα 13

$$\frac{ΟΑ}{ΑΒ}=\frac{ΟΓ}{ΓΔ} \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{x}.$$

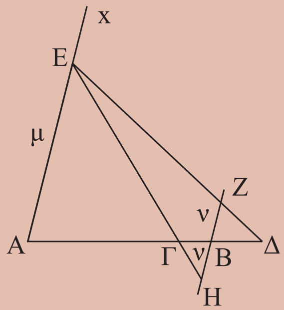
Είναι φανερό ότι με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζεται το τμήμα x αν $\frac{x}{\alpha}=\frac{\beta}{\gamma}$ ή $\frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{\gamma}$ ή $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{x}{\gamma}$, αρκεί κάθε φορά να γράφουμε το x ως τέταρτο όρο της αναλογίας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2 (Διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος σε δοσμένο λόγο)

Να διαιρεθεί ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, εσωτερικά και εξωτερικά, σε δοσμένο λόγο $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ,ν γνωστά τμήματα.

Λύση

Από το Α φέρουμε μια ημιευθεία Ax, πάνω στην οποία παίρνουμε τμήμα ΑΕ=μ. Από το Β φέρουμε ευθεία παράλληλη της Ax και παίρνουμε πάνω σε αυτή εκατέρωθεν του Β τμήματα ΒΖ=ΒΗ=ν. Τα σημεία Γ και Δ στα οποία οι ευθείες ΕΗ και ΕΖ τέμνουν την ευθεία ΑΒ είναι τα ζητούμενα. Πράγματι, τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΓΗΒ έχουν ανάλογες πλευρές, οπότε:



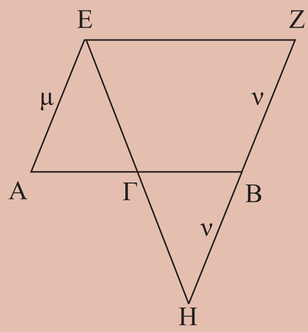
Σχήμα 14

$$\frac{ΓΑ}{ΓΒ}=\frac{ΑΕ}{ΒΗ}=\frac{\mu}{\nu}.$$

Όμοια τα τρίγωνα ΔΑΕ και ΔΒΖ έχουν ανάλογες πλευρές, οπότε:

$$\frac{ΔΑ}{ΔΒ}=\frac{ΑΕ}{ΒΖ}=\frac{μ}{ν}.$$

• Αν μ=ν, το τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε η ΕΖ **δε** δίνει σημείο Δ πάνω στην ΑΒ, ενώ το Γ είναι το **μέσο** του ΑΒ.



Σχήμα 15

Δύο σημεία Γ και Δ, που διαιρούν εσωτερικά και εξωτερικά το τμήμα ΑΒ στον ίδιο λόγο, λέγονται ***συζυγή αρμονικά*** των Α και Β (σχ.16).

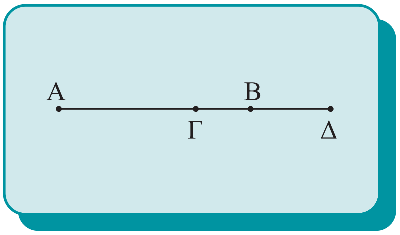
Δηλαδή τα Γ και Δ είναι συζυγή αρμονικά των Α και Β, αν τα τέσσερα σημεία είναι συνευθειακά και

$$\frac{ΓΑ}{ΓΒ}=\frac{ΔΑ}{ΔΒ}.$$

Από τη σχέση αυτή παίρνουμε την αναλογία

$$\frac{ΓΑ}{ΔΑ}=\frac{ΓΒ}{ΔΒ} \text{ ή } \frac{ΑΓ}{ΑΔ}=\frac{ΒΓ}{ΒΔ},$$

από την οποία προκύπτει ότι και τα Α και Β είναι συζυγή αρμονικά των Γ και Δ. Τα τέσσερα σημεία (Α,Β) και (Γ,Δ) λέμε ότι αποτελούν ***αρμονική τετράδα***.



Σχήμα 16

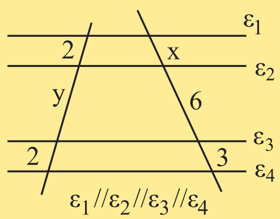
Σημείωση

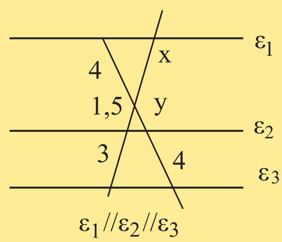
*Το Δ λέγεται **αρμονικό συζυγές** του Γ ως προς τα Α και Β. Όπως είδαμε παραπάνω, αν το Γ είναι το μέσο του ΑΒ, το Δ **δεν** υπάρχει.*

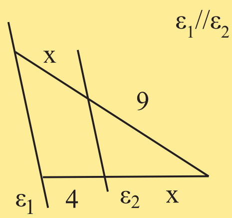
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

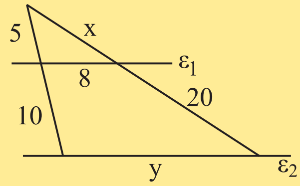
Ερωτήσεις Κατανόησης

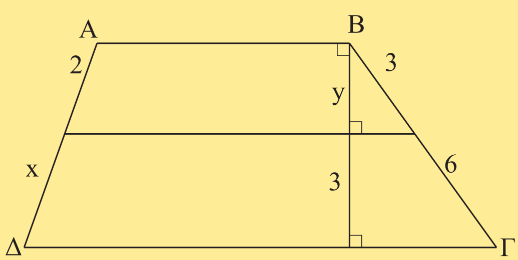
1. *Στα παρακάτω σχήματα να βρείτε τα x και y.*



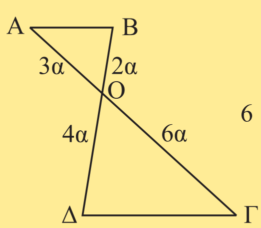


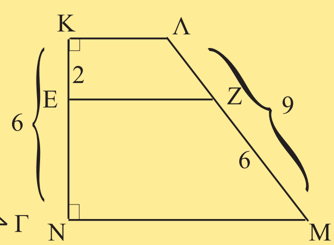






2. *Να δικαιολογήσετε γιατί ΑΒ//ΓΔ και ΕΖ//ΚΛ//ΜΝ στα παρακάτω σχήματα.*



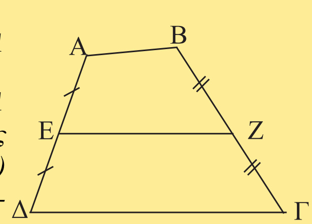


3. *Στο διπλανό σχήμα είναι:*

i) $\dfrac{AE}{E\Delta} = \dfrac{BZ}{Z\Gamma}$ *Σ*   *Λ*

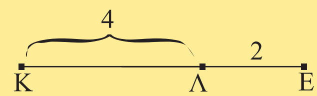
ii) ΕΖ//ΓΔ   *Σ*   *Λ*

Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις προηγούμενες σχέσεις και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



4. *Δίνεται τμήμα ΑΒ και δυο σημεία Γ και Δ ώστε* $\dfrac{\Gamma A}{\Gamma B} = \dfrac{\Delta A}{\Delta B}$*. Αρκεί η προηγούμενη σχέση ώστε τα Γ και Δ να είναι συζυγή αρμονικά των Α και Β;*

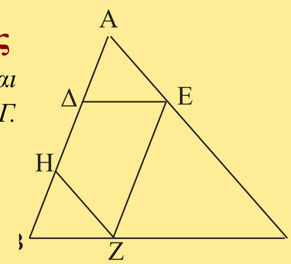
5. *Στο παρακάτω σχήμα είναι ΚΛ = 4, ΛΕ = 2. Να βρεθεί σημείο Ζ τέτοιο, ώστε τα σημεία (Ζ,Ε) να είναι συζυγή αρμονικά των (Κ,Λ).*



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Στο διπλανό σχήμα είναι ΔΕ//ΒΓ, ΕΖ//ΑΒ και ΖΗ//ΑΓ. Να αποδείξετε ότι*

$$\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{HB}{HA}.$$



2. *Από την κορυφή Α παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρουμε ευθεία ε η οποία τέμνει τη διαγώνιο ΒΔ στο Ε, την πλευρά ΒΓ στο Ζ και την προέκταση της ΔΓ στο Η. Να αποδείξετε ότι*

i) $\dfrac{AZ}{AH} = \dfrac{AB}{\Delta H}$,   *ii)* $AE^2 = EA \cdot EH$.

3. *Οι μη παράλληλες πλευρές ΑΔ, ΒΓ τραπεζίου ΑΒΓΔ τέμνονται στο Ο. Η παράλληλη από το Β προς την ΑΓ τέμνει την ΑΔ στο Ε. Να αποδείξετε ότι το ΟΑ είναι μέσο ανάλογο των ΟΔ και ΟΕ.*

4. *Από σημείο Δ της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε την παράλληλη προς τη διάμεσό του ΑΜ, που τέμνει τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.*

Να αποδείξετε ότι $\dfrac{AE}{AZ} = \dfrac{AB}{A\Gamma}$.

5. *Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και σημείο Ε της διαγωνίου ΑΓ. Οι παράλληλες από το Ε προς τις ΒΓ, ΓΔ τέμνουν τις ΑΒ, ΑΔ στα Ζ και Η αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΖΗ//ΔΒ.*

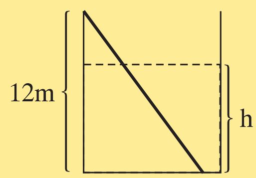
6. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ, Ε της πλευράς ΒΓ, ώστε* $B\Delta = \Gamma E < \dfrac{B\Gamma}{2}$*. Οι παράλληλες από τα Δ και Ε προς τις ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα τέμνουν την ΑΒ στο Ζ και την ΑΓ στο Η. Να αποδείξετε ότι ΖΗ//ΒΓ.*

7. *Από τυχαίο σημείο Κ της διαμέσου ΑΜ τριγώνου*

ΑΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις ΑΒ και ΑΓ, που τέμνουν τη ΒΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΜΔ = ΜΕ .

8. *Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και Ε το μέσο της μικρής βάσης ΑΒ. Αν η ΔΕ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και την προέκταση της ΓΒ στο Η, να αποδείξετε ότι τα Ζ, Η είναι συζυγή αρμονικά των Δ, Ε.*

9. *Δεξαμενή ύψους υ=12m περιέχει νερό που φτάνει σε ύψος h. Ράβδος μήκους 15m τοποθετείται στη δεξαμενή, όπως στο διπλανό σχήμα. Βγάζουμε τη ράβδο και παρατηρούμε ότι το τμήμα που βρέχτηκε έχει μήκος 10m. Μπορούμε να υπολογίσουμε το ύψος h του νερού;*



Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Αν τα Γ, Δ είναι συζυγή αρμονικά των Α, Β και Ο είναι το μέσο του ΑΒ, να αποδείξετε ότι τα Γ και Δ βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του Ο.*

2. *Να διαιρεθεί ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = α σε τμήματα x, y, ω τέτοια, ώστε 4x = 6y = 3ω.*

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) και έστω Δ η τομή της διαμέτρου ΑΕ με τη ΒΓ. Αν Ζ και Η είναι οι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΖΗ//ΒΓ.*

4. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Ε της ΔΒ τέτοιο, ώστε* $ΔΕ = \frac{1}{5}ΔΒ$. *Αν η ΓΕ τέμνει την ΑΔ στο Ζ, να αποδείξετε ότι ΑΖ = 3ΔΖ.*

5. *Από την κορυφή Β παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρουμε ευθεία ε, που τέμνει την πλευρά ΑΔ στο Ε και την προέκταση της ΓΔ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι*

$$\frac{ΔΑ}{ΔΕ} - \frac{ΔΓ}{ΔΖ} = 1.$$

6. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε της ΒΓ ώστε ΒΔ = ΔΕ = ΕΓ. Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει τη διάμεσο ΑΜ στο Κ. Να αποδείξετε ότι:*
i) Το Κ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.
ii) ΚΕ//ΑΓ.

7. *Τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) οι διαγώνιες ΑΓ, ΒΔ τέμνονται στο Ο. Από το Ο φέρουμε παράλληλες προς τις ΑΔ, ΒΓ που τέμνουν τη ΔΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΔΕ = ΓΖ.*

Σύνθετα θέματα

1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ώστε* $\frac{ΔΑ}{ΔΒ} = \frac{ΕΓ}{ΕΑ}$. *Να αποδείξετε ότι τα μέσα Κ, Λ, Μ των ΑΒ, ΑΓ και ΔΕ αντίστοιχα, είναι συνευθειακά σημεία.*

2. *Από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε τυχαία ευθεία, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Ζ και Η αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι*
ΖΑ · ΗΓ = ΗΑ · ΖΒ.

3. *Δίνεται ευθεία ε, τέσσερα διαδοχικά σημεία της Α, Γ, Β, Δ και σημείο Ο εκτός αυτής. Από το Β φέρουμε παράλληλη προς την ΟΑ, η οποία τέμνει τις ΟΓ, ΟΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα Γ, Δ είναι συζυγή αρμονικά των Α, Β, αν και μόνο αν ΒΕ = ΒΖ.*

4. *Αν ένα σημείο Δ χωρίζει εσωτερικά την πλευρά ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ σε λόγο λ και ένα σημείο Ε χωρίζει εσωτερικά το ΑΔ σε λόγο κ, να υπολογισθεί ο λόγος στον οποίο χωρίζει η ευθεία ΒΕ την πλευρά ΑΓ.*

5. *Η εφαπτομένη ενός κύκλου σε σημείο του Μ τέμνει τις εφαπτόμενες στα άκρα Α, Β μιάς διαμέτρου του ΑΒ, στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Αν Κ είναι το σημείο τομής των ΒΓ, ΑΔ, να αποδείξετε ότι ΜΚ⊥ΑΒ.*