



1.1 Το αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Το αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι η μελέτη του **χώρου** και των **σχημάτων**, επίπεδων και στερεών, που μπορούν να υπάρξουν μέσα σε αυτόν. Μέσα στο χώρο βρίσκεται ο φυσικός κόσμος, στον οποίο ζούμε, και όλα τα αντικείμενα, μεγάλα ή μικρά, έμφυχα ή άφυχα.

Στο χώρο διακρίνουμε τις **επιφάνειες**, τις **γραμμές** και τα **σημεία**. Οι επιφάνειες έχουν δύο διαστάσεις, οι γραμμές μία, τα σημεία καμία. Οι επιφάνειες διαχωρίζουν τα αντικείμενα μεταξύ τους ή από το περιβάλλον. Πάνω σε μια επιφάνεια μπορούμε να θεωρήσουμε γραμμές, οι οποίες μάλιστα μπορεί να την οριοθετούν. Εδώ χρειάζεται μια διευκρίνιση. Στην καθημερινή γλώσσα μιλάμε για «γραμμές» της ασφάλτου ή για σιδηροδρομικές «γραμμές», επειδή το πλάτος στη μία περίπτωση, το πλάτος και το ύψος στην άλλη είναι αμελητέα ως προς το μήκος. Γενικά, όλα τα υλικά αντικείμενα εκτείνονται σε τρεις διαστάσεις. Στην καθημερινή γλώσσα δεχόμαστε τις προσεγγίσεις, στη Γεωμετρία όχι. Λειτουργούμε αναγκαστικά με αφηρημένες έννοιες, που τις αποκαλούμε **όρους** της Γεωμετρίας.

Η Γεωμετρία ήταν ο πρώτος κλάδος της ανθρώπινης γνώσης που διαμορφώθηκε ως επιστήμη και επί αιώνες ο μόνος. Το αντικείμενό της, ο χώρος και τα σχήματα, είναι και προσιτό και πλούσιο, πρόσφορο για θεωρητική μελέτη αλλά και για πρακτικές εφαρμογές. Από την εποχή του Αρχιμήδη και του Ήρωνα μέχρι σήμερα, τα πεδία εφαρμογής της Γεωμετρίας συνεχώς διευρύνονται. Για τα σπίτια που ζούμε, τα καράβια που ταξιδεύουμε ή τις επεξεργασμένες εικόνες της τηλεόρασης είναι αναγκαία η χρήση της Γεωμετρίας, άμεση ή έμμεση.

Αρχικά, η μελέτη των ιδιοτήτων των διάφορων γεωμετρικών σχημάτων έγινε με τρόπο εμπειρικό, όπως τη συναντήσαμε στο Γυμνάσιο. Η μέθοδος που ακολουθήσαμε τότε ήταν η εύρεση ή επαλήθευση των ιδιοτήτων και σχέσεων ανάμεσα στα γεωμετρικά σχήματα με βάση τη μέτρηση, για την οποία χρησιμοποιούσαμε το διαβαθμισμένο κανόνα (υποδεκάμετρο) και το μοιρογνωμόνιο. Η μέτρηση όμως δεν μπορεί να είναι ακριβής και τα αποτελέσματά της δε γενικεύονται.

Η διαφοροποίηση της Πρακτικής Γεωμετρίας από τη Θεωρητική ή Ευκλείδεια Γεωμετρία, την οποία θα μελετήσουμε στο Λύκειο, συνίσταται στη συστηματική χρήση της λογικής για να θεμελιώσει τις γνώσεις μας για το χώρο, ξεφεύγοντας από μετρήσεις και επιμέρους συμπεράσματα. Οι γνώσεις αυτές υπάρχουν ήδη: όλοι ξέρουν τι είναι κύκλος και τι τετράγωνο – οι αντίστοιχες λέξεις υπάρχουν σε όλες τις γνωστές γλώσσες. Πρόκειται όμως για γνώσεις σκόρπιες, ασύνδετες μεταξύ τους. Η Γεωμετρία τις θεμελιώνει, δηλαδή τις οργανώνει σε ένα σύστημα, και φυσικά προσθέτει και νέες γνώσεις σε αυτές που ήδη υπάρχουν. Κάθε καινούργιο αποτέλεσμα προκύπτει από τα προηγούμενα, χρησιμοποιώντας τη διαδικασία που λέγεται **απόδειξη** και που στηρίζεται στους κανόνες της Λογικής.

Πώς προχωράει αυτή η διαδικασία; Ας δούμε λίγο το τετράγωνο. Το τετράγωνο, όσο απλό και αν φαίνεται, είναι σύνθετη έννοια. Έχει ίσες πλευρές και μάλιστα ανά δύο παράλληλες, ίσες γωνίες και μάλιστα όλες ορθές. Πρέπει, επομένως, πρώτα να ξεκαθαρίσουμε τι σημαίνει ισότητα και ανισότητα (πλευρών ή γωνιών), τι παραλληλία και τι ορθή γωνία (ή καθετότητα). Μόνο μετά από αυτά μπορούμε να μιλήσουμε για τετράγωνο, αφού πρώτα δώσουμε τον ορισμό του. **Η Γεωμετρία προχωράει από το πιο απλό στο πιο σύνθετο.**

Θα πρέπει, ωστόσο, από κάπου να ξεκινήσουμε, από έννοιες οι οποίες προκύπτουν άμεσα από την εμπειρία μας, όπως οι έννοιες **σημείο**, **ευθεία** και **επίπεδο** τις οποίες δεχόμαστε ως πρωταρχικές χωρίς περαιτέρω διευκρινίσεις. Όμως οι έννοιες αυτές υπόκεινται στις παρακάτω παραδοχές:

- Από δύο σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία.
- Για κάθε ευθεία υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του επιπέδου που δεν ανήκει σε αυτή.
- Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα και προς τις δύο κατευθύνσεις, χωρίς διακοπές και κενά.

Ισχυρισμούς όπως οι παραπάνω, που τους δεχόμαστε ως αληθείς χωρίς απόδειξη, τους ονομάζουμε **αξιώματα**. Επομένως, τα αξιώματα δεν αποδεικνύονται, επιλέγονται. Για την Ευκλείδεια Γεωμετρία έχουν προταθεί πάρα πολλά αξιωματικά συστήματα, δηλαδή διαφορετικές επιλογές αξιωμάτων (βλ. Παράρτημα Α). Η δομή του βιβλίου, η σειρά των αποτελεσμάτων εξαρτώνται από την επιλογή των αξιωμάτων, τα οποία δίνονται εκεί που χρειάζονται. Γενικότερα, γίνεται προσπάθεια ώστε, μετά από μία νέα έννοια ή ένα νέο σημαντικό αποτέλεσμα, να εξετάζεται τι καινούργιο μπορεί να προκύψει σε συνδυασμό με τα προηγούμενα. Κάθε νέο αποτέλεσμα που προκύπτει από μία σειρά συλλογισμών θεμελιωμένη στα αξιώματα λέγεται **θεώρημα**, ενώ οι άμεσες συνέπειες ενός θεωρήματος λέγονται **πορίσματα**.

Όπως προαναφέραμε αντικείμενο της Γεωμετρίας είναι η μελέτη των σχημάτων του επιπέδου και του χώρου. Η μελέτη αυτή συχνά υποβοηθείται από ένα σχέδιο του σχήματος.

Στην πορεία εξαγωγής των συμπερασμάτων σημαντικό ρόλο παίζει η διαίσθηση και η εποπτεία. Τα συμπεράσματα, για να είναι γενικά, δεν πρέπει να είναι συνέπειες μόνο της παρατήρησης του σχεδίου. Είναι αναγκαίο να προκύπτουν με ορθό συλλογισμό από τις ιδιότητες του σχήματος, οι οποίες άλλωστε είναι δυνατό να μην είναι όλες ορατές στο σχήμα. Για να καταλήξουμε σε μία απόδειξη ο δρόμος μπορεί να είναι μακρύς και να περνάει μέσα από εικασίες, λάθη, επαναποποθετήσεις, μέχρι να οδηγηθούμε στην τελική μορφή.

Είναι λοιπόν φανερό ότι οι συλλογισμοί μας, για την αντιμετώπιση ενός γεωμετρικού προβλήματος, πρέπει να είναι θεωρητικοί, γενικοί και το σχέδιο του σχήματος να έρχεται αρωγός στην προσπάθεια ανακάλυψης εκείνων των ιδιοτήτων που θα μας οδηγήσουν στη λύση του προβλήματος.

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία ερμηνεύει τις μορφές του περιβάλλοντος χώρου χρησιμοποιώντας λίγες πρώτες αρχές και αξιοποιώντας τη σκέψη και τον ορθό λόγο.