



ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

- 1.1 Ισότητα τριγώνων.
- 1.2 Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων.
- 1.3 Θεώρημα του Θαλή.
- 1.4 Ομοιοθεσία.
- 1.5 Ομοιότητα.
- 1.6 Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων

Γενικές ασκήσεις 1ου Κεφαλαίου
Επανάληψη – Ανακεφαλαίωση



1.1 Ισότητα τριγώνων

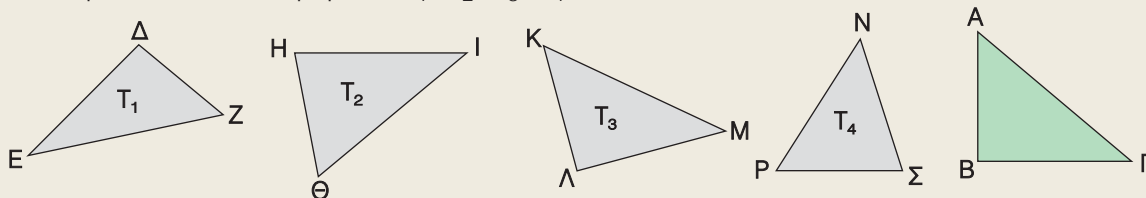


- ✓ *Θυμάμαι ποια είναι τα στοιχεία ενός τριγώνου (κύρια – δευτερεύοντα) και τα είδη των τριγώνων.*
- ✓ *Μαθαίνω πότε δύο τρίγωνα είναι ίσα και ποια είναι τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.*
- ✓ *Μαθαίνω ποια είναι τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.*



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

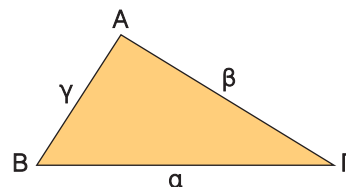
Αν μετατοπίσουμε κατάλληλα το τρίγωνο ΑΒΓ, χωρίς αυτό να μεταβληθεί, τότε θα ταυτιστεί με ένα από τα τρίγωνα T_1, T_2, T_3, T_4 .



1. Να αποτυπώσετε το τρίγωνο ΑΒΓ σε διαφανές χαρτί και να βρείτε με ποιο από τα τρίγωνα T_1, T_2, T_3, T_4 ταυτίζεται.
2. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:
 $AB = \dots, \quad B\Gamma = \dots, \quad \Gamma A = \dots, \quad \hat{A} = \dots, \quad \hat{B} = \dots$ και $\hat{\Gamma} = \dots$

Κύρια και δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου – Είδη τριγώνων

Σε κάθε τρίγωνο οι πλευρές και οι γωνίες του ονομάζονται **κύρια στοιχεία** του τριγώνου. Οι πλευρές ενός τριγώνου ΑΒΓ που βρίσκονται απέναντι από τις γωνίες του $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$ συμβολίζονται αντιστοίχως α, β, γ .

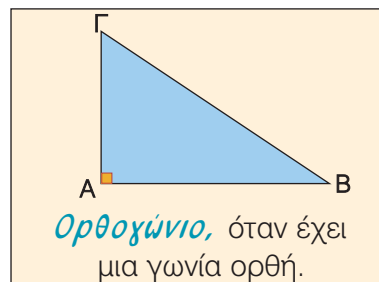
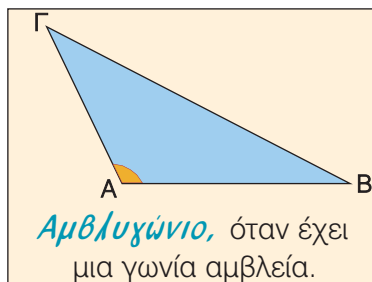
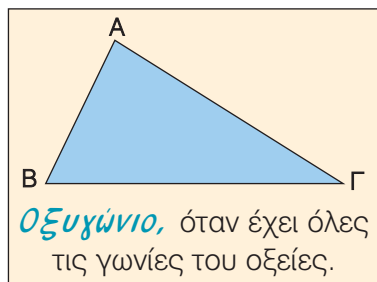


Για τις γωνίες κάθε τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$

Η γωνία του τριγώνου που περιέχεται μεταξύ δύο πλευρών λέγεται **περιεχόμενη** γωνία των πλευρών αυτών, π.χ. περιεχόμενη γωνία των πλευρών ΑΒ, ΑΓ είναι η γωνία \hat{A} .

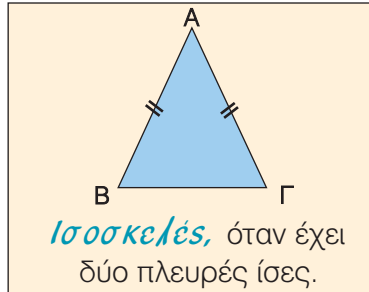
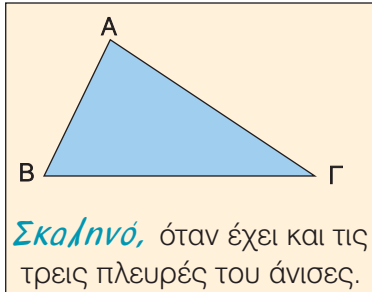
Οι γωνίες του τριγώνου που έχουν κορυφές τα άκρα μιας πλευράς λέγονται **προσκειμένες** γωνίες της πλευράς αυτής π.χ. προσκειμένες γωνίες της πλευράς ΒΓ είναι οι \hat{B} και $\hat{\Gamma}$.

Ένα τρίγωνο ανάλογα με το είδος των γωνιών του ονομάζεται:



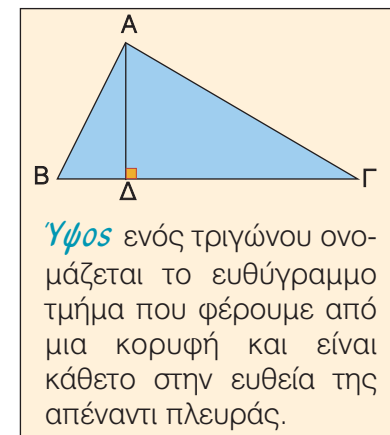
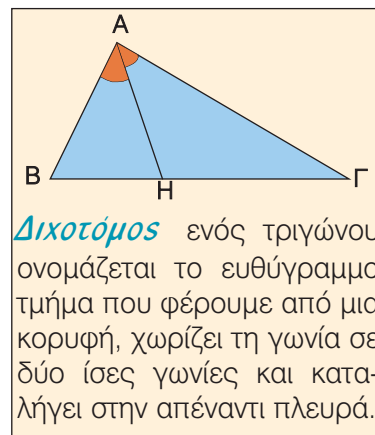
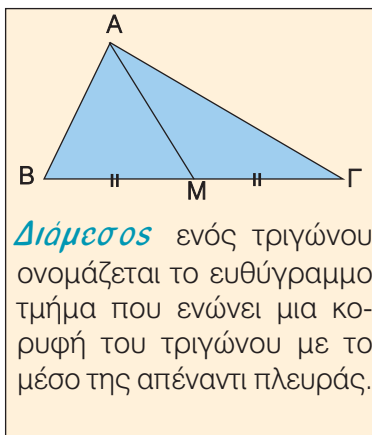
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία ονομάζεται **υποτείνουσα**, ενώ οι άλλες δύο ονομάζονται **κάθετες πλευρές**.

Ένα τρίγωνο ανάλογα με τις σχέσεις που συνδέονται οι πλευρές του ονομάζεται:



Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ η πλευρά $B\Gamma$ ονομάζεται **βάση** του και το σημείο A **κορυφή** του.

Σ' ένα τρίγωνο, εκτός από τα κύρια στοιχεία, υπάρχουν και τα **δευτερεύοντα στοιχεία**, που είναι οι διάμεσοι, οι διχοτόμοι και τα ύψη.



Ίσα τρίγωνα

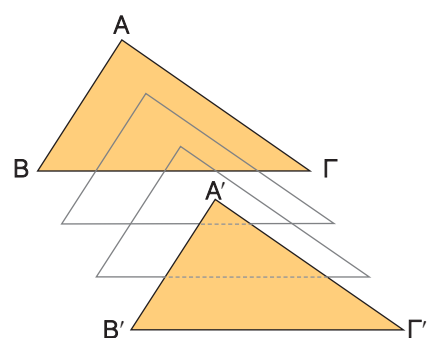
Αν μετατοπίσουμε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ σε μια άλλη θέση και θεωρήσουμε ότι κατά τη μετατόπισή του αυτό δε μεταβάλλεται, τότε οι κορυφές του A, B, Γ θα πάρουν τις θέσεις των σημείων A', B', Γ' αντιστοίχως και το τρίγωνο $AB\Gamma$ θα πάρει τη θέση του τριγώνου $A'B'\Gamma'$. Αφού τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ ταυτίζονται, τότε οι αντίστοιχες πλευρές και γωνίες τους θα είναι ίσες, αφού και αυτές ταυτίζονται. Έτσι έχουμε:

$$AB = A'B', \quad B\Gamma = B'\Gamma', \quad A\Gamma = A'\Gamma' \quad \text{και}$$

$$\hat{A} = \hat{A}', \quad \hat{B} = \hat{B}', \quad \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'.$$

Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$, για τα οποία ισχύουν οι προηγούμενες ισότητες, λέμε ότι είναι ίσα. Δηλαδή

- Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι ίσα.



Ισχύει ακόμη και το αντίστροφο. Δηλαδή

- Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε θα έχουν τις πλευρές τους και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες μία προς μία.

Στο εξής σε κάθε μετατόπιση τριγώνου θα θεωρούμε ότι αυτό δε μεταβάλλεται. Αυτό σημαίνει ότι, αν έχουμε δύο ίσα τρίγωνα και μετατοπίσουμε κατάλληλα το ένα από αυτά, τότε τα τρίγωνα ταυτίζονται.

Για να αποδείξουμε ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα δεν είναι απαραίτητο να αποδείξουμε ότι έχουν όλες τις πλευρές τους και τις αντίστοιχες γωνίες ίσες μία προς μία.

Στη συνέχεια, θα μάθουμε προτάσεις με τις οποίες διαπιστώνουμε ότι και με λιγότερα στοιχεία είναι δυνατόν να διακρίνουμε αν δύο τρίγωνα είναι ίσα.

Οι προτάσεις αυτές είναι γνωστές ως **κριτήρια ισότητας τριγώνων**.

Κριτήρια ισότητας τριγώνων

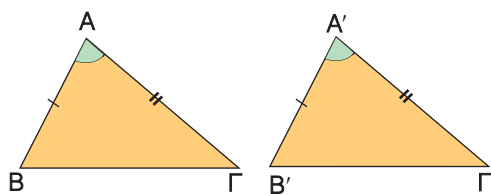
1^ο κριτήριο ισότητας (Π – Γ – Π)

Για δύο τρίγωνα ισχύει η παρακάτω **βασική ιδιότητα ισότητας**

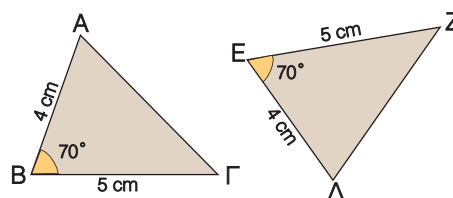
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα.

Πράγματι, σχεδιάζουμε δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ που να έχουν δύο πλευρές ίσες $AB = A'B'$, $A\Gamma = A'\Gamma'$ και την περιεχόμενη γωνία τους ίση $\hat{A} = \hat{A}'$.

Αν μετατοπίσουμε το τρίγωνο $AB\Gamma$, έτσι ώστε η γωνία \hat{A} να συμπίσει με την ίση της γωνία \hat{A}' και η πλευρά AB να συμπίσει με την ίση της πλευρά $A'B'$, τότε η πλευρά $A\Gamma$ θα συμπίσει με την ίση της πλευρά $A'\Gamma'$ και οι κορυφές B, Γ θα συμπίσουν με τις κορυφές B', Γ' αντιστοίχως. Άρα τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ ταυτίζονται, οπότε είναι ίσα.



Για παράδειγμα, τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ του διπλανού σχήματος είναι ίσα, αφού έχουν δύο πλευρές ίσες ($AB = \Delta E = 4 \text{ cm}$, $B\Gamma = EZ = 5 \text{ cm}$) και την περιεχόμενη γωνία τους ίση ($\hat{B} = \hat{E} = 70^\circ$). Επομένως, τα τρίγωνα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή



$$A\Gamma = \Delta Z, \hat{\Gamma} = \hat{Z} \text{ και } \hat{\Delta} = \hat{A}.$$

Παρατηρούμε ότι οι ίσες γωνίες $\hat{\Gamma}, \hat{Z}$ βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές $AB, \Delta E$. Γενικά:

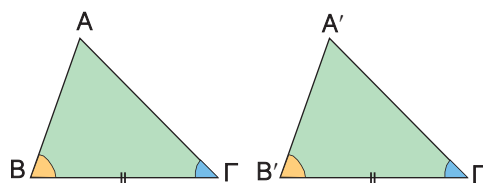
Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.

2^ο κριτήριο ισότητας (Γ – Π – Γ).

Σχεδιάζουμε δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ που να έχουν μία πλευρά ίση $B\Gamma = B'\Gamma'$ και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες $\hat{B} = \hat{B}'$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$. Αν μετατοπίσουμε το τρίγωνο $AB\Gamma$, έτσι ώστε η πλευρά του $B\Gamma$ να συμπέσει με την ίση της πλευρά $B'\Gamma'$ και η γωνία \hat{B} να συμπέσει με τη ίση της γωνία \hat{B}' , τότε η γωνία $\hat{\Gamma}$ θα συμπέσει με την ίση της γωνία $\hat{\Gamma}'$ και η κορυφή A θα συμπέσει με την κορυφή A' .

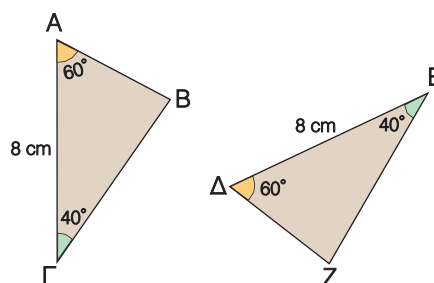
Άρα τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ ταυτίζονται, οπότε είναι ίσα. Επομένως

Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.



Για παράδειγμα, τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ του διπλανού σχήματος είναι ίσα, αφού έχουν μία πλευρά ίση ($A\Gamma = \Delta E = 8 \text{ cm}$) και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 60^\circ$, $\hat{\Gamma} = \hat{E} = 40^\circ$). Επομένως τα τρίγωνα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή

$$\hat{B} = \hat{Z}, AB = \Delta Z, B\Gamma = EZ.$$



Παρατηρούμε ότι οι ίσες πλευρές AB , ΔZ βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{\Gamma}$, \hat{E} .

Γενικά:

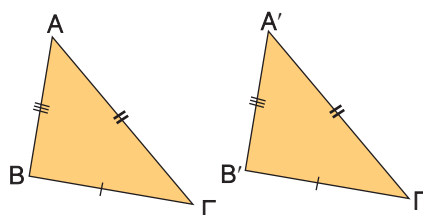
Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.

3^ο κριτήριο ισότητας (Π – Π – Π).

Σχεδιάζουμε δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ που να έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες

$$(AB = A'B', B\Gamma = B'\Gamma', A\Gamma = A'\Gamma').$$

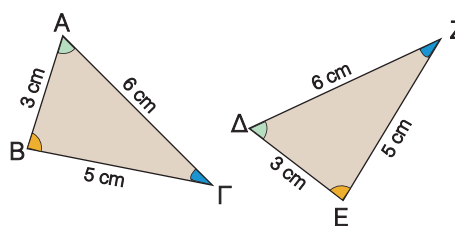
Αν μετατοπίσουμε κατάλληλα το τρίγωνο $AB\Gamma$, τότε αυτό ταυτίζεται με το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$, οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα. Επομένως



Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

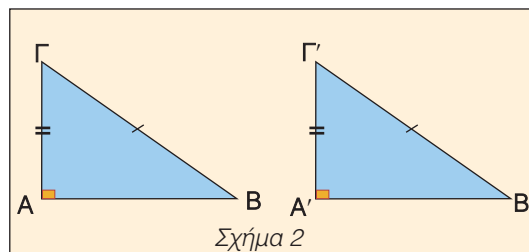
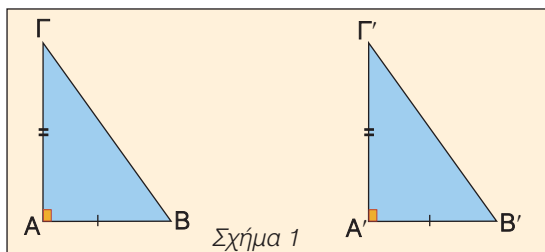
Για παράδειγμα, τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ του διπλανού σχήματος είναι ίσα, αφού έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες, $AB = \Delta E = 3 \text{ cm}$, $A\Gamma = \Delta Z = 6 \text{ cm}$ και $B\Gamma = EZ = 5 \text{ cm}$. Άρα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή

$$\hat{A} = \hat{\Delta}, \hat{B} = \hat{E} \text{ και } \hat{\Gamma} = \hat{Z}.$$



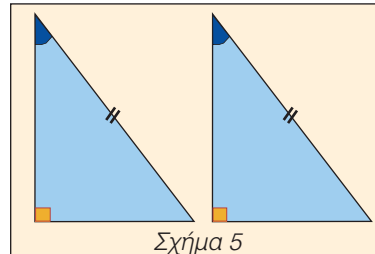
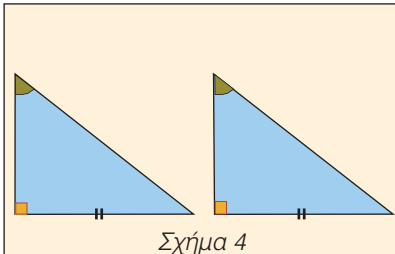
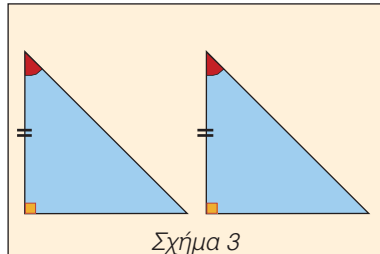
Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Τα προηγούμενα κριτήρια ισότητας τριγώνων μπορούμε να τα εφαρμόσουμε και στα ορθογώνια τρίγωνα.



Στο σχήμα 1 τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα, γιατί έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, αφού αυτή είναι ορθή. Στο σχήμα 2 τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά ίση και όπως προκύπτει από το Πυθαγόρειο θεώρημα θα έχουν και την τρίτη πλευρά τους ίση. Άρα τα τρίγωνα θα είναι ίσα, αφού έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία.

Οι δύο αυτές περιπτώσεις συνοψίζονται στο εξής κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων. **Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.**



Στο σχήμα 3 τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία.

Στα σχήματα 4 και 5 τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, οπότε θα έχουν και την τρίτη γωνία τους ίση, αφού το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180° . Άρα είναι ίσα γιατί έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία.

Οι τρεις αυτές περιπτώσεις συνοψίζονται στο εξής κριτήριο ισότητας των ορθογωνίων τριγώνων.

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση, τότε είναι ίσα.

Από τα προηγούμενα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων διαπιστώνουμε ότι:

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν

- δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία ή
- μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

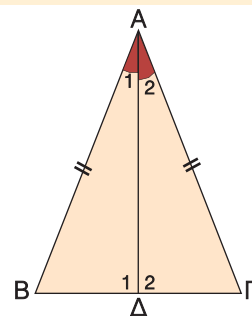
- 1** Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρουμε τη διχοτόμο $A\Delta$.
- α) Να συγκριθούν τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta\Gamma$.
 β) Να αποδειχθεί ότι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ και ότι η διχοτόμος $A\Delta$ είναι διάμεσος και ύψος.

Λύση

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Delta$, $A\Delta\Gamma$ και παρατηρούμε ότι έχουν:

- $A\Delta = A\Delta$, κοινή πλευρά
- $AB = A\Gamma$ από την υπόθεση
- $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, αφού $A\Delta$ διχοτόμος της γωνίας \widehat{A} .

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση.



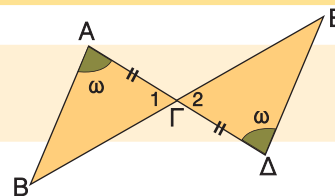
β) Επειδή τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta\Gamma$ είναι ίσα, θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, $B\Delta = \Delta\Gamma$ και $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2$.

Αφού είναι $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2$ και $\widehat{\Delta}_1 + \widehat{\Delta}_2 = 180^\circ$, θα έχουμε $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2 = 90^\circ$, οπότε η διχοτόμος $A\Delta$ είναι και ύψος. Η διχοτόμος $A\Delta$ είναι και διάμεσος, αφού $B\Delta = \Delta\Gamma$. Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

- α) Οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες.
 β) Η διχοτόμος, το ύψος και η διάμεσος που φέρουμε από την κορυφή προς τη βάση του συμπίπτουν.

- 2** Στο διπλανό σχήμα είναι $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = \omega$ και $A\Gamma = \Gamma\Delta$.
 Να αποδειχθεί ότι $AB = \Delta E$.



Λύση

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $\Gamma\Delta E$ και παρατηρούμε ότι έχουν:

- $A\Gamma = \Gamma\Delta$ από την υπόθεση
- $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$ από την υπόθεση
- $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Gamma}_2$ γιατί είναι κατακορυφήν γωνίες

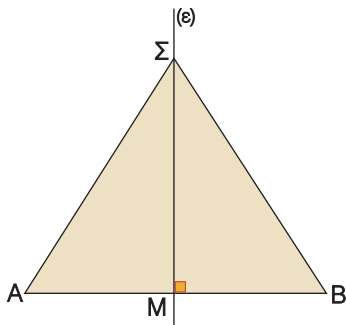
Άρα τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ είναι ίσα, γιατί έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτή την πλευρά γωνίες ίσες μία προς μία.

Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν και όλα τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε $AB = \Delta E$.

- 3** Να αποδειχθεί ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

Λύση

Φέρουμε τη μεσοκάθετο ϵ ενός ευθύγραμμου τμήματος AB που το τέμνει στο



σημείο M. Αν Σ είναι τυχαίο σημείο της μεσοκαθέτου, θα αποδείξουμε ότι $\Sigma A = \Sigma B$. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta AM\Sigma$, $\Delta BM\Sigma$ και παρατηρούμε ότι έχουν:

- $\Sigma M = \Sigma M$, κοινή πλευρά και
- $AM = MB$, αφού το M είναι μέσον του AB.

Άρα τα ορθογώνια αυτά τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε $\Sigma A = \Sigma B$.

Χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος

Από το προηγούμενο παράδειγμα συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

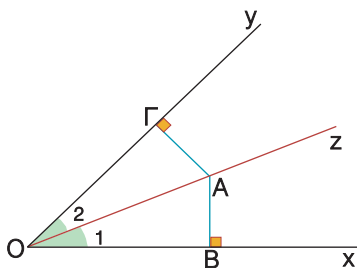
Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

Αποδεικνύεται ακόμη ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή

Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος.

4 Να αποδειχθεί ότι κάθε σημείο της διχοτόμου γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.

Λύση



Φέρνουμε τη διχοτόμο Oz της γωνίας \widehat{xOy} και πάνω σ' αυτήν παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο A. Αν AB, AG είναι οι αποστάσεις του σημείου A από τις πλευρές της γωνίας, θα αποδείξουμε ότι $AB = AG$.

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΔOAB , ΔOAG και παρατηρούμε ότι έχουν:

- $OA = OA$ κοινή πλευρά και
- $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$, αφού η Oz είναι διχοτόμος της γωνίας \widehat{xOy} .

Άρα τα ορθογώνια αυτά τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν αντίστοιχα μια πλευρά και μια οξεία γωνία ίση.

Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε $AB = AG$.

Χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου μιας γωνίας

Από το προηγούμενο παράδειγμα συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.

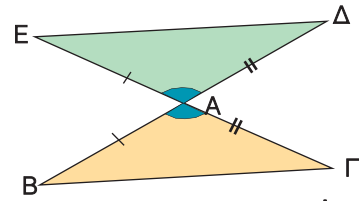
Αποδεικνύεται ακόμη ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή

Κάθε σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές μιας γωνίας είναι σημείο της διχοτόμου της.

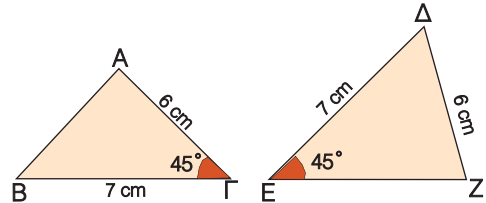


ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

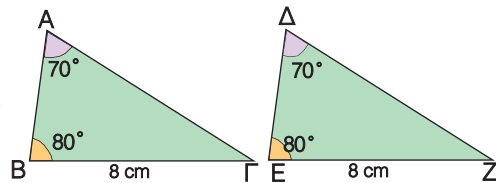
1 Να εξηγήσετε γιατί είναι ίσα τα τρίγωνα ABΓ και AED του διπλανού σχήματος και να συμπληρώσετε τις ισότητες $\hat{B} = \dots$, $\hat{\Gamma} = \dots$ και $B\Gamma = \dots$.



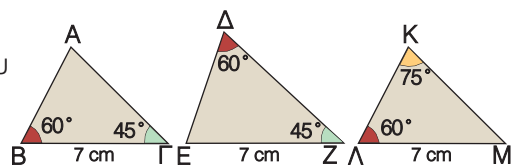
2 Να εξηγήσετε γιατί δεν είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος, αν και έχουν δύο πλευρές ίσες και μια γωνία ίση.



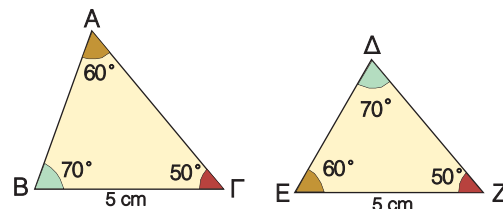
3 Να εξηγήσετε γιατί είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος και να συμπληρώσετε τις ισότητες $AB = \dots$ και $A\Gamma = \dots$.



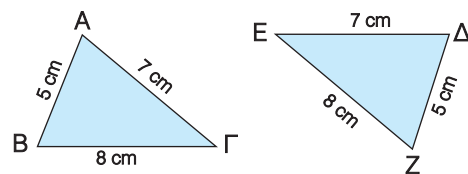
4 Να βρείτε το ζεύγος των ίσων τριγώνων του διπλανού σχήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



5 Είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



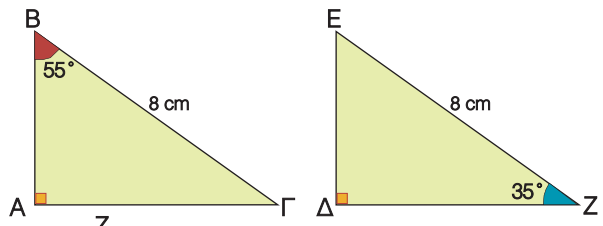
6 Να εξηγήσετε γιατί είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος και να συμπληρώσετε τις ισότητες $\hat{A} = \dots$, $\hat{B} = \dots$ και $\hat{\Gamma} = \dots$.



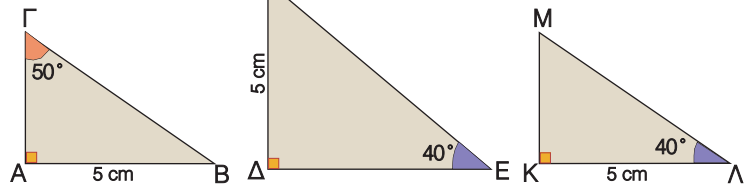
7 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

- α) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
- β) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
- γ) Σε δύο τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.
- δ) Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.
- ε) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη τους γωνία ίση.
- στ) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη τους πλευρά ίση.

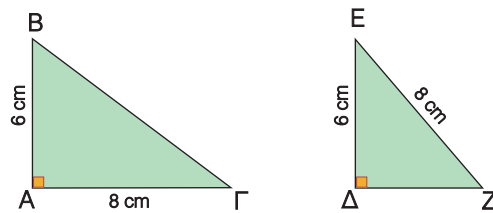
- 8** Είναι ίσα τα ορθογώνια τρίγωνα του διπλανού σχήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



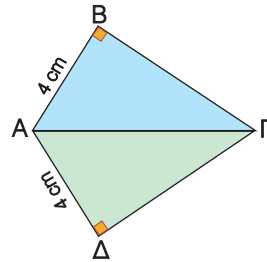
- 9** Να βρείτε το ζεύγος των ίσων τριγώνων. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



- 10** Τα ορθογώνια τρίγωνα του διπλανού σχήματος έχουν δύο πλευρές ίσες. Να εξηγήσετε γιατί δεν είναι ίσα.

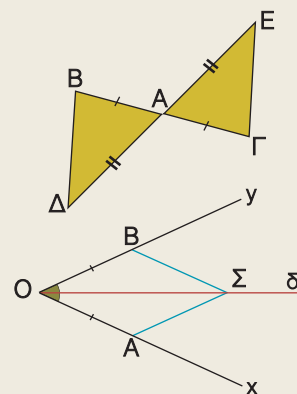


- 11** Να αιτιολογήσετε γιατί είναι ίσα τα ορθογώνια τρίγωνα ABΓ και AΓΔ.

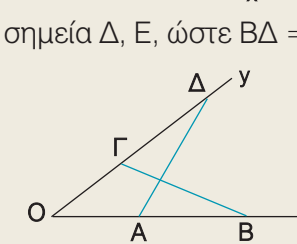


ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- 1** Στο διπλανό σχήμα είναι $AB = AG$ και $AD = AE$. Να αποδείξετε ότι $BD = GE$.

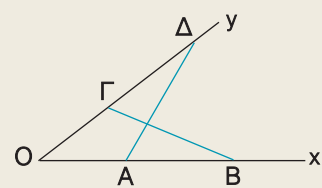


- 2** Στο διπλανό σχήμα η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας \widehat{xOy} . Αν $OA = OB$ και Σ τυχαίο σημείο της διχοτόμου, να αποδείξετε ότι $SA = SB$.

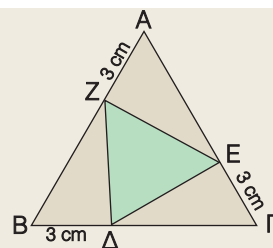


- 3** Στη βάση BΓ ενός ισοσκελούς τριγώνου ABΓ να πάρετε σημεία Δ, Ε, ώστε $BD = GE$. Να αποδείξετε ότι $AD = AE$.

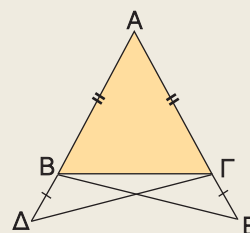
- 4** Στο διπλανό σχήμα είναι $OA = OG$ και $OB = OD$. Να αποδείξετε ότι $BΓ = AD$.



- 5 Κάθε πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 8 cm. Αν είναι $AZ = B\Delta = \Gamma E = 3$ cm, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔEZ είναι ισόπλευρο.



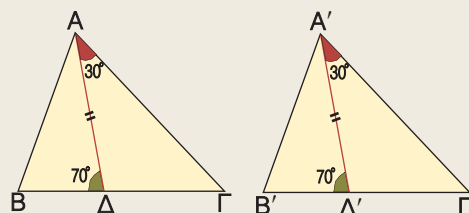
- 6 Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών AB , $A\Gamma$ ενός ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ να πάρετε αντιστοίχως τμήματα $B\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta} = \hat{E}$.



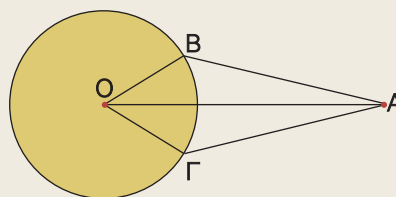
- 7 Σ' ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ η διαγώνιος $A\Gamma$ διχοτομεί τις γωνίες \hat{A} και $\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι $AB = A\Delta$ και $B\Gamma = \Gamma\Delta$.

- 8 Να αποδείξετε ότι οι απέναντι πλευρές ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες.

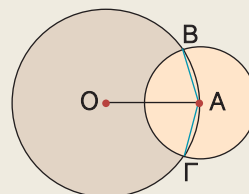
- 9 Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ του διπλανού σχήματος έχουν τις διχοτόμους $A\Delta$ και $A'\Delta'$ ίσες. Να αποδείξετε ότι:
 α) $AB = A'B'$
 β) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.



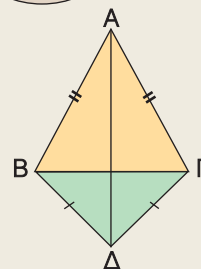
- 10 Στο διπλανό σχήμα το σημείο A ισαπέχει από τα σημεία B και Γ ενός κύκλου που έχει κέντρο το σημείο O . Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OAB και OAG είναι ίσα.



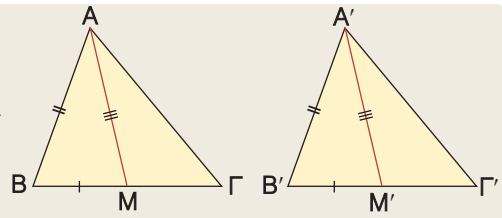
- 11 Αν O , A είναι τα κέντρα των κύκλων του διπλανού σχήματος, να αποδείξετε ότι η AO διχοτομεί τη γωνία \hat{BAG} .



- 12 Τα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta B\Gamma$ του διπλανού σχήματος έχουν κοινή βάση $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι η $A\Delta$ διχοτομεί τις γωνίες \hat{A} και $\hat{\Delta}$.

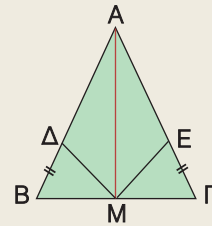


- 13** Στα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ του διπλανού σχήματος οι διάμεσοι AM και $A'M'$ είναι ίσες. Αν $AB = A'B'$ και $BM = B'M'$, τότε να αποδείξετε ότι:



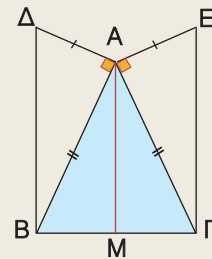
- α) $\hat{B} = \hat{B}'$.
β) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

- 14** Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ το σημείο M είναι μέσο της βάσης $B\Gamma$. Αν είναι $BD = GE$, να αποδείξετε ότι:



- α) το τρίγωνο $M\Delta E$ είναι ισοσκελές
β) τα τρίγωνα $A\Delta M$ και AEM είναι ίσα.

- 15** Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) να φέρετε $AD \perp AB$ και $AE \perp A\Gamma$. Αν είναι $AD = AE$, να αποδείξετε ότι $BD = GE$.

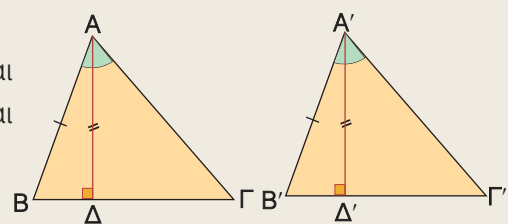


- 16** Σε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{B} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και $AB = A\Delta$. Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = \Gamma\Delta$ και ότι η $A\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του $B\Delta$.

- 17** Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) να φέρετε τη διχοτόμο $B\Delta$. Αν $\Delta E \perp B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $AB = BE$.

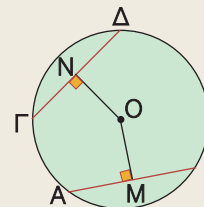
- 18** Μια ευθεία (ϵ) διέρχεται από το μέσον M ενός τμήματος AB . Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B ισαπέχουν από την ευθεία (ϵ).

- 19** Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $\hat{A} = \hat{A}'$ και $AB = A'B'$. Αν τα ύψη τους $A\Delta$ και $A'\Delta'$ είναι ίσα, να αποδείξετε ότι:

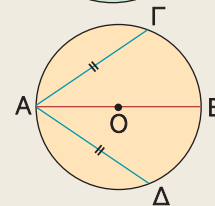


- α) $\hat{B} = \hat{B}'$
β) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

- 20** Αν οι χορδές $AB, \Gamma\Delta$ ενός κύκλου είναι ίσες, να αποδείξετε ότι και τα αποστήματά τους OM, ON είναι ίσα και αντιστρόφως.



- 21** Στο διπλανό σχήμα η AB είναι διάμετρος του κύκλου. Αν οι χορδές $A\Gamma$ και $A\Delta$ είναι ίσες, να αποδείξετε ότι και οι χορδές $B\Gamma$ και $B\Delta$ είναι ίσες.



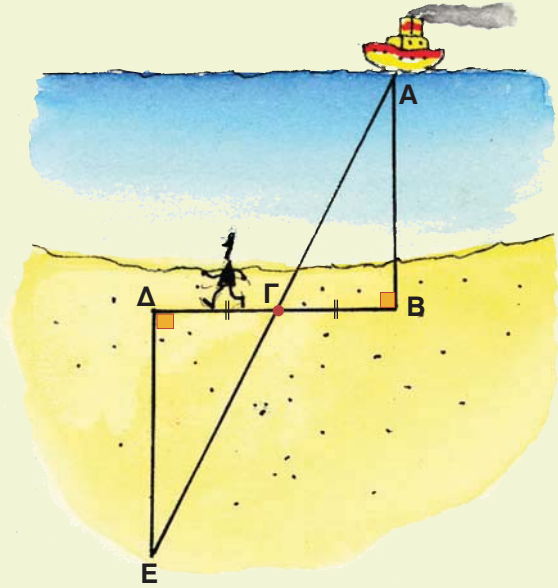
ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



Υπολογισμός της απόστασης ενός πλοίου από τη στεριά

Αν ένα πλοίο βρίσκεται στη θέση A στη θάλασσα, εμείς στεκόμαστε στη θέση B στη στεριά και θέλουμε να υπολογίσουμε την απόσταση AB , τότε:

- Ξεκινάμε από το σημείο B και περπατώντας πάνω στην παραλία κάθετα στην AB διανύουμε μια απόσταση $BΓ$. Στο σημείο $Γ$ βάζουμε ένα σημάδι, π.χ. στερεώνουμε ένα ραβδί και συνεχίζοντας πάνω στην ίδια ευθεία διανύουμε την απόσταση $ΓΔ = BΓ$.
- Στο σημείο $Δ$ αφού βάλουμε ένα σημάδι, π.χ. μια πέτρα, κάνουμε στροφή και περπατώντας κάθετα στη $BΔ$ σταματάμε όταν βρεθούμε σ' ένα σημείο E , από το οποίο τα σημεία A και $Γ$ φαίνονται να είναι πάνω στην ίδια ευθεία.



Η ζητούμενη απόσταση AB είναι ίση με την απόσταση DE την οποία μπορούμε να μετρήσουμε, αφού είναι πάνω στη στεριά.

Τη μέθοδο αυτή, λέγεται, ότι εφάρμοσε πριν από 2.500 χρόνια περίπου ο Θαλής ο Μιλήσιος.

Πώς ήταν σίγουρος ο Θαλής ότι $AB = DE$; Μπορείτε να το αποδείξετε; Βρείτε τις πέντε προτάσεις που απέδειξε ο Θαλής και σημειώστε ποια απ' αυτές χρησιμοποίησε για να υπολογίσει την απόσταση του πλοίου από τη στεριά.