Α.1.2. Πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών

Παρακάτω θα ασχοληθούμε με τις "πράξεις" των φυσικών αριθμών. Το ουσιαστικό "πράξη" προκύπτει από το ρήμα "πράττω" και δηλώνει μια δράση ή ενέργεια. Οι αριθμοί που έχουμε γνωρίσει μέχρι τώρα υλοποιούν ανάγκες μέτρησης. Σύνθετες μετρήσεις προκύπτουν από απλές μετρήσεις με τη διδικασία των πράξεων, όπως για παράδειγμα της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Ο διπλανός πίνακας δίνει τα αθροίσματα, δηλαδή τα αποτελέσματα της πρόσθεσης των μονοψήφιων φυσικών αριθμών.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

- *Τι παρατηρείς για την πρόσθεση με το 0;*
- *Πόσοι αριθμοί μπορούν να προστεθούν κάθε φορά;*
- *Δύο αριθμοί έχουν άθροισμα 12 και διαφορά 2. Μπορείς να βρεις τους αριθμούς αυτούς;*
- *Σύγκρινε τα αθροίσματα 3 + 6 και 6 + 3 και μετά τα αθροίσματα (5+4) + 2 και 5 + (4+2)*
- *Διατύπωσε τα συμπεράσματά σου.*
- *Φτιάξε ένα παρόμοιο πίνακα για τον πολλαπλασιασμό, διατύπωσε τα αντίστοιχα ερωτήματα και προσπάθησε να δώσεις τις κατάλληλες απαντήσεις.*

Σκεφτόμαστε

Παρατηρούμε ότι κάθε φορά μπορούμε να προσθέσουμε δύο μόνο αριθμούς, συνεπώς από τα ζευγάρια των αριθμών που έχουν άθροισμα 12, δηλαδή $9+3$, $8+4$, $7+5$, $6+6$, εκείνο που έχει διαφορά 2 είναι το ζευγάρι των αριθμών 7 και 5.
Επίσης, παρατηρούμε ότι: $0+1=1+0=1$, $0+2=2+0=2$, $0+3=3+0=3$, κ.ο.κ.
Η σύγκριση των αθροισμάτων $3+6=9$ και $6+3=9$, όπως και άλλων τέτοιων αθροισμάτων π.χ. $7+1=8$ και $1+7=8$ κ.λπ., μας οδηγούν στη διατύπωση της αντιμεταθετικής ιδιότητας.
Επίσης, η σύγκριση των αθροισμάτων: $(5+4)+2=11$ και $5+(4+2)=11$, αλλά και άλλων αθροισμάτων, όπως π.χ. $(9+1)+3=13$ και $9+(1+3)=13$ κ.λπ., μας οδηγούν στη διατύπωση της προσεταιριστικής ιδιότητας. Επομένως, μπορούμε να διατυπώσουμε τις ιδιότητες της πρόσθεσης και αντίστοιχα του πολλαπλασιασμού των φυσικών αριθμών.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

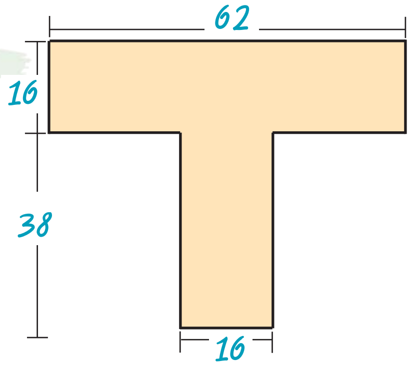
Σε όλο το μήκος του εθνικού δρόμου Αθήνας - Αλεξανδρούπολης υπάρχουν χιλιομετρικές ενδείξεις. Οι ενδείξεις αυτές γράφουν: στη Λαμία 214, στη Λάρισα 362, στην Κατερίνη 445, στη Θεσσαλονίκη 514, στην Καβάλα 677, στην Ξάνθη 732, στην Κομοτηνή 788 και στην Αλεξανδρούπολη 854.

- *Μπορείς να βρεις τις μεταξύ των πόλεων αποστάσεις;*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Ο Σπύρος υπολόγισε με το μυαλό του το εμβαδόν του διπλανού σχήματος και το βρήκε 1600 τετραγωνικά χιλιοστά.

- *Υπολόγισε και συ το εμβαδόν και δώσε μια εξήγηση για το τι ακριβώς έκανες για να το βρεις.*



Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- **Πρόσθεση** είναι η πράξη με την οποία από δύο φυσικούς αριθμούς **α** και **β**, τους **προσθετέους**, βρίσκουμε ένα τρίτο φυσικό αριθμό **γ**, που είναι το **άθροισμά** τους και γράφουμε: **α + β = γ**

$$\underbrace{13 + 5}_{\text{Προσθετέοι}} = \underbrace{18}_{\text{Άθροισμα}}$$

Ιδιότητες της πρόσθεσης:

- Το **0** όταν προστεθεί σε ένα φυσικό αριθμό δεν τον μεταβάλλει. $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$
- Μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά των δύο προσθετέων ενός αθροίσματος **(Αντιμεταθετική ιδιότητα)** $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
- Μπορούμε να αντικαθιστούμε προσθετέους με το άθροισμά τους ή να αναλύουμε ένα προσθετέο σε άθροισμα **(Προσεταιριστική ιδιότητα)**. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$

.

- **Αφαίρεση** είναι η πράξη με την οποία, όταν δίνονται δύο αριθμοί, **Μ (μειωτέος)** και **Α (αφαιρετέος)** βρίσκουμε έναν αριθμό **Δ (διαφορά)**, ο οποίος όταν προστεθεί στο **Α** δίνει το **Μ**.
- **Στους φυσικούς αριθμούς ο αφαιρετέος Α πρέπει να είναι πάντα μικρότερος ή ίσος του μειωτέου Μ.** Σε αντίθετη περίπτωση η πράξη της αφαίρεσης δεν είναι δυνατόν να εκτελεστεί.

$$Μ = Α + Δ$$

και γράφουμε

$$Δ = Μ - Α$$

- **Πολλαπλασιασμός** είναι η πράξη με την οποία από δύο φυσικούς αριθμούς **α** και **β**, τους **παράγοντες**, βρίσκουμε ένα τρίτο φυσικό αριθμό **γ**, που είναι το γινόμενό τους: **α · β = γ**.

$$\underbrace{7 \cdot 6}_{\text{Παράγοντες}} = \underbrace{42}_{\text{Γινόμενο}}$$

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού:

- Το **1** όταν πολλαπλασιαστεί με ένα φυσικό αριθμό δεν τον μεταβάλλει. $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$
- Μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά των παραγόντων ενός γινομένου **(Αντιμεταθετική ιδιότητα)** $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
- Μπορούμε να αντικαθιστούμε παράγοντες με το γινόμενό τους ή να αναλύουμε ένα παράγοντα σε γινόμενο **(Προσεταιριστική ιδιότητα)** $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$
- **Επιμεριστική ιδιότητα** του πολλαπλασιασμού **ως προς την πρόσθεση**: $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$
- **Επιμεριστική ιδιότητα** του πολλαπλασιασμού **ως προς την αφαίρεση**: $\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$

Η πρώτη εμφάνιση των συμβόλων **+** *και* **–** *χρονολογείται από τα τέλη του 15ου αιώνα, αλλά η γενικευμένη χρήση τους εμφανίζεται τον 19ο αιώνα. Αρχικά για την αφαίρεση χρησιμοποιήθηκε το σύμβολο «*:*». Λέγεται ότι η καταγωγή των συμβόλων αυτών οφείλεται στους εμπόρους που τα χρησιμοποιούσαν για να δηλώσουν ότι ένα βάρος βρέθηκε πιο πολύ ή πιο λίγο, αντίστοιχα, από το κανονικό. Τα σύμβολα* **x** *και* **=** *καθιερώθηκαν από Άγγλους μαθηματικούς το 1632 και το 1557 αντίστοιχα.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να υπολογιστούν τα γινόμενα: (α) 35 · 10, (β) 421 · 100, (γ) 5 · 1.000, (δ) 27 · 10.000*

Λύση

(α) 35 · 10 = 350

(β) 421 · 100 = 42.100

(γ) 5 · 1.000 = 5.000

(δ) 27 · 10.000 = 270.000

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι για να πολλαπλασιάσουμε ένα αριθμό επί 10, 100, 1.000, ... γράφουμε στο τέλος του αριθμού τόσα μηδενικά όσα έχει κάθε φορά ο παράγοντας 10, 100, 1.000 ....

2. *Να εκτελεστούν οι ακόλουθες πράξεις:*
(α) 89 · 7 + 89 · 3, (β) 23 · 49 + 77 · 49, (γ) 76 · 13 – 76 · 3, (δ) 284 · 99

Λύση

(α) $89 \cdot 7 + 89 \cdot 3 = 89 \cdot (7 + 3) = 89 \cdot 10 = 890$

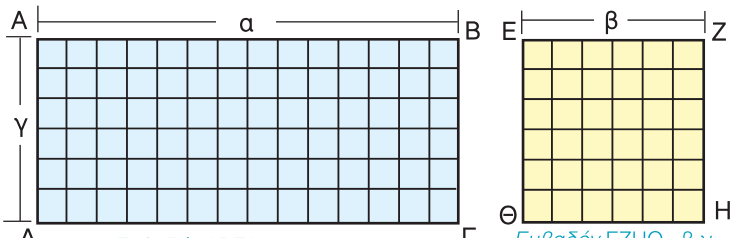
(β) $23 \cdot 49 + 77 \cdot 49 = (23 + 77) \cdot 49 = 100 \cdot 49 = 490$

(γ) $76 \cdot 13 - 76 \cdot 3 = 76 \cdot (13 - 3) = 76 \cdot 10 = 760$

(δ) $284 \cdot 99 = 284 \cdot (100 - 1) = 284 \cdot 100 - 284 \cdot 1 = 28.400 - 284 = 28.116$

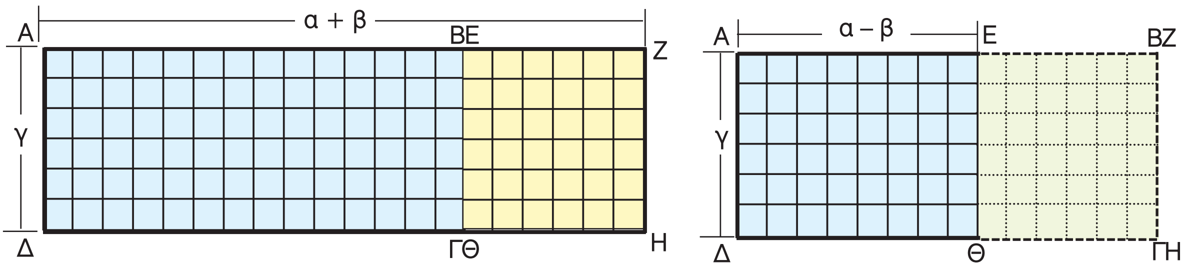
3. *Να ερμηνευτούν με γεωμετρικό τρόπο οι επιμεριστικές ιδιότητες:*
$(α + β) \cdot γ = α \cdot γ + β \cdot γ$ *και* $(α - β) \cdot γ = α \cdot γ - β \cdot γ$

Λύση



Εμβαδόν ΑΒΓΔ = α · γ   *Εμβαδόν* ΕΖΗΘ = β · γ

Δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα (μπλέ και κίτρινο) έχουν μία διάσταση με το ίδιο μήκος **γ**. Για αυτό το λόγο μπορούμε, αν τα “κολλήσουμε”, όπως φαίνεται στο σχήμα, να φτιάξουμε ένα τρίτο, το **ΑΖΗΔ**, με εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών τους. Αν βάλουμε το μικρότερο πάνω στο μεγαλύτερο, όπως φαίνεται στο σχήμα, θα αποκτήσουμε ένα άλλο, το **ΑΕΘΔ**, που θα έχει εμβαδόν ίσο με τη διαφορά των εμβαδών των δύο αρχικών.



Εμβ. ΑΖΗΔ = *Εμβ.* ΑΒΓΔ + *Εμβ.* ΕΖΗΘ
Οπότε: (α+β) · γ = α · γ + β · γ

Εμβ. ΑΕΘΔ = *Εμβ.* ΑΒΓΔ – *Εμβ.* ΕΖΗΘ
Οπότε: (α–β) · γ = α · γ – β · γ

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Μερικές φορές ένας απλός συλλογισμός κάποιου ανθρώπου αξίζει πιο πολύ απ' όλο το χρυσάφι του κόσμου. Με κάποιες έξυπνες ιδέες κερδίζονται μάχες, γίνονται μνημειώδη έργα και δοξάζονται άνθρωποι, ενώ παράλληλα αναπτύσσεται η επιστήμη, εξελίσσεται η τεχνολογία, διαμορφώνεται η ιστορία και αλλάζει η ζωή.

Ένα μικρό παράδειγμα είναι η "έξυπνη πρόσθεση" που σκέφτηκε να κάνει ο **Γκάους** *(Karl Friedrich Gauss, 1777 - 1850), όταν σε ένα χωριό της Γερμανίας γύρω στα 1789, στην πρώτη τάξη του σχολείου, άρχισε να μαθαίνει για τους αριθμούς και τις αριθμητικές πράξεις. Όταν ο δάσκαλος ζήτησε από τους μαθητές του να υπολογίσουν το άθροισμα:*

1+2+3+....+98+99+100, *πριν οι υπόλοιποι αρχίσουν τις πράξεις, ο μικρός Γκάους το είχε ήδη υπολογίσει. Ο δάσκαλος έκπληκτος τον ρώτησε πώς το βρήκε. Τότε εκείνος έγραψε στον πίνακα:*

$$(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots + (48 + 53) + (50 + 51) =$$
$$= \underbrace{101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 + 101}_{50 \text{ φορές}} = 101 \cdot 50 = 5.050$$

Προσπάθησε να υπολογίσεις με τον τρόπο του Γκάους το άθροισμα 1+2+3+...+ 998 + 999 + 1000 *και να μετρήσεις το χρόνο που χρειάστηκες. Πόσο χρόνο θα έκανες άραγε να το υπολογίσεις με κανονική πρόσθεση;*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:*

(α) Η ιδιότητα $α + β = β + α$ λέγεται ....

(β) Η ιδιότητα $α + β + γ = α + (β + γ) = (α + β) + γ$ λέγεται ....

(γ) Ο αριθμός που προστίθεται σε αριθμό και δίνει άθροισμα τον $α$ είναι ....

(δ) Το αποτέλεσμα της αφαίρεσης λέγεται ....

(ε) Σε μια αφαίρεση οι αριθμοί Μ, Α και Δ συνδέονται με τη σχέση: ....

(στ) Η ιδιότητα $α \cdot β = β \cdot α$ λέγεται ....

(ζ) Η ιδιότητα $α \cdot (β \cdot γ) = (α \cdot β) \cdot γ$ λέγεται ....

(η) Η ιδιότητα $α \cdot (β + γ) = α \cdot β + α \cdot γ$ λέγεται ....

2. *Συμπλήρωσε τα γινόμενα: (α)* $52 \cdot \square = 5.200$, *(β)* $37 \cdot \square = 370$, *(γ)* $490 \cdot \square = 4.900.000$

3. *Συμπλήρωσε τα κενά με τους κατάλληλους αριθμούς, ώστε να προκύψουν σωστά αθροίσματα:*

(α)
$$\begin{array}{r} \square\,5\,8\,2 \\ +\;7\,5\,\square\,1 \\ \hline \square\,1\,\square\,7\,3 \end{array}$$

(β)
$$\begin{array}{r} 4\,\square\,5 \\ +\;5\,2\,\square \\ \hline \square\,\square\,1\,0 \end{array}$$

(γ)
$$\begin{array}{r} \square\,5\,\square\,5 \\ +\;5\,2\,\square \\ \hline 4\,\square\,9\,3 \end{array}$$

4. *Αντιστοίχισε κάθε γραμμή του πρώτου πίνακα με ένα από τα αποτελέσματα που υπάρχουν στο δεύτερο πίνακα.*

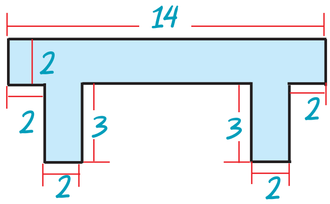
$1 + 2 + 3 + 4$	14
$1 + 2 + 3 \cdot 4$	24
$1 \cdot 2 + 3 \cdot 4$	10
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$	15

5. Τοποθέτησε ένα “x” στην αντίστοιχη θέση

(α)	157 + 33 =	190 ☐	200 ☐	180 ☐
(β)	122 + 25 + 78 =	200 ☐	250 ☐	225 ☐
(γ)	785 – 323 =	462 ☐	458 ☐	562 ☐
(δ)	7.321 – 4.595 =	2.724 ☐	2.627 ☐	2.726 ☐
(ε)	60 – (18 – 2) =	60+18–2 ☐	(60–18)–2 ☐	60–18+2 ☐
(στ)	52 – 11 – 9 =	52–(11+9) ☐	(52–11)–9 ☐	52–20 ☐
(ζ)	23 · 10 =	230 ☐	240 ☐	2.300 ☐
(η)	97 · 100 =	970 ☐	9.700 ☐	9.800 ☐
(θ)	879 · 1000 =	87900 ☐	879000 ☐	880000 ☐

6. Υπολόγισε τα παρακάτω γινόμενα, χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα:
(α) 3·13, (β) 7·11, (γ) 45·12, (δ) 12·101, (ε) 5·110, (στ) 4·111, (ζ) 34·99, (η) 58·98.

7. Υπολόγισε το εμβαδόν του σχήματος, χρησιμοποιώντας κατάλληλα την επιμεριστική ιδιότητα.

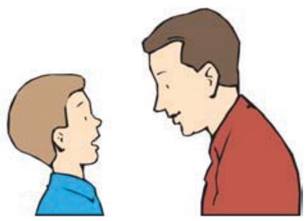


8. Αγοράσαμε διάφορα σχολικά είδη που κόστιζαν: 156 €, 30 €, 38 €, 369 € και 432 €.
(α) Υπολόγισε πρόχειρα αν αρκούν 1.000 € για να πληρώσουμε τα είδη που αγοράσαμε.
(β) Βρες πόσα ακριβώς χρήματα θα πληρώσουμε.

9. Ο Νίκος κατέβηκε για ψώνια με 160 €. Σε ένα μαγαζί βρήκε ένα πουκάμισο που κόστιζε 35 €, ένα πανταλόνι που κόστιζε 48 € και ένα σακάκι που κόστιζε 77 €. Του φτάνουν τα χρήματα για να τα αγοράσει όλα;

10. Σε ένα αρτοποιείο έφτιαξαν μία μέρα 120 κιλά άσπρο ψωμί, 135 κιλά χωριάτικο, 25 κιλά σικάλεως και 38 κιλά πολύσπορο. Πουλήθηκαν 107 κιλά άσπρο ψωμί, 112 κιλά χωριάτικο, 19 κιλά σικάλεως και 23 κιλά πολύσπορο. Πόσα κιλά ψωμί έμειναν απούλητα;

11.



Ο Άρης γεννήθηκε το 1983 και είναι 25 χρόνια μικρότερος από τον πατέρα του.
(α) Πόσων χρονών είναι ο Άρης σήμερα;
(β) Πότε γεννήθηκε ο πατέρας του;

12. ‘Ενα σχολείο έχει 12 αίθουσες διδασκαλίας. Οι 7 χωράνε από 20 διπλά θρανία και οι υπόλοιπες από 12 διπλά θρανία. Στο σχολείο εγγράφηκαν: στην Α’ τάξη 80 παιδιά, στην Β’ τάξη 58 παιδιά και στην Γ’ τάξη 61 παιδιά. Επαρκούν οι αίθουσες για τα παιδιά αυτού του Γυμνασίου;

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Αρχικά ο άνθρωπος έκανε μόνο το διαχωρισμό: **ένα, δύο, πολλά**. *Με την πρόοδο του πολιτισμού, την ανάπτυξη των τεχνών και του εμπορίου διαμορφώνει τις έννοιες των αριθμών. Σ' αυτό βοήθησαν και τα* **φυσικά πρότυπα αρίθμησης**, *όπως π.χ. τα δάκτυλα του ενός χεριού (αρίθμηση βάση το 5) ή των δύο χεριών (βάση το 10). Μετά, τα πρώτα αυτά αριθμητικά συστήματα, συμπληρώνονται με τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.*

Τα αποτελέσματα της αρίθμησης καταγράφονταν με τη βοήθεια χαραγών πάνω σε ξύλα ή κόκαλα ή με κόμπους σε σχοινιά. Το αρχαιότερο εύρημα ανάγεται στους προϊστορικούς χρόνους και είναι το κόκαλο ποδιού ενός μικρού λύκου μήκους 18 εκατοστών που βρέθηκε, το 1937, στην πόλη Βεστόνιτσε της Μοραβίας (εικόνα).

Η ανάγκη υπολογισμού μεγεθών απαιτεί σύγκριση με ένα σταθερό υπόδειγμα, τη **μονάδα μέτρησης**. *Οι πρώτες μονάδες αντιστοιχούν πάλι σε μέλη του σώματος, όπως παλάμες, δάχτυλους, πόδια, οργιά, πήχη. Από τα φυσικά πρότυπα, τις χαραγές, τους κόμπους, τα βότσαλα περάσαμε μέσα σε περίοδο χιλιάδων ετών στα* **σύμβολα που παρίσταναν αριθμούς**. *Τα σύμβολα αυτά ήταν διαφορετικά στους διάφορους αρχαίους πολιτισμούς. Η ενοποίηση του συμβολισμού των αριθμών που υπάρχει σήμερα χρειάστηκε χιλιάδες χρόνια για να γίνει.*

Η **ιστορία του μηδενός** *και ο συμβολισμός του ακολουθεί διαφορετική πορεία. Κι αυτό γιατί η ανάγκη ύπαρξης ξεχωριστού συμβόλου για το* **"τίποτα"** *εμφανίστηκε πολύ αργότερα.*

Οι **Σουμέριοι** *και οι* **Βαβυλώνιοι** *άφηναν ένα* **κενό** *διάστημα για να δηλώσουν την απουσία αριθμητικού ψηφίου σε κάποια θέση. Οι παρανοήσεις και τα λάθη που προέκυπταν τους οδήγησαν στην υιοθέτηση του ειδικού συμβόλου*  *ή*  *ή*  *κατά την Περσική περίοδο.*

Το σύμβολο αυτό το τοποθετούσαν μόνο μεταξύ δύο ψηφίων και όχι στο τέλος ενός αριθμού. Από τον 3ο - 12ο αιώνα μ.Χ. το μηδέν είναι μια κουκίδα. Ο μαθηματικός και αστρονόμος Βραχμαγκούπτα, το 628 μ.Χ. ονομάζει το μηδέν ως "το τίποτα". Τον 9ο αιώνα συναντάμε επιγραφή με σαφή συμβολισμό για το μηδέν.

Οι **Ινδοί** *χρησιμοποιούν το σύμβολο του μηδενός και ως τελευταίο ψηφίο αριθμού. Έτσι είχαν 10 ισότιμα ψηφία τα:* • *ή* **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8** *και* **9**.

Ο Άραβας μαθηματικός Αλ-Χουαρίζμι (787 - 850 μ.Χ.), στο έργο του "Αλγόριθμοι των Ινδικών αριθμών" γράφει το 820 μ.Χ. για το μηδέν: **"Όταν μια αφαίρεση δεν αφήνει τίποτα, τότε, για να μη μείνει άδεια η θέση πρέπει να μπαίνει ένας μικρός κύκλος, γιατί διαφορετικά οι θέσεις θα λιγοστέψουν και μπορεί π.χ. η δεύτερη να θεωρηθεί ως πρώτη"**.

Ο Έλληνας μαθηματικός **Κλαύδιος Πτολεμαίος** *(100 - 178 μ.Χ.) χρησιμοποιεί το σύμβολο 0 για να παραστήσει το μηδέν, στο βιβλίο του "Μεγάλη Μαθηματική Σύνταξη" ή* **"Αλμαγέστη"** *(150 μ.Χ.). Το επινόησε από το αρχικό γράμμα της λέξης* **"ουδέν"** *που σημαίνει* **κανένα** *(ψηφίο).*