4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Ευθεία παράλληλη προς τη ΒΓ, τέμνει την ΑΒ στο Δ και την ΑΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι* $(ΑΒΔ)^2 = (ΑΔΕ)(ΑΒΓ)$.

5. *Πάνω στις πλευρές κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε εξωτερικά αυτού τα τετράγωνα ΑΒΕΖ, ΒΓΗΘ, ΓΔΙΚ και ΑΔΛΜ. Να αποδείξετε ότι*

$$(ΑΜΖ) + (ΓΗΚ) = (ΒΘΕ) + (ΔΙΛ).$$

6. *Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ* ($\widehat{A} = 1\llcorner$) *και τρία πολύγωνα* P_1, P_2 *και* P_3 *όμοια μεταξύ τους, που έχουν ως ομόλογες πλευρές τις ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι* $(P_2)+(P_3)=(P_1)$, *όπου* (P_1), (P_2) *και* (P_3) *τα εμβαδά τους.*

Σύνθετα θέματα

1. *Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ και έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Αν* E_1, E_2, E_3 *και* E_4 *είναι τα εμβαδά των τριγώνων ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ και ΔΟΑ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι* $E_1 \cdot E_3 = E_2 \cdot E_4$. *Αν υποθέσουμε ότι η ΑΔ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ, τότε να αποδείξετε ότι*

i) $E_1 = E_3$, (ii) $E_1^2 = E_2 \cdot E_4$,

iii) $E_1 \leq \frac{1}{4} E$, *όπου* $E = (ΑΒΓΔ)$.

2. *Από εσωτερικό σημείο Σ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές του. Αν* E_1, E_2, E_3 *είναι τα εμβαδά των τριών τριγώνων που σχηματίζονται να αποδείξετε ότι*

i) *καθένα από τα τρίγωνα εμβαδών* E_1, E_2, E_3 *είναι όμοιο με το ΑΒΓ,*

ii) $\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2} + \sqrt{E_3} + = \sqrt{E}$, *όπου* $E = (ΑΒΓ)$.

3. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τις διχοτόμους ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Να αποδείξετε ότι*

i) $(ΔΕΖ) = \dfrac{2αβγ}{(α+β)(β+γ)(γ+α)\,(ΑΒΓ)}$,

ii) $(ΔΕΖ) \leq \frac{1}{4}(ΑΒΓ)$.

4. *Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Κ,Λ των πλευρών ΑΒ,ΑΓ αντίστοιχα. Από τα Κ,Λ να φέρετε δύο ευθείες που να χωρίζουν το τρίγωνο σε τρία ισοδύναμα μέρη.*

Το πρόβλημα του τετραγωνισμού κυρτού πολυγώνου

10.6 Μετασχηματισμός πολυγώνου σε ισοδύναμό του

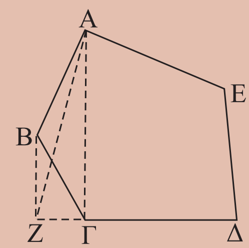
Σε πολλές περιπτώσεις, για τον υπολογισμό του εμβαδού ενός ευθύγραμμου σχήματος επιδιώκουμε τον μετασχηματισμό σε ένα ισοδύναμο τετράγωνο. Η κατασκευή ενός τετραγώνου ισοδύναμου με ένα πολύγωνο λέγεται ***τετραγωνισμός*** αυτού. Η λύση των επόμενων δύο προβλημάτων αποτελεί τη μέθοδο κατασκευής του ισοδύναμου τετραγώνου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να μετασχηματισθεί πολύγωνο σε άλλο ισοδύναμό του με μια πλευρά λιγότερη.

Λύση

Ας θεωρήσουμε ένα πολύγωνο, π.χ. ένα πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ (σχ. 25) Από την κορυφή Α φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ, που αφήνει προς το ένα μέρος της μόνο μια κορυφή, τη Β. Από το Β φέρουμε την παράλληλο προς την ΑΓ, η οποία τέμνει την ευθεία ΔΓ στο Ζ. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΖΓ έχουν κοινή βάση ΑΓ και τα αντίστοιχα προς αυτή ύψη ίσα, αφού ΒΖ // ΑΓ. Επομένως, (ΑΒΓ) = (ΑΖΓ), οπότε



Σχήμα 25

(ΑΒΓΔΕ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔΕ) = (ΑΖΓ) + (ΑΓΔΕ) = (ΑΖΔΕ)

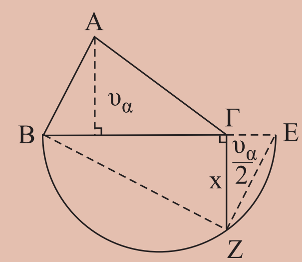
δηλαδή το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ είναι ισοδύναμο με το τετράπλευρο ΑΖΔΕ και επομένως το αρχικό μας πολύγωνο είναι ισοδύναμο με πολύγωνο που έχει μια πλευρά λιγότερη.
Αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία στο τετράπλευρο ΑΖΔΕ, θα μετασχηματισθεί σε ισοδύναμο τρίγωνο. Έτσι, το αρχικό μας πολύγωνο μπορεί να μετασχηματισθεί σε ισοδύναμο τρίγωνο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να μετασχηματισθεί τρίγωνο σε ισοδύναμο τετράγωνο.

Λύση

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος που αντιστοιχεί στη ΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ προς το Γ παίρνουμε τμήμα $ΓΕ = \frac{υ_α}{2}$ και γράφουμε ημικύκλιο διαμέτρου ΒΕ. Φέρουμε την κάθετο της ΒΓ στο Γ, η οποία τέμνει το ημικύκλιο σε σημείο Ζ. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΖΒΕ έχουμε:



Σχήμα 26

$$ΓΖ^2 = ΒΓ \cdot ΓΕ = α \cdot \frac{υ_α}{2} = \frac{1}{2} αυ_α = (ΑΒΓ),$$

οπότε συμπεραίνουμε ότι το τμήμα ΓΖ είναι η πλευρά x του ζητούμενου τετραγώνου, που είναι ισοδύναμο με το τρίγωνο ΑΒΓ.

ΣΧΟΛΙΟ

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι κάθε κυρτό πολύγωνο τετραγωνίζεται, αφού με πεπερασμένου πλήθους επαναλήψεις της διαδικασίας του προβλήματος 1 και τέλος της διαδικασίας του προβλήματος 2 κατασκευάζεται τετράγωνο ισοδύναμο προς το αρχικό πολύγωνο. Ισχύει το ίδιο συμπέρασμα για μη ευθύγραμμα επίπεδα σχήματα; Η απάντηση θα δοθεί στο επόμενο κεφάλαιο (§11.8).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Τι λέγεται τετραγωνισμός ενός πολυγώνου;*

2. *Πώς μετασχηματίζεται ένα ορθογώνιο σε ισοδύναμο τρίγωνο;*

3. *Πώς μετασχηματίζεται ένα παραλληλόγραμμο σε ισοδύναμο τρίγωνο;*

4. *Πώς μετασχηματίζεται ένα τραπέζιο σε ισοδύναμο τετράγωνο;*

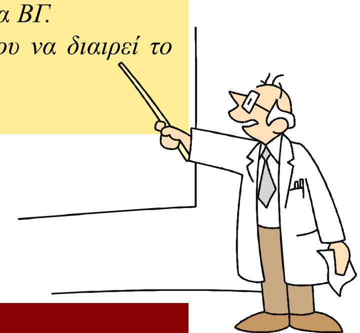
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να κατασκευασθεί τετράγωνο ισοδύναμο με δοσμένο ορθογώνιο πλευρών α,β.*

2. *Να κατασκευασθεί τετράγωνο ισοδύναμο με το άθροισμα δύο τετραγώνων πλευρών α,β αντίστοιχα.*

3. *Δοσμένο κυρτό τετράπλευρο να διαιρεθεί σε δύο ισοδύναμα μέρη με ευθεία που να διέρχεται από μια κορυφή του.*

4. *Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και σημείο Κ της πλευράς του ΑΔ.*
i) Να μετασχηματισθεί το ΑΒΓΔ σε ισοδύναμό του τρίγωνο του οποίου μια κορυφή να είναι το Κ και οι άλλες να βρίσκονται πάνω στην ευθεία ΒΓ.
ii) Να αχθεί από το Κ μια ευθεία που να διαιρεί το τετράπλευρο σε δύο ισοδύναμα μέρη.



ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε//ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:*
i) (ΒΔΕ) = (ΓΔΕ), ii) (ΒΑΕ) = (ΓΑΔ),
iii) (ΒΑΕ) + (ΓΑΔ) = (ΑΒΓ), με την επιπλέον υπόθεση ότι τα Δ, Ε είναι μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα.

2. *Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της πλευράς του ΒΓ, ώστε* $B\Delta = \frac{\lambda}{\lambda^2+4}B\Gamma$, $\lambda > 0$. *Να αποδείξετε ότι:*

i) $(AB\Delta) = \frac{\lambda}{\lambda^2+4}(AB\Gamma)$, *ii)* $(AB\Delta) \leq \frac{1}{4}(AB\Gamma)$,

iii) $(A\Gamma\Delta) \geq \frac{3}{4}(AB\Gamma)$.

3. *Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Με τη θεωρία του εμβαδού να αποδείξετε ότι* $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$ *(Θεώρημα διχοτόμου).*

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με β = 3γ, ΑΔ μία διχοτόμος του και ΒΕ μία διάμεσός του. Να αποδείξετε ότι:*

i) $(AB\Delta) = \frac{1}{3}(A\Delta\Gamma)$,

ii) $(AB\Delta)\cdot(\Delta E\Gamma) = (A\Delta\Gamma)\cdot(BE\Delta)$,

iii) $(\Delta E\Gamma) = \frac{3}{8}(AB\Gamma)$.

5. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 6cm και* $\hat{A} = 120°$.
i) Να βρεθεί το εμβαδόν του,

ii) Αν Ε είναι σημείο της ΑΓ τέτοιο, ώστε $AE = \frac{1}{3}A\Gamma$ *και ΑΔ το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΓ.*
iii) Αν η παράλληλη από το Α προς τη ΒΓ τέμνει την προέκταση της ΔΕ στο Ζ, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΕΖ.

6. *Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ||ΒΓ) και τα μέσα Κ, Λ των ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:*
i) (ΑΒΛΚ) = (ΚΛΓΔ),
ii) (ΜΑΒ) = (ΜΓΔ), για οποιοδήποτε σημείο Μ του ΚΛ.

7. *Θεωρούμε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ* ($\hat{A} = 1\llcorner$) *με ΑΒ = γ. Διαιρούμε την πλευρά ΑΒ σε ν ίσα τμήματα (ν φυσικός, ν ≥ 2) και από τα σημεία διαίρεσης φέρουμε παράλληλες προς την ΑΓ.*
i) Να υπολογισθούν ως συνάρτηση του γ τα εμβαδά των ν σχημάτων στα οποία διαιρέθηκε το τρίγωνο ΑΒΓ.
ii) Χρησιμοποιώντας το (i) να αποδείξετε ότι

$$1 + 3 + 5 + ... + (2\nu - 1) = \nu^2.$$

8. *Δύο τετράγωνα ΑΒΓΔ και ΔΕΖΗ έχουν κοινή την κορυφή Δ και εμβαδόν 36 το καθένα. Αν οι πλευρές ΒΓ και ΕΖ έχουν κοινό μέσο Μ, να βρεθεί το εμβαδόν του σχήματος ΑΒΜΖΗΔ.*