κών φαινομένων. Έτσι, στη διάρκεια του 19ου αιώνα γεννιούνται νέοι κλάδοι των εφαρμοσμένων μαθηματικών, όπως είναι η Θεωρία των Σφαλμάτων, τα Ασφαλιστικά Μαθηματικά και η Στατιστική Μηχανική.

Στις μέρες μας η Θεωρία των Πιθανοτήτων με τις εργασίες πολλών διάσημων μαθηματικών, όπως είναι οι (Chebyshev, Markov, Von Mises, Kolmogorov κ.ά., έχει σημειώσει αλματώδη πρόοδο. Καινούργια θεωρητικά αποτελέσματα παρέχουν νέες δυνατότητες για τη χρησιμοποίηση των μεθόδων της Θεωρίας των Πιθανοτήτων. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι οι εφαρμογές των Πιθανοτήτων αναφέρονται σε ένα ευρύτατο φάσμα επιστημών όπως η Φυσική, η Χημεία, η Γενετική, η Ψυχολογία, η Οικονομολογία, η Τηλεπικοινωνία, η Μετεωρολογία κτλ.

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων ανήκει στους κλάδους των Μαθηματικών που συμβαδίζουν με την ανάπτυξη των φυσικών επιστημών και της τεχνολογίας. Αυτό δε σημαίνει βέβαια ότι η Θεωρία των Πιθανοτήτων είναι απλώς ένα βοηθητικό εργαλείο για τη λύση πρακτικών προβλημάτων των άλλων επιστημών. Απεναντίας έχει μετασχηματιστεί σε έναν αυτοτελή κλάδο των καθαρών Μαθηματικών, που έχει δικά του προβλήματα και δικές του μεθόδους.

1.1 ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ - ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Πείραμα Τύχης

Όπως γνωρίζουμε από τη Φυσική, αν θερμάνουμε αποσταγμένο νερό σε 100° Κελσίου στην επιφάνεια της θάλασσας, δηλαδή σε ατμοσφαιρική πίεση 760 mm Hg, το νερό θα βράσει. Επίσης, αν αφήσουμε ένα σώμα να πέσει στο κενό υπό την επίδραση της βαρύτητας, μπορούμε να προβλέψουμε με ακρίβεια το διάστημα που θα διανύσει σε ορισμένο χρόνο t. Κάθε τέτοιο πείραμα κατά το οποίο η γνώση των συνθηκών κάτω από τις οποίες εκτελείται καθορίζει πλήρως το αποτέλεσμα λέγεται **αιτιοκρατικό** (deterministic) πείραμα.

Υπάρχουν όμως και πειράματα των οποίων δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, μολονότι επαναλαμβάνονται (φαινομενικά τουλάχιστον) κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Ένα τέτοιο πείραμα ονομάζεται **πείραμα τύχης** (random experiment). Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να προβλέψουμε με ακρίβεια τον αριθμό των τροχαίων ατυχημάτων που συμβαίνουν σε μια εβδομάδα σε ένα σημείο μιας εθνικής οδού, αφού ο

αριθμός αυτός εξαρτάται από πολλούς απρόβλεπτους παράγοντες.
Πειράματα τύχης είναι και τα εξής:

1. Ρίχνεται ένα νόμισμα και καταγράφεται η άνω όψη του.
2. Ρίχνεται ένα ζάρι και καταγράφεται η ένδειξη της άνω έδρας του.
3. Διαλέγεται αυθαίρετα μια οικογένεια με δύο παιδιά και εξετάζεται ως προς το φύλο των παιδιών και τη σειρά γέννησης τους.
4. Ρίχνεται ένα νόμισμα ώσπου να φέρουμε "γράμματα" αλλά όχι περισσότερο από τρεις φορές.
5. Επιλέγεται τυχαία μια τηλεφωνική συνδιάλεξη και καταγράφεται η διάρκειά της.
6. Γίνεται η κλήρωση του ΛΟΤΤΟ και καταγράφεται το αποτέλεσμα.
7. Την παραμονή του Πάσχα, στις 5 μ.μ., μετριέται το μήκος της ουράς των αυτοκινήτων στα πρώτα διόδια της Εθνικής οδού Αθηνών-Λαμίας.
8. Επιλέγεται τυχαία μια μέρα της εβδομάδος και μετριέται ο αριθμός των τηλεθεατών που παρακολούθησαν το απογευματινό δελτίο ειδήσεων στην ΕΤ1.
9. Επιλέγεται τυχαία μια ραδιενεργός πηγή και καταγράφεται ο αριθμός των εκπεμπόμενων σωματιδίων σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

Δειγματικός Χώρος

Όλα τα αποτελέσματα που μπορούν να εμφανιστούν σε ένα πείραμα τύχης λέγονται δυνατά αποτελέσματα ή δυνατές περιπτώσεις του πειράματος. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων λέγεται **δειγματικός χώρος** (sample space) και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα Ω. Αν δηλαδή ω_1, $\omega_2,\ldots,\omega_\kappa$ είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα είναι το σύνολο:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2,\ldots,\omega_\kappa\}.$$

Έτσι, στο πρώτο από τα παραπάνω πειράματα τύχης, αν με K συμβολίσουμε το αποτέλεσμα να φέρουμε "κεφαλή" και με Γ το αποτέλεσμα να φέρουμε "γράμματα", τότε ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{K, \Gamma\}$. Επίσης, στο δεύτερο από τα παραπάνω πειράματα τύχης η ένδειξη της άνω έδρας μπορεί να είναι ένας από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6. Επομένως, ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Ενδεχόμενα

Το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης λέγεται **ενδεχόμενο** (event) ή γεγονός. Για παράδειγμα, στη ρίψη ενός ζαριού τα σύνολα $A = \{2,4,6\}$, $B = \{1,3,5\}$ και $\Gamma = \{6\}$ είναι ενδεχόμενα.

Το A είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό, το B να φέρουμε περιττό αριθμό και το Γ να φέρουμε 6. Είναι φανερό ότι ένα ενδεχόμενο είναι υποσύνολο του δειγματικού χώρου. Ένα ενδεχόμενο λέγεται **απλό** όταν έχει ένα μόνο στοιχείο και **σύνθετο** αν έχει περισσότερα στοιχεία. Για παράδειγμα, το Γ είναι ένα απλό ενδεχόμενο, ενώ τα A και B είναι σύνθετα ενδεχόμενα. Όταν το αποτέλεσμα ενός πειράματος, σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο αυτό **πραγματοποιείται** ή **συμβαίνει**. Γι'αυτό τα στοιχεία ενός ενδεχομένου λέγονται και **ευνοϊκές περιπτώσεις** για την πραγματοποίησή του. Έτσι, για παράδειγμα, το ενδεχόμενο $A = \{2,4,6\}$ έχει τρεις ευνοϊκές περιπτώσεις και πραγματοποιείται, όταν φέρουμε 2 ή 4 ή 6.

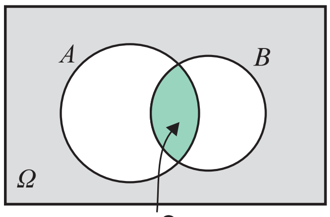
Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος θεωρείται ότι είναι ενδεχόμενο, το οποίο μάλιστα πραγματοποιείται πάντοτε, αφού όποιο και αν είναι το αποτέλεσμα του πειράματος θα ανήκει στο Ω. Γι'αυτό το Ω λέγεται **βέβαιο ενδεχόμενο**. Δεχόμαστε ακόμα ως ενδεχόμενο και το κενό σύνολο $\varnothing$ που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης. Γι'αυτό λέμε ότι το $\varnothing$ είναι το **αδύνατο ενδεχόμενο**.

Το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου A θα το συμβολίζουμε με $N(A)$. Επομένως, αν $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ και $A = \{2,4,6\}$ έχουμε $N(A) = 3$, $N(\Omega) = 6$ και $N(\varnothing\} = 0$.

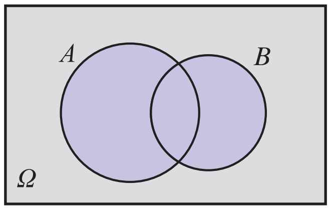
Πράξεις με Ενδεχόμενα

Όπως είδαμε, τα ενδεχόμενα είναι υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω. Επομένως, μεταξύ των ενδεχομένων ενός πειράματος μπορούν να οριστούν οι γνωστές πράξεις μεταξύ των συνόλων, από τις οποίες προκύπτουν νέα ενδεχόμενα. Έτσι, αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα, έχουμε:

• Το ενδεχόμενο $A \cap B$, που διαβάζεται “A τομή B” ή “A και B” και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B.

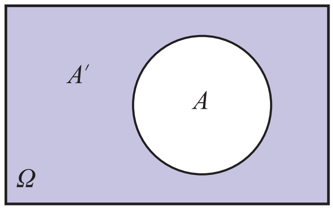


• Το ενδεχόμενο $A \cup B$, που διαβάζεται "A ένωση B" ή "A ή B" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B.

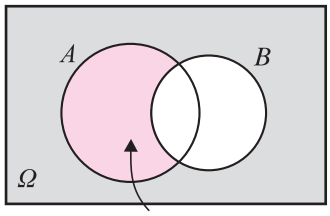


$A \cup B$

• Το ενδεχόμενο A', που διαβάζεται "όχι A" ή "συμπληρωματικό του A" και πραγματοποιείται, όταν δεν πραγματοποιείται το A. Το A' λέγεται και "αντίθετο του A".



• Το ενδεχόμενο A–B, που διαβάζεται "διαφορά του B από το A" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B. Είναι εύκολο να δούμε ότι $A - B = A \cap B'$.



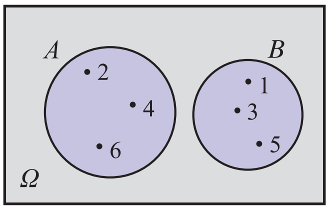
Στον παρακάτω πίνακα τα A και B συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός πειράματος και το ω ένα αποτέλεσμα του πειράματος αυτού. Στην αριστερή στήλη του πίνακα αναγράφονται διάφορες σχέσεις για τα A και B διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα, και στη δεξιά στήλη αναγράφονται οι ίδιες σχέσεις αλλά διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων.

Το ενδεχόμενο A πραγματοποιείται	$\omega \in A$
Το ενδεχόμενο A δεν πραγματοποιείται	$\omega \in A'$ (ή $\omega \notin A$)
Ένα τουλάχιστον από τα A και B πραγματοποιείται	$\omega \in A \cup B$
Πραγματοποιούνται αμφότερα τα A και B	$\omega \in A \cap B$
Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B	$\omega \in (A \cup B)'$
Πραγματοποιείται μόνο το A	$\omega \in A - B$ (ή $\omega \in A \cap B'$)
Η πραγματοποίηση του A συνεπάγεται την πραγματοποίηση του B	$A \subseteq B$

Για παράδειγμα, στη ρίψη ενός ζαριού έστω τα ενδεχόμενα $A = \{1,2,3,4\}$ και $B = \{2,4,6\}$. Αν το αποτέλεσμα της ρίψης είναι ο αριθμός 1, τότε τα ενδεχόμενα A, $A \cup B$, $A - B$, B' πραγματοποιούνται, ενώ τα A', B, $(A \cup B)'$, $(A - B)$, $A \cap B$ δεν πραγματοποιούνται.

Ασυμβίβαστα Ενδεχόμενα

Στη ρίψη ενός ζαριού αν A είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό και B το ενδεχόμενο να φέρουμε περιττό αριθμό, έχουμε $A = \{2,4,6\}$ και $B = \{1,3,5\}$. Παρατηρούμε ότι τα A και B δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν συγχρόνως, αφού δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο. Στην περίπτωση αυτή τα A και B λέγονται ασυμβίβαστα. Γενικά:



$A \cap B = \varnothing$

Δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B = \varnothing$.
Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα λέγονται επίσης **ξένα μεταξύ τους** ή **αμοιβαίως αποκλειόμενα.**

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η **Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις διαδοχικές φορές.**

i) Να γραφτεί ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος.

ii) Να παρασταθούν με αναγραφή τα ενδεχόμενα που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη ιδιότητα:

A_1: "Ο αριθμός των K υπερβαίνει τον αριθμό των Γ"

A_2: "Ο αριθμός των K είναι ακριβώς 2"

A_3: "Ο αριθμός των K είναι τουλάχιστον 2"

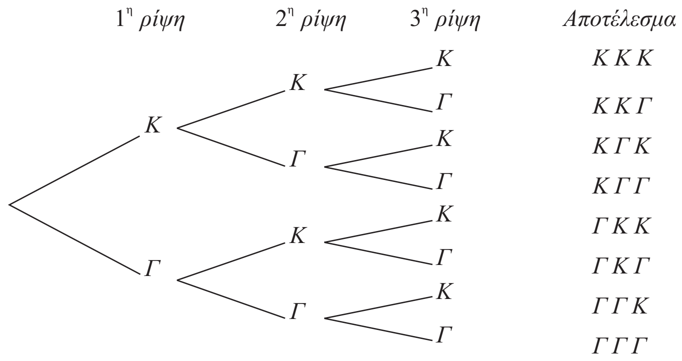
A_4: "Ίδια όψη και στις τρεις ρίψεις"

A_5: "Στην πρώτη ρίψη φέρνουμε K"

iii) Να βρεθούν τα ενδεχόμενα A'_3, $A_5 \cap A_2$, $A_5 \cup A_4$.

ΛΥΣΗ

i) Για να προσδιορίσουμε το δειγματικό χώρο, θα χρησιμοποιήσουμε ένα δεντροδιάγραμμα:



Άρα, ο δειγματικός χώρος του πειράματος αποτελείται από διατεταγμένες τριάδες με στοιχεία το K και το Γ και είναι

$$\Omega = \{KKK,\ KK\Gamma,\ K\Gamma K,\ K\Gamma\Gamma,\ \Gamma KK\ \Gamma K\Gamma,\ \Gamma\Gamma K,\ \Gamma\Gamma\Gamma\}.$$

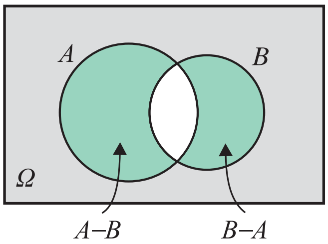
ii) Έχοντας υπόψη το δειγματικό χώρο Ω και την αντίστοιχη ιδιότητα έχουμε:

$A_1=\{KKK,\ KK\Gamma,\ K\Gamma K,\ \Gamma KK\}$
$A_2 = \{KK\Gamma,\ K\Gamma K,\ \Gamma KK\}$
$A_3 = \{KKK,\ KK\Gamma,\ K\Gamma K,\ \Gamma KK\}$ (Παρατηρούμε ότι $A_3 = A_1$)
$A_4 =\{KKK,\ \Gamma\Gamma\Gamma\}$
$A_5 = \{KKK,\ K\Gamma\Gamma,\ K\Gamma K,\ K\Gamma\Gamma\}$.

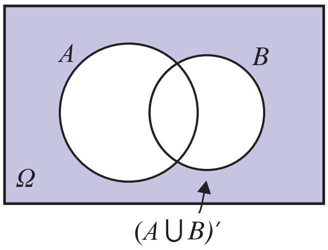
iii) Το A'_3 περιέχει εκείνα τα στοιχεία του δειγματικού χώρου που δεν περιέχει το A_3, περιέχει δηλαδή τα στοιχεία στα οποία ο αριθμός των K είναι μικρότερος από 2. Επομένως, $A'_3 =\{K\Gamma\Gamma,\ \Gamma K\Gamma,\ \Gamma\Gamma K,\ \Gamma\Gamma\Gamma\}$.
Το ενδεχόμενο $A_5 \cap A_2$ περιέχει τα κοινά στοιχεία των A_5 και A_2, δηλαδή τα στοιχεία με δύο ακριβώς K, εκ των οποίων το ένα στην πρώτη θέση. Επομένως, $A_5 \cap A_2=\{KK\Gamma,\ K\Gamma K\}$.
Το ενδεχόμενο $A_5 \cup A_4$ περιέχει τα στοιχεία που στην πρώτη θέση έχουν K ή τα στοιχεία που έχουν ίδιες και τις τρεις ενδείξεις. Επομένως, $A_5 \cup A_4 = \{KK\Gamma,\ K\Gamma K,\ KK\Gamma,\ KKK,\ \Gamma\Gamma\Gamma\}$.

2η **Δίνονται δύο ενδεχόμενα *Α* και *Β* ενός πειράματος με δειγματικό χώρο *Ω*. Να παρασταθούν με διαγράμματα Venn και να εκφραστούν με τη βοήθεια συνόλων τα ενδεχόμενα που ορίζονται με τις εκφράσεις:**
i) Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα *Α* και *Β*.
ii) Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα *Α* και *Β*.

ΛΥΣΗ



i) Επειδή θέλουμε να πραγματοποιείται μόνο το A ή μόνο το B, γραμμοσκιάζουμε τις επιφάνειες των A και B με εξαίρεση την τομή τους, δηλαδή την κοινή επιφάνειά τους.
Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή πραγματοποιείται ένα μόνο από τα $A - B$ και $B - A$. Άρα, το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το $(A - B) \cup (B - A)$ ή ισοδύναμα το $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$.



ii) Επειδή θέλουμε να μην πραγματοποιείται κανένα από τα A και B, γραμμοσκιάζουμε την επιφάνεια του Ω που είναι εκτός της ένωσης των A και B. Στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι το ζητούμενο σύνολο είναι συμπληρωματικό του $A \cup B$, δηλαδή το $(A \cup B)'$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες, μια άσπρη, μια μαύρη και μια κόκκινη. Κάνουμε το εξής πείραμα: παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε στο κουτί. Στη συνέχεια παίρνουμε μια δεύτερη μπάλα και καταγράφουμε επίσης το χρώμα της. (Όπως λέμε παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες με επανατοποθέτηση).
i) Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος;
ii) Ποιο είναι το ενδεχόμενο “η πρώτη μπάλα να είναι κόκκινη”;
iii) Ποιο είναι το ενδεχόμενο “να εξαχθεί και τις δυο φορές μπάλα με το ίδιο χρώμα”;

2. Να επιλυθεί το προηγούμενο πρόβλημα, χωρίς όμως τώρα να γίνει επανατοποθέτηση της πρώτης μπάλας πριν την εξαγωγή της δεύτερης. (Όπως λέμε παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες χωρίς επανατοποθέτηση).

3. Μια οικογένεια από την Αθήνα αποφασίζει να κάνει τις επόμενες διακοπές της στην Κύπρο ή στη Μακεδονία. Στην Κύπρο μπορεί να πάει με αεροπλάνο ή με πλοίο. Στη Μακεδονία μπορεί να πάει με το αυτοκίνητό της, με τρένο ή με αεροπλάνο. Αν ως αποτέλεσμα του πειράματος θεωρήσουμε τον τόπο διακοπών και το ταξιδιωτικό μέσο, τότε:

i) Να γράψετε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος

ii) Να βρείτε το ενδεχόμενο A: “Η οικογένεια θα πάει με αεροπλάνο στον τόπο των διακοπών της”.

4. Ένα ξενοδοχείο προσφέρει γεύμα που αποτελείται από τρία πιάτα. Το κύριο πιάτο, το συνοδευτικό και το γλυκό. Οι δυνατές επιλογές δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Γεύμα	Επιλογές
Κύριο πιάτο	Κοτόπουλο ή φιλέτο
Συνοδευτικό	Μακαρόνια ή ρύζι ή χόρτα
Γλυκό	Παγωτό ή τούρτα ή ζελέ

Ένα άτομο πρόκειται να διαλέξει ένα είδος από κάθε πιάτο,

i) Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος

ii) Να βρείτε το ενδεχόμενο A: “το άτομο επιλέγει παγωτό”

iii) Να βρείτε το ενδεχόμενο B: “το άτομο επιλέγει κοτόπουλο”

iv) Να βρείτε το ενδεχόμενο $A \cap B$

v) Αν Γ το ενδεχόμενο: “το άτομο επιλέγει ρύζι”, να βρείτε το ενδεχόμενο $(A \cap B) \cap \Gamma$.

5. Η διεύθυνση ενός νοσοκομείου κωδικοποιεί τους ασθενείς σύμφωνα με το αν είναι ασφαλισμένοι ή όχι και σύμφωνα με την κατάσταση της υγείας τους, η οποία χαρακτηρίζεται ως καλή, μέτρια, σοβαρή ή κρίσιμη. Η διεύθυνση καταγράφει με 0 τον ανασφάλιστο ασθενή και με 1 τον ασφαλισμένο, και στη συνέχεια δίπλα γράφει ένα από τα γράμματα α, β, γ ή δ, ανάλογα με το αν η κατάστασή του είναι καλή, μέτρια, σοβαρή ή κρίσιμη. Θεωρούμε το πείραμα της κωδικοποίησης ενός νέου ασθενούς. Να βρείτε:

i) Το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος.

ii) Το ενδεχόμενο A: “η κατάσταση του ασθενούς είναι σοβαρή ή κρίσιμη και είναι ανασφάλιστος”,

iii) Το ενδεχόμενο B: “η κατάσταση του ασθενούς είναι καλή ή μέτρια”,

iv) Το ενδεχόμενο $Γ$: “ο ασθενής είναι ασφαλισμένος”.

6. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα:

i) Ρίχνουμε ένα ζάρι. A είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε 3 και B είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό.

ii) Επιλέγουμε ένα άτομο. A είναι το ενδεχόμενο να έχει γεννηθεί στην Ελλάδα και B το ενδεχόμενο να είναι καθολικός,

iii) Επιλέγουμε μια γυναίκα. A είναι το ενδεχόμενο να έχει ηλικία άνω των 30 και B το ενδεχόμενο να είναι παντρεμένη πάνω από 30 χρόνια,

iv) Επιλέγουμε κάποιον με ένα αυτοκίνητο. A είναι το ενδεχόμενο το αυτοκίνητο του να είναι ευρωπαϊκό και B το ενδεχόμενο να είναι ασιατικό.

7. Μεταξύ των οικογενειών με τρία παιδιά επιλέγουμε τυχαία μια οικογένεια και εξετάζουμε τα παιδιά ως προς το φύλο και ως προς τη σειρά γέννησης τους. Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Δύο παίκτες θα παίξουν σκάκι και συμφωνούν νικητής να είναι εκείνος που πρώτος θα κερδίσει δύο παιχνίδια. Αν $α$ είναι το αποτέλεσμα να κερδίσει ο πρώτος παίκτης ένα παιχνίδι και $β$ είναι το αποτέλεσμα να κερδίσει ο δεύτερος παίκτης ένα παιχνίδι, να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

2. Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Να βρείτε τα ενδεχόμενα:

Α: “Το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης είναι μεγαλύτερο από το αποτέλεσμα της 2ης ρίψης”.

Β: “Το άθροισμα των ενδείξεων στις δύο ρίψεις είναι άρτιος αριθμός”

Γ: “Το γινόμενο των ενδείξεων στις δύο ρίψεις είναι μικρότερο του 5”

Στη συνέχεια να βρείτε τα ενδεχόμενα $A \cap B$, $A \cap Γ$, $B \cap Γ$, $(A \cap B) \cap Γ$.