Ασκήσεις Αποδεικτικές

1. *Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει* $\beta\gamma = \alpha\upsilon_\alpha$ *να αποδείξετε ότι* $\hat{A} = 1\llcorner$.

2. *Αν Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ, να αποδείξετε ότι:*

i) $E<\tau(\tau-\alpha) \Leftrightarrow A < 1\llcorner$,

ii) $E = \tau(\tau-\alpha) \Leftrightarrow A = 1\llcorner$,

iii) $E>\tau(\tau-\alpha) \Leftrightarrow A > 1\llcorner$.

3. *Αν δυο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο να αποδείξετε ότι*

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha'\beta'\gamma'}.$$

4. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ με* $\hat{A} \neq 1\llcorner$ *φέρουμε τα ύψη ΒΖ και ΓΗ. Να αποδείξετε ότι* $(AZH)=(AB\Gamma)\sigma\upsilon\nu^2 A$.

5. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι:*

$$\frac{1}{\upsilon_\alpha} + \frac{1}{\upsilon_\beta} + \frac{1}{\upsilon_\gamma} = \frac{1}{\rho}.$$

Σύνθετα θέματα

1. *i) Δίνεται γωνία* $x\hat{O}y$ *και σταθερό σημείο Κ στο εσωτερικό αυτής. Από το Κ φέρουμε μεταβλητή ευθεία ε που τέμνει τις πλευρές Οx, Oy στα σημεία Μ, Ν αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα*

$$\frac{1}{(OKM)} + \frac{1}{(OKN)}$$ *είναι σταθερό.*

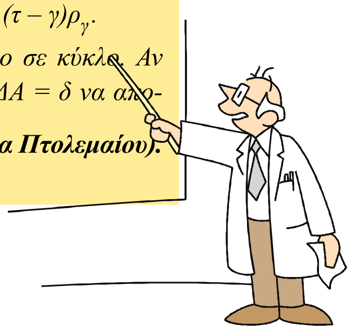
ii) Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ, σημείο Κ στο εσωτερικό του και τα τμήματα ΑΑ΄, ΒΒ΄ και ΓΓ΄ που διέρχονται από το Κ. Αν $E_1, E_2, \ldots, E_6$ *είναι αντίστοιχα τα εμβαδά των τριγώνων ΑΚΓ΄, ΒΚΓ΄, ΒΑ΄Κ, ΓΚΑ΄, ΓΚΒ΄ και ΑΚΒ΄, να αποδείξετε ότι:*

$$\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_3} + \frac{1}{E_5} = \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_4} + \frac{1}{E_6}.$$

2. *Αν* $\rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma$ *είναι οι ακτίνες των παρεγγεγραμμένων κύκλων τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι*

$$(AB\Gamma) = (\tau-\alpha)\rho_\alpha = (\tau-\beta)\rho_\beta = (\tau-\gamma)\rho_\gamma.$$

3. *Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ εγγράψιμο σε κύκλο. Αν θέσουμε ΑΒ = α, ΒΓ = β, ΓΔ = γ και ΔΑ = δ να αποδείξετε ότι* $\frac{A\Gamma}{B\Delta} = \frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\alpha\beta+\gamma\delta}$ ***(2ο Θεώρημα Πτολεμαίου).***



Εμβαδόν και ομοιότητα

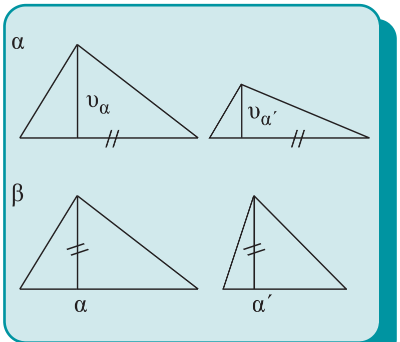
10.5 Λόγος εμβαδών όμοιων τριγώνων - πολυγώνων

Ας θεωρήσουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ με εμβαδά Ε και Ε΄ αντίστοιχα. Τότε είναι $E = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha$ και $E' = \frac{1}{2}\alpha'\upsilon_{\alpha'}$, οπότε $\frac{E}{E'} = \frac{\alpha\upsilon_\alpha}{\alpha'\upsilon_{\alpha'}}$. Από την ισότητα αυτή προκύπτει άμεσα ότι:

- Αν α = α΄, τότε $\frac{E}{E'} = \frac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_{\alpha'}}$ (σχ.19α).
- Αν $\upsilon_\alpha = \upsilon_{\alpha'}$, τότε $\frac{E}{E'} = \frac{\alpha}{\alpha'}$ (σχ.19β).

Δηλαδή: **αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών, ενώ αν έχουν ίσα ύψη, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων**.

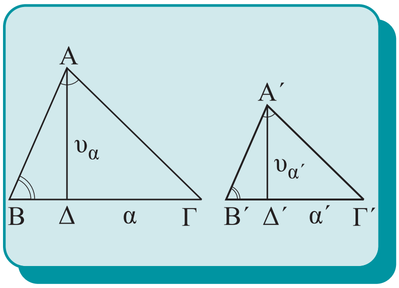
Στην περίπτωση που τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι όμοια, ισχύει το επόμενο θεώρημα.



Σχήμα 19

Θεώρημα Ι

Αν δυο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.



Σχήμα 20

Απόδειξη

Έστω δύο όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ (σχ. 20) με

$$\hat{A} = \hat{A}' \quad \text{και} \quad \hat{B} = \hat{B}'.$$

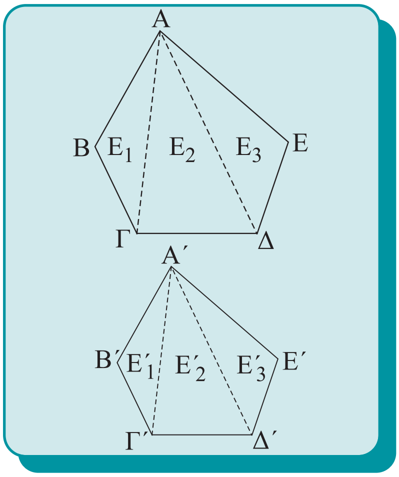
Τότε $\dfrac{\alpha}{\alpha'} = \dfrac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_{\alpha'}} = \lambda$ (1), όπου λ ο λόγος ομοιότητας. Αλλά, όπως και παραπάνω, είναι $\dfrac{E}{E'} = \dfrac{\alpha}{\alpha'} \cdot \dfrac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_{\alpha'}}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\dfrac{E}{E'} = \lambda^2$.

Το παραπάνω συμπέρασμα ισχύει γενικότερα και για όμοια πολύγωνα, όπως μας βεβαιώνει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα ΙΙ

Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.



Σχήμα 21

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε δυο όμοια πολύγωνα π.χ. τα πεντάγωνα ΑΒΓΔΕ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ (σχ. 21) με λόγο ομοιότητας:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta' E'} = \lambda \quad (1).$$

Φέρουμε τις διαγωνίους των πολυγώνων από τις κορυφές Α και Α΄, οπότε αυτά χωρίζονται σε ισάριθμα τρίγωνα όμοια μεταξύ τους.

Αν E_1, E_2, E_3 και E'_1, E'_2, E'_3 είναι τα εμβαδά των αντίστοιχων τριγώνων, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα και τη σχέση (1), θα έχουμε:

$$\frac{E_1}{E'_1} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2 = \lambda^2, \ \frac{E_2}{E'_2} = \left(\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}\right)^2 = \lambda^2 \quad \text{και}$$

$$\frac{E_3}{E'_3} = \left(\frac{\Delta E}{\Delta' E'}\right)^2 = \lambda^2,$$

οπότε:

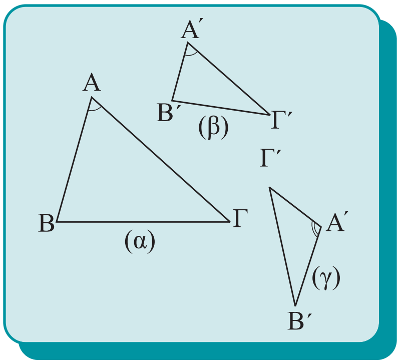
$$\lambda^2 = \frac{E_1}{E'_1} = \frac{E_2}{E'_2} = \frac{E_3}{E'_3} = \frac{E_1 + E_2 + E_3}{E'_1 + E'_2 + E'_3} = \frac{(AB\Gamma\Delta E)}{(A'B'\Gamma'\Delta'E')},$$

δηλαδή το ζητούμενο.

Για το λόγο των εμβαδών τριγώνων με δύο γωνίες ίσες ή παραπληρωματικές ισχύει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα III

Αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.



Σχήμα 22

Απόδειξη

Θεωρούμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ με $\hat{A} = \hat{A}'$ (σχ.22 α,β) ή $\hat{A} + \hat{A}' = 180°$ (σχ.22 α,γ). Τότε και στις δύο περιπτώσεις θα ισχύει ημΑ = ημΑ΄, οπότε από τις ισότητες

$$E = \frac{1}{2}\beta \cdot \gamma ημA \text{ και } E' = \frac{1}{2}\beta' \cdot \gamma' ημA'$$

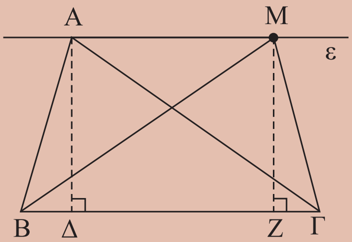
με διαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι $\dfrac{E}{E'} = \dfrac{\beta \cdot \gamma}{\beta' \cdot \gamma'}$, που είναι το ζητούμενο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ. Αν Μ σημείο της ε, να αποδείξετε ότι (ΜΒΓ) = (ΑΒΓ).

Απόδειξη

Φέρουμε τα ύψη ΑΔ και ΜΖ των τριγώνων ΑΒΓ και ΜΒΓ αντίστοιχα. Επειδή η ε είναι παράλληλη προς τη ΒΓ, προκύπτει ότι ΑΔ = ΜΖ και επομένως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΜΒΓ είναι ισεμβαδικά, επειδή έχουν κοινή βάση ΒΓ και ίσα ύψη.



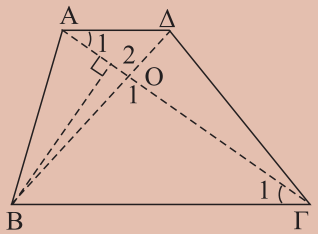
Σχήμα 23

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΒΓ και ΑΔ και έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Να αποδείξετε ότι:

(i) (ΟΑΒ) = (ΟΓΔ), **(ii)** $\dfrac{(ΑΟΔ)}{(ΟΒΓ)} = \dfrac{ΑΔ^2}{ΒΓ^2}$ **και**

(iii) $\dfrac{(ΟΑΒ)}{(ΟΒΓ)} = \dfrac{ΑΔ}{ΒΓ}$.



Σχήμα 24

Απόδειξη

(i) Είναι (ΟΑΒ) = (ΒΑΔ) – (ΟΑΔ) = (ΑΓΔ) – (ΟΑΔ) = (ΟΓΔ).

(ii) Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΓ είναι όμοια ($\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, $\hat{\Gamma}_1 = \hat{A}_1$) με λόγο ομοιότητας $\frac{A\Delta}{B\Gamma}$ και επομένως $\frac{(OA\Delta)}{(OB\Gamma)} = \frac{A\Delta^2}{B\Gamma^2}$.

(iii) Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΒΓ έχουν κοινή κορυφή Β και κοινό το ύψος από αυτήν, επομένως $\frac{(OAB)}{(OB\Gamma)} = \frac{OA}{O\Gamma}$. Από την ομοιότητα όμως των τριγώνων ΟΑΔ και ΟΒΓ έχουμε ότι $\frac{OA}{O\Gamma} = \frac{A\Delta}{B\Gamma}$, οπότε $\frac{(OAB)}{(OB\Gamma)} = \frac{A\Delta}{B\Gamma}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Δυο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν* $\upsilon_\beta = \upsilon_{\beta'}$ *και* $\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{3}{2}$. *Τότε ο λόγος* $\frac{\beta}{\beta'}$ *είναι*

Α: $\frac{2}{5}$ Β: $\frac{3}{4}$ Γ: $\frac{3}{2}$ Δ: $\frac{9}{4}$ Ε: $\frac{4}{9}$

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2. *Δυο ρόμβοι ΑΒΓΔ και Α'Β'Γ'Δ' έχουν* $\hat{A} = \hat{A}'$ *και* $\frac{AB}{A'B'} = \frac{4}{5}$. *Να υπολογισθεί ο λόγος* $\frac{(AB\Gamma\Delta)}{(A'B'\Gamma'\Delta')}$.

3. *Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) είναι ισοδύναμο με ένα τρίγωνο Α'Β'Γ' που έχει* $A'B' \cdot A'\Gamma' = 36$. *Αν είναι* $A + A' = 2\llcorner$, *ποιο είναι το μήκος των ίσων πλευρών του ισοσκελούς;*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Δυο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν* $\alpha = \alpha'$ *και* $\upsilon_\alpha = \frac{3}{2}\upsilon_{\alpha'}$. *Αν το εμβαδόν του ΑΒΓ είναι* $30m^2$, *να βρείτε το εμβαδόν του Α'Β'Γ'.*

2. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με εμβαδόν* $20m^2$. *Αν Μ σημείο στην προέκταση της ΑΒ τέτοιο ώστε ΑΒ = 2ΒΜ, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΒΓ.*

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ζ των προεκτάσεων των ΒΑ και ΓΑ αντίστοιχα, προς το Α, ώστε* $A\Delta = \frac{2}{3}AB$ *και* $AZ = \frac{1}{2}A\Gamma$. *Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι* $30m^2$, *να βρείτε το εμβαδόν του ΑΔΖ.*

4. *Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδόν* $75m^2$. *Έστω Δ σημείο της πλευράς ΒΓ και Μ σημείο του ΑΔ τέτοιο, ώστε* $\frac{AM}{M\Delta} = \frac{3}{2}$. *Από το Μ φέρουμε παράλληλο προς την πλευρά ΒΓ, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου ΒΕΖΓ.*

5. *Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν* $\hat{A} = \hat{A}'$ *και* $\hat{B} + \hat{B}' = 2\llcorner$. *Να αποδείξετε ότι* $\alpha\beta' = \alpha'\beta$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και εσωτερικό του σημείο Ρ. Αν οι ΑΡ, ΒΡ και ΓΡ τέμνουν τις ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ στα Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:*

i) $\frac{P\Delta}{A\Delta} = \frac{(BP\Gamma)}{(AB\Gamma)}$, ii) $\frac{P\Delta}{A\Delta} + \frac{PE}{BE} + \frac{PZ}{\Gamma Z} = 1$ *και*

iii) $\frac{PA}{A\Delta} + \frac{PB}{BE} + \frac{P\Gamma}{\Gamma Z} = 2$.

2. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με* $\hat{B}, \hat{\Gamma} < 1\llcorner$ *και το ύψος του ΑΔ. Στο ημιεπίπεδο (ΒΓ, Α) φέρουμε* $Bx \perp B\Gamma$ *και* $\Gamma y \perp B\Gamma$. *Πάνω στις Bx, Γy παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Ε και Ζ, ώστε να είναι ΒΕ = ΓΖ = 2ΑΔ. Αν Μ, Ν είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι*

$$(EBM)+(Z\Gamma N)=2(AB\Gamma).$$

3. *Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και δυο κάθετες χορδές ΑΒ και ΓΔ. Να αποδείξετε ότι (ΒΟΔ) = (ΑΟΓ).*

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Ευθεία παράλληλη προς τη ΒΓ, τέμνει την ΑΒ στο Δ και την ΑΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι $(ΑΒΔ)^2 = (ΑΔΕ)(ΑΒΓ)$.*

5. *Πάνω στις πλευρές κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε εξωτερικά αυτού τα τετράγωνα ΑΒΕΖ, ΒΓΗΘ, ΓΔΙΚ και ΔΑΛΜ. Να αποδείξετε ότι*

$$(ΑΜΖ) + (ΓΗΚ) = (ΒΘΕ) + (ΔΙΛ).$$

6. *Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 1∟$) και τρία πολύγωνα P_1, P_2 και P_3 όμοια μεταξύ τους, που έχουν ως ομόλογες πλευρές τις ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $(P_2)+(P_3)=(P_1)$, όπου (P_1), (P_2) και (P_3) τα εμβαδά τους.*

Σύνθετα θέματα

1. *Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ και έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Αν E_1, E_2, E_3 και E_4 είναι τα εμβαδά των τριγώνων ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ και ΔΟΑ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $E_1 \cdot E_3 = E_2 \cdot E_4$. Αν υποθέσουμε ότι η ΑΔ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ, τότε να αποδείξετε ότι*

i) $E_1 = E_3$, *(ii)* $E_1^2 = E_2 \cdot E_4$,

iii) $E_1 \leq \frac{1}{4} E$, *όπου* $E = (ΑΒΓΔ)$.

2. *Από εσωτερικό σημείο Σ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές του. Αν E_1, E_2, E_3 είναι τα εμβαδά των τριών τριγώνων που σχηματίζονται να αποδείξετε ότι*

i) καθένα από τα τρίγωνα εμβαδών E_1, E_2, E_3 είναι όμοιο με το ΑΒΓ,

ii) $\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2} + \sqrt{E_3} + = \sqrt{E}$, *όπου* $E = (ΑΒΓ)$.

3. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τις διχοτόμους ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Να αποδείξετε ότι*

i) $(ΔΕΖ) = \dfrac{2αβγ}{(α + β)(β + γ)(γ + α)(ΑΒΓ)}$,

ii) $(ΔΕΖ) \leq \frac{1}{4}(ΑΒΓ)$.

4. *Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Κ,Λ των πλευρών ΑΒ,ΑΓ αντίστοιχα. Από τα Κ,Λ να φέρετε δύο ευθείες που να χωρίζουν το τρίγωνο σε τρία ισοδύναμα μέρη.*

Το πρόβλημα του τετραγωνισμού κυρτού πολυγώνου

10.6 Μετασχηματισμός πολυγώνου σε ισοδύναμό του

Σε πολλές περιπτώσεις, για τον υπολογισμό του εμβαδού ενός ευθύγραμμου σχήματος επιδιώκουμε τον μετασχηματισμό σε ένα ισοδύναμο τετράγωνο. Η κατασκευή ενός τετραγώνου ισοδύναμου με ένα πολύγωνο λέγεται ***τετραγωνισμός*** αυτού. Η λύση των επόμενων δύο προβλημάτων αποτελεί τη μέθοδο κατασκευής του ισοδύναμου τετραγώνου.