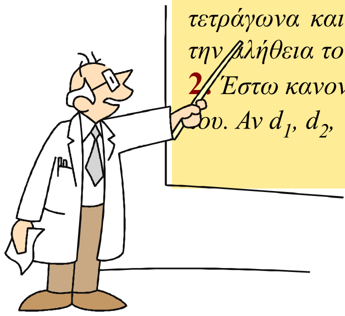


να καλύψουν το επίπεδο γύρω από ένα σημείο. Τα κανονικά αυτά πολύγωνα είναι τα ισόπλευρα τρίγωνα, τα τετράγωνα και τα κανονικά εξάγωνα. Να αποδείξετε την αλήθεια του ισχυρισμού αυτού των Πυθαγορείων.

2. *Έστω κανονικό ν-γωνο και σημείο Σ στο εσωτερικό του. Αν $d_1, d_2, \ldots, d_\nu$ είναι οι αποστάσεις του Σ από τις πλευρές του ν-γώνου, να αποδείξετε ότι*

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_\nu = \nu\alpha_\nu,$$

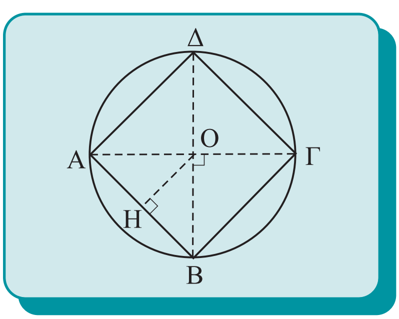
όπου α_ν το απόστημα του ν-γώνου.

3. *Σε κανονικό δεκάγωνο ΑΒΓΔ...Κ η πλευρά ΑΒ προεκτεινόμενη τέμνει την προέκταση της ακτίνας ΟΓ στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι ΑΜ=ΑΔ.*

11.3 Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και στοιχεία τους

Από την παρατήρηση της προηγούμενης παραγράφου προκύπτει ότι για να κατασκευάσουμε ένα κανονικό πολύγωνο με ν ($\nu \geq 3$) πλευρές, αρκεί να χωρίσουμε ένα κύκλο σε ν ίσα τόξα. Η κατασκευή με κανόνα και διαβήτη δεν είναι δυνατή για κάθε ν. (σχόλιο §11.2). Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με την εγγραφή μερικών βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και θα υπολογίσουμε τα στοιχεία τους.

• Τετράγωνο



Σχήμα 7

Έστω ένας κύκλος (Ο,R) (σχ.7). Αν φέρουμε δύο κάθετες διαμέτρους ΑΓ και ΒΔ, θα είναι $A\hat{O}B = B\hat{O}\Gamma = \Gamma\hat{O}\Delta = \Delta\hat{O}A = 90°$, οπότε $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{\Delta A}$ και επομένως το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο. Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος έχουμε

$$\lambda_4^2 = AB^2 = OA^2 + OB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2,$$

από την οποία προκύπτει ότι:

$$\boxed{\boldsymbol{\lambda_4 = R\sqrt{2}}}\,.$$

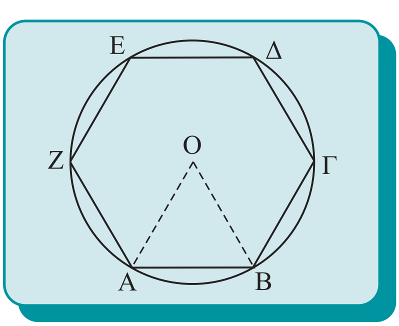
Από τη βασική σχέση $\alpha_\nu^2 + \dfrac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$ με $\nu = 4$ προκύπτει ότι

$$\alpha_4^2 = R^2 - \frac{(R\sqrt{2})^2}{4} = \frac{R^2}{2},$$

δηλαδή

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}}}\,.$$

• Κανονικό εξάγωνο



Σχήμα 8

Έστω κύκλος (Ο,R) και ΑΒ η πλευρά του κανονικού εξαγώνου που θέλουμε να εγγράψουμε στον (Ο,R) (σχ.8).

Τότε $A\hat{O}B = \omega_6 = 60°$ και επειδή ΟΑ = ΟΒ (=R) το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο. Άρα ΑΒ = ΟΑ = R, δηλαδή

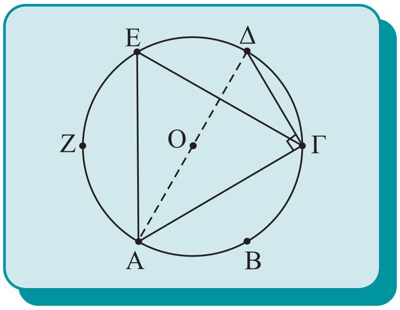
$$\boldsymbol{\lambda_6 = R}.$$

Έτσι για την εγγραφή κανονικού εξαγώνου σε κύκλο, παίρνουμε πάνω στον κύκλο έξι διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, $\overset{\frown}{\Delta E}$, $\overset{\frown}{EZ}$ και $\overset{\frown}{ZA}$ με αντίστοιχη χορδή R, το καθένα, οπότε το ΑΒΓΔΕΖ είναι κανονικό εξάγωνο. Επειδή $\lambda_6 = R$, από τη βασική σχέση $\alpha_6^2 + \frac{\lambda_6^2}{4} = R^2$ με αντικατάσταση του λ_6 προκύπτει ότι:

$$\alpha_6^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}, \text{ ή } \boldsymbol{\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}}.$$

- **Ισόπλευρο τρίγωνο**

Αν τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε και Ζ (σχ.9) διαιρούν τον κύκλο σε έξι ίσα τόξα, τότε τα σημεία Α, Γ, Ε είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου, αφού $\overset{\frown}{A\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma E} = \overset{\frown}{EA} = 120°$.
Επειδή $\overset{\frown}{A\Gamma\Delta} = 180°$, η ΑΔ είναι διάμετρος και επομένως το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο, οπότε



Σχήμα 9

$$\lambda_3^2 = A\Gamma^2 = A\Delta^2 - \Delta\Gamma^2 = (2R)^2 - R^2 = 3R^2,$$

δηλαδή $$\boldsymbol{\lambda_3 = R\sqrt{3}}.$$

Εφαρμόζοντας τώρα τη σχέση $\alpha_3^2 + \frac{\lambda_3^2}{4} = R^2$, προκύπτει ότι

$$\boldsymbol{\alpha_3 = \frac{R}{2}}.$$

Τα στοιχεία των παραπάνω πολυγώνων συγκεντρώνονται στον επόμενο πίνακα:

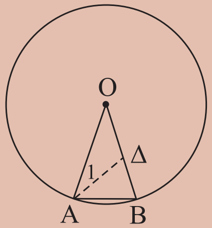
	Τετράγωνο	**Κανονικό εξάγωνο**	**Ισόπλευρο τρίγωνο**
Πλευρά λ_ν	$\lambda_4 = R\sqrt{2}$	$\lambda_6 = R$	$\lambda_3 = R\sqrt{3}$
Απόστημα α_ν	$\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$	$\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$	$\alpha_2 = \frac{R}{2}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Σε δοσμένο κύκλο να εγγραφεί κανονικό δεκάγωνο.

Λύση

Έστω $AB = \lambda_{10}$ (σχ.10) η πλευρά του κανονικού δεκαγώνου που θέλουμε να εγγράψουμε στον κύκλο (Ο,R). Η κεντρική γωνία



Σχήμα 10

$A\hat{O}B$ είναι $\dfrac{360°}{10} = 36°$ και καθεμία από τις γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΟΑΒ είναι $\hat{A} = \hat{B} = 72°$.

Έτσι, αν φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας $O\hat{A}B$ τα τρίγωνα ΔΟΑ και ΑΒΔ είναι ισοσκελή, αφού είναι

$$\Delta\hat{A}O = 36° = A\hat{O}B \quad \text{και} \quad A\hat{\Delta}B = \hat{A}_1 + \hat{O} = 36° + 36° = 72° = \hat{B}\,.$$

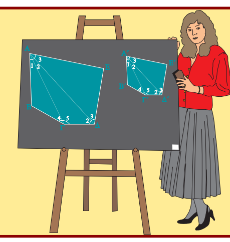
Επομένως, $O\Delta = A\Delta = AB = \lambda_{10}$ και $B\Delta = R - \lambda_{10}$.

Με εφαρμογή του θεωρήματος της διχοτόμου στο τρίγωνο ΟΑΒ προκύπτει ότι:

$$\frac{AB}{AO} = \frac{\Delta B}{\Delta O} \Leftrightarrow \frac{\lambda_{10}}{R} = \frac{R-\lambda_{10}}{\lambda_{10}} \Leftrightarrow \lambda^2_{10} = R(R-\lambda_{10})$$

και επειδή $\lambda_{10} = AB > \Delta B = R - \lambda_{10}$ (αφού $A\hat{\Delta}B > B\hat{A}\Delta$), η τελευταία ισότητα εκφράζει ότι το λ_{10} είναι το μεγαλύτερο από τα τμήματα που προκύπτουν αν διαιρέσουμε την ακτίνα R σε μέσο και άκρο λόγο. Για την κατασκευή του κανονικού δεκαγώνου του εγγεγραμμένου σε κύκλο , διαιρούμε την ακτίνα του κύκλου σε μέσο και άκρο λόγο και στη συνέχεια ορίζουμε τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, ..., που έχουν το καθένα χορδή ίση με το μεγαλύτερο τμήμα στα οποία χωρίζεται η ακτίνα με τη διαίρεσή της σε μέσο και άκρο λόγο.

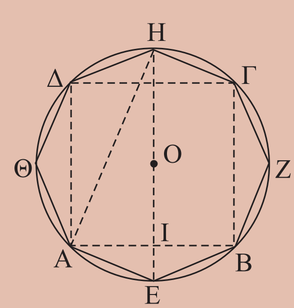
Δραστηριότητα



Να αποδειχθεί ότι $\lambda_{10} = \dfrac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$ *και να υπολογισθεί το* α_{10}.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Σε δοσμένο κύκλο, να εγγραφεί κανονικό οκτάγωνο και να υπολογισθούν η πλευρά του και το απόστημά του.



Σχήμα 11

Λύση

Εγγράφουμε στον κύκλο (σχ.11) το τετράγωνο ΑΒΓΔ και στη συνέχεια παίρνουμε τα μέσα Ε, Ζ, Η, Θ των τόξων που αντιστοιχούν στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ. Τότε το ΑΕΒ...Θ είναι το ζητούμενο οκτάγωνο. Αν θεωρήσουμε τη διάμετρο ΕΗ που αντιστοιχεί στο Ε, επειδή το τρίγωνο ΑΗΕ είναι ορθογώνιο και η ΑΒ κάθετη στην ΕΗ, έχουμε

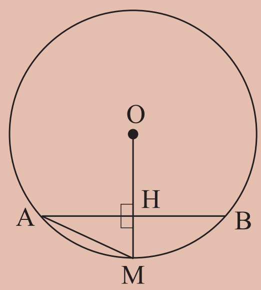
$AE^2 = EH \cdot EI = 2R\,(R - OI)$ και τελικά, αφού $AE = \lambda_8$ και $OI = \alpha_4$, έχουμε:

$\lambda_8^2 = 2R\,(R - \alpha_4) = 2R\left(R - \dfrac{R\sqrt{2}}{2}\right) = R^2\,(2-\sqrt{2})$ και επομένως $\boxed{\boldsymbol{\lambda_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}}}$.

Τέλος, από τη σχέση $\alpha_8^2 + \dfrac{\lambda_8^2}{4} = R^2$ προκύπτει ότι $\boxed{\boldsymbol{\alpha_8 = \dfrac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η *Τύπος του Αρχιμήδη*

Ένα κανονικό ν–γωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Να εγγραφεί στον ίδιο κύκλο κανονικό 2ν – γωνο και να αποδειχθεί ότι $\lambda_{2\nu}^2 = 2R\,(R - \alpha_\nu)$.



Σχήμα 12

Λύση

Αν πάρουμε τα μέσα των τόξων που αντιστοιχούν στις πλευρές του κανονικού ν–γώνου, ο κύκλος διαιρείται σε 2ν ίσα τόξα. Έτσι προκύπτει το εγγεγραμμένο κανονικό πολύγωνο με 2ν πλευρές.

Έστω $AB = \lambda_\nu$ (σχ. 12) και Μ το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$. Τότε $AM = \lambda_{2\nu}$ και $OM \perp AB$. Επομένως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΗΜ έχουμε

$$AM^2 = AH^2 + HM^2 \text{ ή } \lambda_{2\nu}^2 = \left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2 + (R - \alpha_\nu)^2 = \frac{\lambda_\nu^2}{4} + R^2 + \alpha_\nu^2 - 2R\alpha_\nu \text{ ή } \lambda_{2\nu}^2 = 2R^2 - 2R\alpha_\nu$$

(αφού $\frac{\lambda_\nu^2}{4} + \alpha_\nu^2 = R^2$) ή $\boxed{\lambda_{2\nu}^2 = 2R(R - \alpha_\nu)}$.

ΣΧΟΛΙΟ

Από τη σχέση $\alpha_{2\nu}^2 + \frac{\lambda_{2\nu}^2}{4} = R^2$ *προκύπτει ότι* $\alpha_{2\nu}^2 = \frac{4R^2 - \lambda_{2\nu}^2}{4} = \frac{4R^2 - (2R^2 - 2R\alpha_\nu)}{4} = \frac{2R^2 + 2R\alpha_\nu}{4}$

ή $\boxed{\alpha_{2\nu}^2 = \frac{R}{2}(R + \alpha_\nu)}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Χαρακτηρίστε ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ) τις παρακάτω ισότητες, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.*

i) $\lambda_6^2 + \lambda_3^2 = \lambda_4^2$ Σ Λ

ii) $\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_6 = 3R(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$ Σ Λ

iii) $a_3 + a_4 + a_6 = \frac{R}{2}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$ Σ Λ

2. *Αν Α, Β, Γ, Δ διαδοχικά σημεία κύκλου (Ο, R), ώστε* $AB = R\sqrt{2}$, $B\Gamma = \lambda_{12}$ *και* $\Gamma\Delta = R$, *να εξηγήσετε γιατί η ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου.*

3. *Αν Α, Β, Γ διαδοχικά σημεία κύκλου (Ο, R), ώστε* $\overset{\frown}{AB} = 120°$ *και* $\overset{\frown}{B\Gamma} = 60°$, *η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι:*

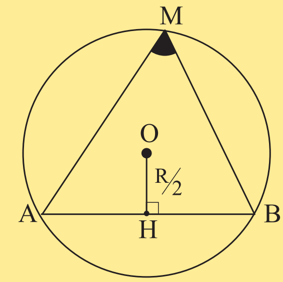
α. $(3 + \sqrt{3})R$, *β.* $4R$, *γ.* $(\sqrt{2} + \sqrt{3})R$, *δ.* $(3 + \sqrt{2})R$.

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

4. *Στο παρακάτω σχήμα η γωνία Μ είναι:*

α. 30° *β.* 45° *γ.* 50° *δ.* 60° *ε.* 75°

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R το εμβαδόν ενός ισόπλευρου τριγώνου, ενός τετραγώνου και ενός* *κανονικού εξαγώνου, που είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο (O,R).*

2. *Κανονικό πολύγωνο έχει ακτίνα $R = 10cm$ και απόστημα $\alpha_\nu = 5\sqrt{3}cm$. Να βρεθεί η πλευρά του λ_ν και το εμβαδόν του E_ν.*

3. *Κανονικό πολύγωνο έχει ακτίνα $R = 8cm$ και πλευρά $\lambda_\nu = 8\sqrt{2}cm$. Να βρεθεί το απόστημά του α_ν και το εμβαδόν του.*

4. *Σε κύκλο (O,R) παίρνουμε διαδοχικά τα τόξα $\overset{\frown}{AB} = 60°$, $\overset{\frown}{B\Gamma} = 90°$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 120°$. Να υπολογισθούν ως συνάρτηση του R οι πλευρές και το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Το άθροισμα των γωνιών ενός κανονικού πολυγώνου είναι 8 ορθές και το εμβαδόν του $6\sqrt{3}cm^2$. Να βρεθεί η ακτίνα του.*

2. *Σε κύκλο (O,R) και εκατέρωθεν του κέντρου του, θεωρούμε δύο παράλληλες χορδές του ΑΒ και ΓΔ, ώστε $AB = R$ και $\Gamma\Delta = R\sqrt{3}$. Να υπολογισθούν οι μη παράλληλες πλευρές ΑΓ και ΒΔ του τραπεζίου ΑΒΔΓ, το ύψος του και το εμβαδόν του, ως συνάρτηση του R.*

3. *Να υπολογιστούν ως συνάρτηση του R η πλευρά λ_{12} και το απόστημα α_{12} ενός κανονικού 12-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (O,R).*

4. *Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R το εμβαδόν ενός κανονικού δωδεκαγώνου, χωρίς να υπολογίσετε προηγουμένως την πλευρά και το απόστημά του.*

Σύνθετα Θέματα

1. *Δίνεται κύκλος (O,R) και χορδή του $\Gamma\Delta = \lambda_6$. Πάνω σε τυχαία ευθεία ε που διέρχεται από το κέντρο και εκατέρωθεν του O παίρνουμε σημεία Α, Β, ώστε $OA = OB = \alpha_3$. Αν Μ το μέσο της ΓΔ, να αποδείξετε ότι $MA^2+MB^2 = \lambda_4^2$.*

2. *Από το σημείο Α εκτός κύκλου (O,R) φέρουμε τέμνουσα ΑΒΓ, ώστε $AB = B\Gamma$. Αν $OA=R\sqrt{7}$ να αποδείξετε ότι $B\Gamma = \lambda_3$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΓ.*

3. *Σε κύκλο (O,R) θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ, ώστε $AB = \lambda_6$ και $B\Gamma = \lambda_3$. Αν Μ το μέσο της ΒΓ και Δ το σημείο που τέμνει η προέκταση της ΑΜ τον κύκλο, να υπολογίσετε, ως συνάρτηση του R, το τμήμα ΜΔ.*

Δραστηριότητες

1. *Ερμηνεύοντας σε "γεωμετρική γλώσσα" την αριθμητική ισότητα $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$, δώστε ένα τρόπο κατασκευής της πλευράς κανονικού 15-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο .*

2. *Κάνοντας το ίδιο για την αριθμητική ισότητα $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$,να δώσετε ένα δεύτερο τρόπο κατασκευής της πλευράς κανονικού 12-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο .*