πλευρές του επί την απόσταση του μέσου της άλλης από αυτή.

6. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 1, ΑΓ = 2 και $\hat{A}$=120°. Με πλευρές τις ΑΒ και ΑΓ κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ τα τετράγωνα ΑΒΔΓ και ΑΓΖΘ αντίστοιχα. Τότε:*
i) να υπολογίσετε το τμήμα ΕΘ,
ii) να αποδείξετε ότι τα Δ, Ε, Θ είναι συνευθειακά και
iii) να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της πολυγωνικής επιφάνειας ΒΓΖΘΕΔ είναι $5 + \sqrt{3}$.

7. *Αν ω είναι η γωνία των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι*

$$(ΑΒΓΔ) = \frac{1}{2} ΑΓ \cdot ΒΔ \cdot ημω.$$

8. *Ο ιδιοκτήτης ενός οικοπέδου σχήματος ορθογωνίου, του οποίου το μήκος είναι κατά 18 m μεγαλύτερο του πλάτους, θέλει να σχηματίσει γύρω από το οικόπεδο και εξωτερικά αυτού μια δενδροστοιχία πλάτους 2,5 m. Έτσι αναγκάζεται να αγοράσει από τους γείτονές του 695 m^2. Να βρεθούν οι διαστάσεις του οικοπέδου.*

Σύνθετα θέματα

1. *Θεωρούμε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των ημιευθειών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Ζ, Η, Θ και Ι, ώστε ΒΖ =ΑΒ, ΓΗ=ΒΓ, ΔΘ=ΓΔ και ΑΙ=ΑΔ. Να αποδείξετε ότι*
i) (ΙΘΑ) = (ΑΘΔ) = (ΑΓΔ),
ii) (ΙΘΔ) + (ΖΗΒ) = 2(ΑΒΓΔ) και
iii) (ΙΖΗΘ) = 5(ΑΒΓΔ).

2. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε το μέσο Μ της διαμέσου ΑΔ, το μέσο Ν του ΓΜ και το μέσο Ρ του ΒΝ. Να αποδείξετε ότι $(MNP) = \frac{1}{8}(ΑΒΓ)$.*

3. *Στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς α παίρνουμε τα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα, ώστε $ΖΓ = ΗΔ = \frac{α}{4}$.*
i) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΑΖ και ΒΗ τέμνονται κάθετα σε σημείο Κ.
ii) Να υπολογισθούν τα μήκη των τμημάτων: ΑΚ, ΑΗ και ΚΗ.
iii) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΚΗΔ.

4. *Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Ο στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι*
i) (ΟΑΒ) + (ΟΓΔ) = (ΑΒΓ) και
ii) (ΟΑΓ) + (ΟΒΓ) = (ΟΓΔ).

5. *Αν ΑΒΓΔ και ΚΛΜΝ είναι ρόμβος πλευράς α και τετράγωνο πλευράς α αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι (ΑΒΓΔ) ≤ (ΚΛΜΝ).*

10.4 Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

Με τη βοήθεια του βασικού τύπου για το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ, με μήκη πλευρών α, β, γ, προκύπτουν και οι επόμενοι τύποι:

(i) $\mathbf{E = \sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}}$ (τύπος του Ήρωνα), όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

(ii) $\mathbf{E = τρ}$, όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

(iii) $\mathbf{E = \frac{αβγ}{4R}}$, όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

Απόδειξη

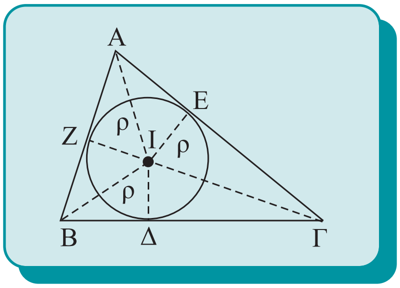
(i) Στην § 9.4 (Εφαρμογή 2) αποδείξαμε ότι

$υ_α = \frac{2}{α}\sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}$, οπότε έχουμε:

$$E = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\alpha\frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} =$$
$$= \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}.$$

(ii) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 16) και ο εγγεγραμμένος κύκλος του (Ι, ρ). Φέρουμε τα τμήματα ΙΑ, ΙΒ και ΙΓ και έτσι το τρίγωνο χωρίζεται στα τρίγωνα ΙΒΓ, ΙΓΑ και ΙΑΒ που έχουν το ίδιο ύψος ρ και δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, οπότε έχουμε:

$$E = (AB\Gamma) = (IB\Gamma) + (I\Gamma A) + (IAB)$$
$$= \frac{1}{2}\alpha\rho + \frac{1}{2}\beta\rho + \frac{1}{2}\gamma\rho = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\rho = \frac{1}{2}2\tau\rho = \tau\rho.$$



Σχήμα 16

(iii) Είναι γνωστό ότι $\beta\gamma = 2R\upsilon_\alpha$ (Εφαρμογή 5 §8.2), οπότε έχουμε ότι $\upsilon_\alpha = \frac{\beta\gamma}{2R}$ και με αντικατάσταση στον τύπο $E = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha$ προκύπτει το ζητούμενο.

Τέλος, το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται και από τον (τριγωνομετρικό) τύπο:

$$\boldsymbol{E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A = \frac{1}{2}\gamma\alpha\eta\mu B = \frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:
Όμοια αποδεικνύεται ότι ο τύπος (2) ισχύει για οποιοδήποτε περιγεγραμμένο σε κύκλο πολύγωνο με ημιπερίμετρο τ.

Απόδειξη

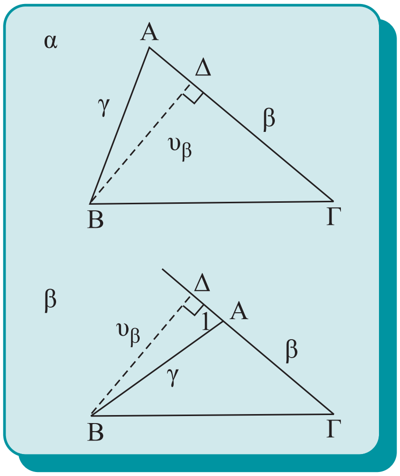
Αν $\hat{A} < 1\llcorner$, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΑ (σχ.17α) προκύπτει ότι $\upsilon_\beta = \gamma\cdot\eta\mu A$.

Αν $\hat{A} > 1\llcorner$, πάλι από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΑ (σχ. 17β) προκύπτει ότι:

$$\upsilon_\beta = \gamma\cdot\eta\mu A_{\varepsilon\xi} = \gamma\cdot\eta\mu(180^\circ - A) = \gamma\cdot\eta\mu A.$$

Έτσι και στις δύο περιπτώσεις έχουμε $\upsilon_\beta = \gamma\cdot\eta\mu A$ οπότε

$$\boldsymbol{E = \frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta = \frac{1}{2}\beta\gamma\cdot\eta\mu A}.$$



Σχήμα 17

Όταν $\hat{A} = 1\llcorner$, τότε $\upsilon_\beta = \gamma$, επομένως πάλι ο τύπος ισχύει.

Όμοια αποδεικνύονται και οι υπόλοιποι τύποι.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η *Νόμος των ημιτόνων*

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδειχθεί ότι: $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} = 2R}$**.**

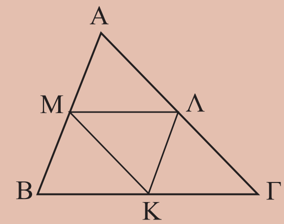
Απόδειξη

Από τις ισότητες $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$ και $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$ προκύπτει ότι $\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$

ή $ημΑ = \frac{α}{2R}$ ή $\frac{α}{ημΑ} = 2R$. Όμοια προκύπτει $\frac{β}{ημΒ} = 2R$, $\frac{γ}{ημΓ} = 2R$, από τις οποίες συμπεραίνουμε το ζητούμενο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $α = 13$, $β = 14$ και $γ = 15$ (σχ.18). Να υπολογίσετε:
(i) το εμβαδόν του,
(ii) τα ύψη του,
(iii) τις ακτίνες του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου,
(iv) το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓ.



Σχήμα 18

Λύση

(i) Έχουμε $τ = \frac{1}{2}(α + β + γ) = 21$ οπότε με αντικατάσταση των δεδομένων στον τύπο του Ήρωνα παίρνουμε:

$$Ε = \sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84.$$

(ii) Έχουμε $Ε = \frac{1}{2}αυ_α$ ή $84 = \frac{1}{2}13υ_α$ ή $υ_α = \frac{168}{13}$. Όμοια βρίσκουμε ότι $υ_β = 12$ και $υ_γ = \frac{56}{5}$.

(iii) Από τους τύπους $Ε = τ \cdot ρ$ και $Ε = \frac{αβγ}{4R}$ προκύπτουν αντίστοιχα ότι $ρ = 4$ και $R = \frac{65}{8}$.

(iv) Έχουμε $ΜΛ = \frac{13}{2}$, $ΜΚ = 7$, και $ΚΛ = \frac{15}{2}$, οπότε από τον τύπο του Ήρωνα προκύπτει πάλι ότι $(ΚΛΜ) = 21$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Με τη βοήθεια του τύπου $Ε = \frac{1}{2}βγ \cdot ημΑ$ να αποδείξετε ότι $Ε \leq \frac{1}{2}βγ$. Πότε ισχύει η ισότητα;*

2. *Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $(ΑΒΓ) = 9$ και $ρ = 1,5$. Ποια είναι η περίμετρός του;*

3. *Ποιοι είναι οι τύποι υπολογισμού του εμβαδού ενός τριγώνου;*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $ΑΒ = 18$, $ΒΓ = 20$ και $ΑΓ = 34$. Να βρείτε το εμβαδόν του.*

2. *Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ//ΒΓ) με $ΒΓ = 25$, $ΑΔ = 11$, $ΑΒ = 13$ και $ΔΓ = 15$. Να βρείτε το εμβαδόν του και το ύψος του.*

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = 4$, $ΑΓ = 7$ και $\hat{Α} = 60°$. Να βρείτε το εμβαδόν του.*

4. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 1∟$) με $ΑΒ = 6$ και $ΑΓ = 8$. Να βρείτε:*
i) το εμβαδόν,
ii) το ύψος $υ_α$,
iii) την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου.

Ασκήσεις Αποδεικτικές

1. *Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\beta\gamma = \alpha\upsilon_\alpha$ να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 1\llcorner$.*

2. *Αν Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ, να αποδείξετε ότι:*

i) $E<\tau(\tau-\alpha) \Leftrightarrow A < 1\llcorner$,

ii) $E = \tau(\tau-\alpha) \Leftrightarrow A = 1\llcorner$,

iii) $E>\tau(\tau-\alpha) \Leftrightarrow A > 1\llcorner$.

3. *Αν δυο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο να αποδείξετε ότι*

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha'\beta'\gamma'}.$$

4. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} \neq 1\llcorner$ φέρουμε τα ύψη ΒΖ και ΓΗ. Να αποδείξετε ότι $(AZH)=(AB\Gamma)\sigma\upsilon\nu^2 A$.*

5. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι:*

$$\frac{1}{\upsilon_\alpha} + \frac{1}{\upsilon_\beta} + \frac{1}{\upsilon_\gamma} = \frac{1}{\rho}.$$

Σύνθετα θέματα

1. *i) Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και σταθερό σημείο Κ στο εσωτερικό αυτής. Από το Κ φέρουμε μεταβλητή ευθεία ε που τέμνει τις πλευρές Οx, Οy στα σημεία Μ, Ν αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα*

$$\frac{1}{(OKM)} + \frac{1}{(OKN)}$$ *είναι σταθερό.*

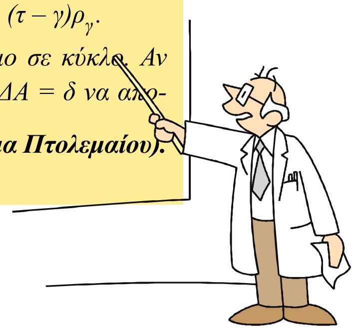
ii) Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ, σημείο Κ στο εσωτερικό του και τα τμήματα ΑΑ΄, ΒΒ΄ και ΓΓ΄ που διέρχονται από το Κ. Αν $E_1, E_2, ..., E_6$ είναι αντίστοιχα τα εμβαδά των τριγώνων ΑΚΓ΄, ΒΚΓ΄, ΒΑ΄Κ, ΓΚΑ΄, ΓΚΒ΄ και ΑΚΒ΄, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_3} + \frac{1}{E_5} = \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_4} + \frac{1}{E_6}.$$

2. *Αν ρ_α, ρ_β, ρ_γ είναι οι ακτίνες των παρεγγεγραμμένων κύκλων τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι*

$$(AB\Gamma) = (\tau-\alpha)\rho_\alpha = (\tau-\beta)\rho_\beta = (\tau-\gamma)\rho_\gamma.$$

3. *Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ εγγράψιμο σε κύκλο. Αν θέσουμε ΑΒ = α, ΒΓ = β, ΓΔ = γ και ΔΑ = δ να αποδείξετε ότι* $\frac{A\Gamma}{B\Delta} = \frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\alpha\beta+\gamma\delta}$ ***(2ο Θεώρημα Πτολεμαίου).***

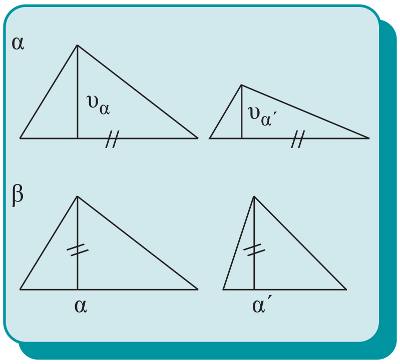


Εμβαδόν και ομοιότητα

10.5 Λόγος εμβαδών όμοιων τριγώνων - πολυγώνων

Ας θεωρήσουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ με εμβαδά Ε και Ε΄ αντίστοιχα. Τότε είναι $E = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha$ και $E' = \frac{1}{2}\alpha'\upsilon_{\alpha'}$, οπότε $\frac{E}{E'} = \frac{\alpha\upsilon_\alpha}{\alpha'\upsilon_{\alpha'}}$. Από την ισότητα αυτή προκύπτει άμεσα ότι:

- Αν α = α΄, τότε $\frac{E}{E'} = \frac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_{\alpha'}}$ (σχ.19α).
- Αν $\upsilon_\alpha = \upsilon_{\alpha'}$, τότε $\frac{E}{E'} = \frac{\alpha}{\alpha'}$ (σχ.19β).



Σχήμα 19

Δηλαδή: **αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών, ενώ αν έχουν ίσα ύψη, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων**.

Στην περίπτωση που τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι όμοια, ισχύει το επόμενο θεώρημα.