Λυμένα προβλήματα

Πρόβλημα 1

Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει έναν αγωγό δίνεται από τη σχέση Ι = 10 + 2t (t σε s, I σε A).

α) Να γίνει η γραφική παράσταση Ι = f(t).

β) Να βρείτε το φορτίο που περνά από μια διατομή του αγωγού σε χρόνο 5s.

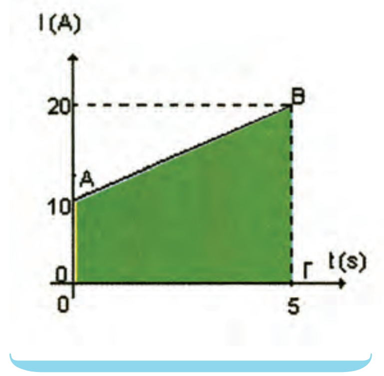
Λύση

α) Η εξίσωση Ι = f(t) είναι εξίσωση πρώτου βαθμού ως προς t. Επομένως, η γραφική της παράσταση είναι ευθεία.

Για t = 0 είναι Ι = 10A.

Για t = 5s είναι Ι = (10 + 2 · 5)A = 20A.

Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



β) Η ένταση Ι του ρεύματος δεν είναι σταθερή. Επομένως, δε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση q = I · t. Το φορτίο q που περνά από μια διατομή του αγωγού από t = 0 ως t = 5 s είναι ίσο αριθμητικά με το γραμμοσκιασμένο εμβαδό στη γραφική παράσταση Ι = f(t).

Άρα: $$q = \frac{1}{2}(10+20)5 \Rightarrow q = 75C$$

Πρόβλημα 2

Δύο αντιστάσεις R_1 = 6Ω και R_2 = 3Ω συνδέονται παράλληλα. Σε σειρά με το συνδυασμό των αντιστάσεων συνδέεται αντίσταση R_3 = 10Ω και παράλληλα με το σύστημα των τριών πρώτων αντιστάσεων συνδέεται αντίσταση R_4 = 4Ω. Στα άκρα της συνδεσμολογίας εφαρμόζεται τάση V = 36V. Να βρεθούν:

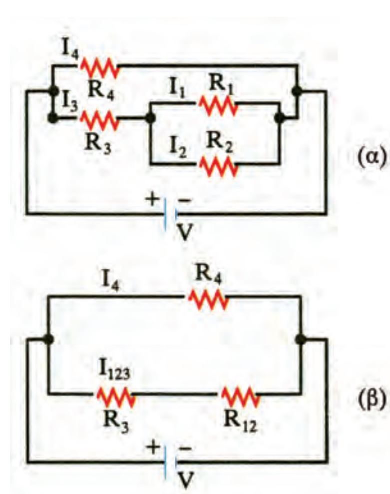
α) Η ισοδύναμη αντίσταση της συνδεσμολογίας.

β) Η τάση στα άκρα κάθε αντίστασης, η ένταση του ρεύματος που διαρρέει κάθε αντίσταση και η ένταση που διαρρέει την πηγή τροφοδοσίας.

Λύση

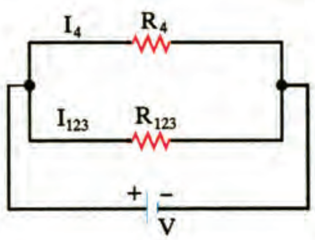
α) Οι αντιστάσεις R_1 και R_2 συνδέονται παράλληλα (σχ. α). Η ισοδύναμη αντίσταση R_{12} δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow R_{12} = 2\Omega$$

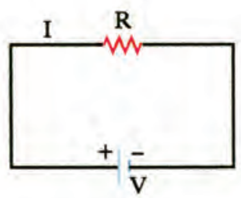


Οι αντιστάσεις R_{12} και R_3 συνδέονται σε σειρά (σχ. β). Η ισοδύναμη αντίσταση R_{123} είναι:

$$R_{123} = R_{12} + R_3 \Rightarrow R_{123} = 12\Omega$$



(γ)



(δ)

Οι αντιστάσεις R_{123} και R_4 συνδέονται παράλληλα (σχ. γ) οπότε η ισοδύναμη αντίσταση R δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{123}} + \frac{1}{R_4} \Rightarrow R = \frac{R_{123}R_4}{R_{123}+R_4} \Rightarrow R = 3\Omega$$

β) Η ένταση I του ρεύματος που διαρρέει την πηγή τροφοδοσίας και την ισοδύναμη αντίσταση R υπολογίζεται με τη βοήθεια του νόμου του Ohm στο κύκλωμα (δ).

$$I = \frac{V}{R} \Rightarrow I = \frac{36}{3}A = 12A$$

Οι αντιστάσεις R_{123} και R_4 έχουν κοινή τάση, που είναι ίση με την τάση τροφοδοσίας V. Από το νόμο του Ohm υπολογίζουμε τις εντάσεις I_4 και I_{123} (σχ. γ):

$$I_4 = \frac{V_4}{R_4} = \frac{V}{R_4} \Rightarrow I_4 = \frac{36}{4}A = 9A$$

και $I_{123} = \frac{V_{123}}{R_{123}} = \frac{V}{R_{123}} \Rightarrow I_{123} = \frac{36}{12}A = 3A$

Οι αντιστάσεις R_3 και R_{12} συνδέονται σε σειρά, οπότε διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα, που είναι ίσο με το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση R_{123} (σχ. β). Δηλαδή:

$$I_{123} = I_{12} = I_3 = 3A$$

Εφαρμόζοντας το νόμο του Ohm για τις αντιστάσεις R_3 και R_{12} βρίσκουμε:

$$I_3 = \frac{V_3}{R_3} \Rightarrow V_3 = I_3R_3 \Rightarrow V_3 = 3 \cdot 10V \Rightarrow V_3 = 30V$$

και $I_{12} = \frac{V_{12}}{R_{12}} \Rightarrow V_{12} = I_{12}R_{12} \Rightarrow V_{12} = 3 \cdot 2V \Rightarrow V_{12} = 6V$

Οι αντιστάσεις R_1 και R_2 συνδέονται παράλληλα, οπότε έχουν κοινή τάση, που είναι ίση με την τάση V_{12} (σχ. α):

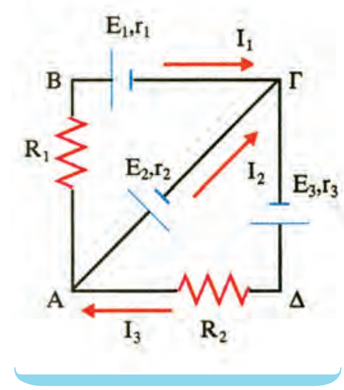
$$V_1 = V_2 = V_{12} = 6V$$

Εφαρμόζοντας το νόμο του Ohm για τις αντιστάσεις R_1 και R_2 βρίσκουμε:

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} \Rightarrow I_1 = \frac{6}{6}A \Rightarrow I_1 = 1A$$

$$I_2 = \frac{V_2}{R_2} \Rightarrow I_2 = \frac{6}{3}A \Rightarrow I_2 = 2A$$

Πρόβλημα 3



Δίνεται το διπλανό κύκλωμα. Οι τιμές των ΗΕΔ και των εσωτερικών αντιστάσεων των πηγών είναι $\mathcal{E}_1$ = 1V, $\mathcal{E}_2$ = 2V, $\mathcal{E}_3$ = 3V και **r_1 = 1Ω, r_2 = 0,5Ω, r_3 = 0,33Ω. Να βρεθούν τα ρεύματα που διαρρέουν κάθε κλάδο του κυκλώματος και η διαφορά δυναμικού $V_{ΑΓ}$.**

Λύση

Βρίσκουμε τους κόμβους και τους κλάδους στο κύκλωμα. Έχουμε τους κόμβους Α και Γ και τους κλάδους ΑΒΓ, ΑΓ και ΑΔΓ.

1) Σε κάθε κλάδο του κυκλώματος σημειώνουμε αυθαίρετα μια φορά έντασης ρεύματος.

2) Εφαρμόζουμε τον 1ο κανόνα του Kirchhoff για τον κόμβο Α. Έχουμε:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \quad (1)$$

3) Εφαρμόζουμε το 2ο κανόνα του Kirchhoff στους βρόχους ΑΒΓΑ και ΑΒΔΑ. Για το βρόχο ΓΒΑΓ:

$$\mathcal{E}_1 + I_1 r_1 + I_1 R_1 - \mathcal{E}_2 - I_2 r_2 = 0 \quad (2)$$

Για το βρόχο ΑΓΔΑ:

$$-\mathcal{E}_2 - I_2 r_2 + \mathcal{E}_3 - I_3 r_3 - I_3 R_2 = 0 \quad (3)$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1), (2), (3) οπότε προκύπτουν οι τιμές

$$I_1 = \frac{5}{8}A\,,\ I_2 = 0{,}5A\,,\ I_3 = \frac{8}{9}A$$

Οι τρεις εντάσεις είναι θετικές. Αυτό σημαίνει ότι οι φορείς που εκλέξαμε αυθαίρετα αρχικά είναι οι σωστές.

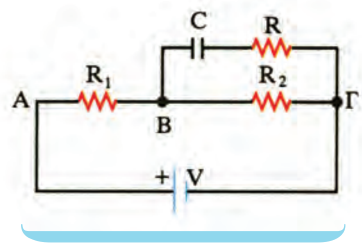
β) Η διαφορά δυναμικού $V_{ΑΓ}$ βρίσκεται ως εξής:

$$V_Α - \mathcal{E}_2 - I_2 r_2 = V_Γ \Rightarrow V_Α - V_Γ = \mathcal{E}_2 + I_2 r_2$$

$$V_Α - V_Γ = 2V + 0{,}5A \cdot 0{,}5Ω \Rightarrow V_{ΑΓ} = 2{,}25V$$

Πρόβλημα 4

Στο κύκλωμα του διπλανού σχήματος δίνονται R_1 = 2Ω, R_2 = 3Ω, V = 10V και C = 1μF. Να βρεθεί το φορτίο του πυκνωτή.



Λύση

Σε κύκλωμα συνεχούς ρεύματος, ο πυκνωτής λειτουργεί ως διακόπτης. Επομένως, το ρεύμα Ι δε διακλαδίζεται στο σημείο Β, διαρρέει τις R_1 και R_2 που συνδέονται σε σειρά, ενώ η R δε διαρρέεται από ρεύμα. Από το νόμο του Ohm έχουμε:

$$I = \frac{V}{R_{ολ}} \Rightarrow I = \frac{V}{R_1 + R_2} \Rightarrow I = 2A$$

Η τάση V_C στα άκρα του πυκνωτή είναι

$$V_C = V_{ΒΓ} = IR_2 \Rightarrow V_C = 6V$$

Άρα $q = CV_C \Rightarrow q = 6μCb$.

Πρόβλημα 5

Γεννήτρια με ΗΕΔ $\mathcal{E}$ = 100V και εσωτερική αντίσταση r = 2Ω συνδέεται μέσω αντίστασης R = 5Ω με κινητήρα εσωτερικής αντίστασης r′ = 3Ω. Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα, όταν ο κινητήρας στρέφεται είναι Ι = 5Α.

α) Να βρεθεί η ένταση I_1 του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα, όταν ο κινητήρας δε στρέφεται.

β) Όταν ο κινητήρας στρέφεται, να βρεθούν:
1. η ισχύς που παρέχει η γεννήτρια
2. η ισχύς που προσφέρεται στον κινητήρα
3. η θερμική ισχύς στον κινητήρα και στο κύκλωμα
4. η μηχανική ισχύς του κινητήρα

γ) Να βρεθεί ο συντελεστής απόδοσης του κινητήρα.

Λύση

α) Όταν ο κινητήρας δε στρέφεται, συμμετέχει στο κύκλωμα ως ωμική αντίσταση. Από το νόμο τον Ohm έχουμε:

$$\mathcal{E} = I_1 \cdot R_{ολ} \Rightarrow \mathcal{E} = I_1(R + r + r') \Rightarrow I_1 = 10A \qquad (1)$$

β) 1. Η ισχύς που παρέχει η γεννήτρια είναι:

$$P_{γεν} = \mathcal{E}I = 500W$$

2. Η ισχύς που προσφέρεται στον κινητήρα είναι:

$$P_κ = V \cdot I = [\mathcal{E} - I(R + r)]I \Rightarrow P_κ = 325W$$

3. Η θερμική ισχύς στον κινητήρα είναι:

$$P_{θ,κιν} = I^2 r' = 75W$$

Η θερμική ισχύς στο κύκλωμα είναι:

$$P_{\theta,o\lambda} = I^2 R_{o\lambda} = I^2 (r + r' + R) = 250\,W$$

4. Η μηχανική ισχύς του κινητήρα βρίσκεται ως εξής:

$$P_{\gamma\varepsilon\nu} = P_{\theta,o\lambda} + P_{\mu\eta\chi} \Rightarrow P_{\mu\eta\chi} = 500\,W - 250\,W = 250\,W$$

(ή $P_{\kappa} = P_{\mu\eta\chi} + P_{\theta,\kappa} \Rightarrow P_{\mu\eta\chi} = P_{\kappa} - P_{\theta,\kappa} = 325\,W - 75\,W = 250\,W$)

γ) Ο συντελεστής απόδοσης του κινητήρα είναι:

$$\alpha = \frac{P_{\omega\varphi}}{P_{\delta\alpha\pi}} \Rightarrow \alpha = \frac{P_{\mu\eta\chi}}{P_{\kappa}} \Rightarrow \alpha = \frac{250\,W}{325\,W} \Rightarrow \alpha = \frac{10}{13}$$