*2.* *Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1\llcorner$) είναι $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ τότε ο λόγος $\frac{\beta}{\gamma}$ είναι ίσος με:*

*α.* $\frac{1}{2}$ *β.* 1 *γ.* $\sqrt{3}$ *δ.* 2 *ε.* 3

*Κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση και αιτιολογήστε την απάντησή σας.*

*3.* *Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1\llcorner$) φέρουμε το ύψος ΑΔ. Αν είναι ΑΒ=5 και ΒΔ = $\frac{25}{13}$, να διατάξετε κατά αύξουσα σειρά μήκους τα τμήματα: ΑΓ, ΒΓ, ΓΔ και ΑΔ.*

## Αποδεικτικές Ασκήσεις

*1.* *Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο, που έχει πλευρές $\alpha = \kappa^2+\lambda^2$, $\beta = 2\kappa\lambda$ και $\gamma = \kappa^2 - \lambda^2$, όπου κ, λ θετικοί ακέραιοι με $\kappa>\lambda$, είναι ορθογώνιο.*

*2.* *Αν ΑΕ, ΑΖ είναι αντίστοιχα οι προβολές δύο χορδών ΑΓ και ΑΔ ενός κύκλου σε μία διάμετρό του ΑΒ, να αποδείξετε ότι $AZ \cdot AE^2 = A\Gamma \cdot A\Delta^2$.*

*3.* *Αν Δ είναι μέσο της κάθετης πλευράς ΑΓ ενός ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 1\llcorner$) και Ε η προβολή του στη ΒΓ, τότε να αποδείξετε ότι $E\Gamma^2 + AB^2 = EB^2$. Στη συνέχεια διατάξτε κατά αύξουσα σειρά μήκους τα τμήματα ΔΒ, ΕΒ, ΕΓ.*

*4.* *Δύο ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' ($\hat{A} = \hat{A}' = 1\llcorner$) έχουν $\mu_\beta = \mu_{\beta'}$ και $\mu_\gamma = \mu_{\gamma'}$.*

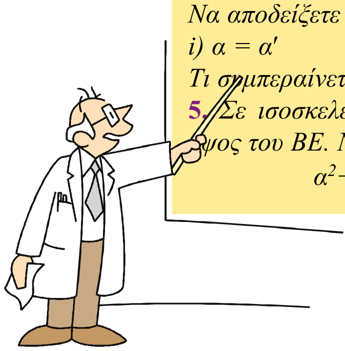
*Να αποδείξετε ότι:*

*i)* $\alpha = \alpha'$ *ii)* $\beta = \beta'$.

*Τι συμπεραίνετε για τα ΑΒΓ και Α'Β'Γ';*

*5.* *Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) φέρουμε το ύψος του ΒΕ. Να αποδείξετε ότι*

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2= 3BE^2 +2AE^2+\Gamma E^2.$$



## Σύνθετα θέματα

*1.* *Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1\llcorner$) και το ύψος του ΑΔ. Αν Ε, Ζ είναι οι προβολές του Δ πάνω στις ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :*

*i)* $\frac{AB^3}{A\Gamma^3} = \frac{BE}{\Gamma Z}$ *ii)* $A\Delta^3 = B\Gamma \cdot \Delta E \cdot \Delta Z$.

*2.* *Δίνονται δύο κύκλοι (Κ,R) και (Λ,ρ) που εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Αν ΒΓ είναι το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα τους και (Ο,σ) ο κύκλος που εφάπτεται στους (Κ,R), (Λ,ρ) και στη ΒΓ, να αποδείξετε ότι:*

*i)* $B\Gamma = 2\sqrt{R\rho}$ *ii)* $\frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$.

*3.* *Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{B} = 1\llcorner$. Αν Μ, Ν τα μέσα των διαγωνίων ΒΔ, ΑΓ αντίστοιχα και Κ το σημείο τομής της ΑΜ με τη ΒΓ να αποδείξετε ότι :*

*i) το ΑΒΚΔ είναι ορθογώνιο,*

*ii)* $\Delta\Gamma^2 - AB^2 = 4MN^2$.

*4.* *Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο να αποδείξετε ότι* $2\mu_\alpha^2 \geq \beta\gamma$.

*5.* *Θεωρούμε κύκλο (Ο,R), διάμετρό του ΑΒ και μία χορδή του ΓΔ που τέμνει την ΑΒ στο Ε και σχηματίζει με αυτή γωνία 45°. Να αποδείξετε ότι*

$$E\Gamma^2 + E\Delta^2 = 2R^2.$$

*6.* *Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1\llcorner$) και το ύψος του ΑΔ. Αν x, y και ω είναι αντίστοιχα τα μήκη οποιωνδήποτε ομόλογων γραμμικών στοιχείων των τριγώνων (π.χ. διαμέσων, υψών, ακτίνων εγγεγραμμένων κύκλων κτλ.) ΔΑΒ, ΔΑΓ και ΑΒΓ, τότε $x^2 + y^2 = \omega^2$.*

## 9.3 Γεωμετρικές κατασκευές

Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος και του θεωρήματος IV αντιμετωπίζουμε τα παρακάτω βασικά προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών ευθύγραμμων τμημάτων .

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

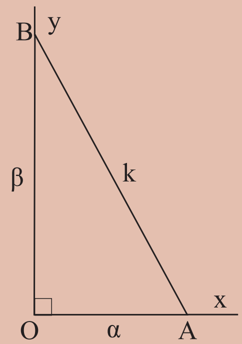
**Αν α, β είναι γνωστά τμήματα, να κατασκευάσετε το τμήμα k , που ορίζεται από την ισότητα : (i) $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, (ii) $k = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$.**

**Λύση**

**(i)** Η δοσμένη ισότητα γράφεται ισοδύναμα $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$, οπότε το ζητούμενο τμήμα k είναι υποτείνουσα ορθογώνιου τριγώνου με κάθετες πλευρές α, β.
Επομένως, αν πάνω στις κάθετες πλευρές (σχ.7) Ox, Oy μίας ορθής γωνίας $x\hat{O}y$ πάρουμε αντίστοιχα τα σημεία Α, Β, ώστε ΟΑ=α και ΟΒ=β, τότε

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

και επομένως το τμήμα ΑΒ είναι το ζητούμενο τμήμα k .
Είναι φανερό ότι το τμήμα k κατασκευάζεται για οποιαδήποτε τμήματα α, β.



*Σχήμα 7*

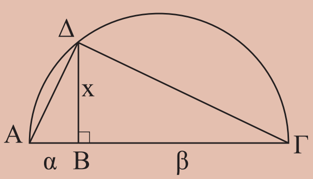
**(ii)** Η δοσμένη ισότητα γράφεται ισοδύναμα $k^2 = \alpha^2 - \beta^2$ η οποία σημαίνει ότι το ζητούμενο τμήμα k είναι η μία κάθετη πλευρά ορθογώνιου τριγώνου με υποτείνουσα α και άλλη κάθετη πλευρά το β. Η κατασκευή είναι όμοια της (i).

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

**Αν α, β είναι γνωστά τμήματα, να κατασκευάσετε το τμήμα x , που ορίζεται από την ισότητα $x = \sqrt{\alpha\beta}$. Το τμήμα x είναι η *μέση ανάλογος* των α, β.**

**Λύση**

Η δοσμένη ισότητα γράφεται ισοδύναμα $x^2 = \alpha\beta$ η οποία σημαίνει ότι το x είναι το ύψος του ορθογώνιου τριγώνου, που χωρίζει την υποτείνουσα σε δύο τμήματα ίσα με α και β αντίστοιχα.
Παίρνουμε επομένως σε μία ευθεία διαδοχικά τα τμήματα ΑΒ=α και ΒΓ=β (σχ.8). Γράφουμε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΓ και στο Β υψώνουμε κάθετο στην ΑΓ, που τέμνει το ημικύκλιο στο Δ. Σχηματίζουμε το τρίγωνο ΔΑΓ το οποίο είναι ορθογώνιο ($\hat{\Delta}=1\llcorner$). Επομένως έχουμε $\Delta B^2 = AB \cdot B\Gamma = \alpha\beta$ και κατά συνέπεια το τμήμα ΔΒ είναι το ζητούμενο. Είναι φανερό ότι το τμήμα x κατασκευάζεται για οποιαδήποτε τμήματα α, β.



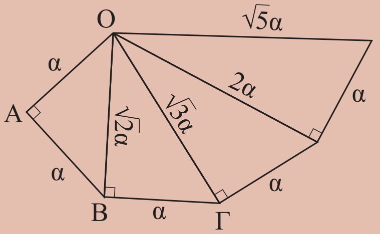
*Σχήμα 8*

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

**Αν α είναι γνωστό τμήμα, να κατασκευασθεί τμήμα ίσο με $\sqrt{2}$ α, $\sqrt{3}$ α, $\sqrt{5}$ α, … , $\sqrt{ν}$ α με ν φυσικό μεγαλύτερο ή ίσο του δύο.**

**Λύση**

Αν $x = \sqrt{2}\,α$, τότε $x^2 = 2α^2 = α^2 + α^2$, η οποία σημαίνει ότι το x μπορεί να κατασκευασθεί (σχ.9) ως υποτείνουσα ορθογώνιου και ισοσκελούς τριγώνου με κάθετες πλευρές ίσες με α. Έτσι το ΟΒ είναι το ζητούμενο τμήμα.



*Σχήμα 9*

Αν $y = \sqrt{3}\,α$, τότε $y^2 = 3α^2 = α^2 + 2α^2 = α^2 + x^2$ που σημαίνει ότι το y είναι υποτείνουσα ορθογώνιου τριγώνου με κάθετες πλευρές α και x . Αν λοιπόν φέρουμε κάθετο στην ΟΒ στο Β και πάνω σε αυτή πάρουμε σημείο Γ, ώστε ΒΓ=α, τότε $ΟΓ = \sqrt{3}\,α$, δηλαδή y = ΟΓ. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε διαδοχικά τα τμήματα $\sqrt{2}$ α, $\sqrt{3}$ α, $\sqrt{5}$ α, … , $\sqrt{ν}$ α.

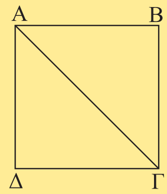
## ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

### Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας

Αρχικά οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι ο λόγος οιωνδήποτε (φυσικών ή γεωμετρικών) μεγεθών μπορεί να εκφραστεί ως λόγος φυσικών αριθμών. Ειδικότερα, θεωρούσαν ότι όλα τα τμήματα είναι σύμμετρα, δηλαδή για οποιαδήποτε δύο τμήματα ΑΒ και ΓΔ υπάρχει τμήμα ΕΖ που περιέχεται ακέραιο αριθμό φορών τόσο στο ΑΒ, όσο και το ΓΔ.

Όμως σύντομα έκαναν μια ανακάλυψη που έμελλε να κλονίσει την πεποίθησή τους αυτή. Βρήκαν ότι υπάρχουν μεγέθη που δεν είναι σύμμετρα. Δεν γνωρίζουμε με βεβαιότητα ποιο ακριβώς πρόβλημα οδήγησε τους αρχαίους Έλληνες στην ανακάλυψη αυτή. Οι ιστορικοί έχουν προτείνει κατά καιρούς πολλές εκδοχές. Η ανακάλυψη αυτή μπορεί να είχε γίνει π.χ. στη γεωμετρία, στο πρόβλημα της εύρεσης του κοινού μέτρου της διαγωνίου προς την πλευρά του τετραγώνου, ή κατά τη μελέτη του κανονικού δωδεκαέδρου, ή στη θεωρία της μουσικής, στο πρόβλημα της διαίρεσης της οκτάβας, που ανάγεται στην εύρεση του γεωμετρικού μέσου των αριθμών 1 και 2, ή στην αριθμητική, στο πρόβλημα του ορισμού του λόγου, που το τετράγωνό του είναι ίσο με 2.

Η πρώτη μαρτυρία για την απόδειξη της ασυμμετρίας (αλλά όχι κατ' ανάγκη και ιστορικά πρώτη απόδειξη) απαντάται στα «Αναλυτικά Ύστερα» του Αριστοτέλη, ο οποίος αναφέρει ότι η απόδειξη της ασυμμετρίας της διαγωνίου με την πλευρά του τετραγώνου γίνεται με την εις άτοπο απαγωγή, γιατί «αν υποτεθεί ότι η διάμετρος είναι σύμμετρη με την πλευρά, τότε ο άρτιος θα ισούται με τον περιττό». Η πρόταση αυτή του Αριστοτέλη ερμηνεύεται ως εξής:




Αν υποθέσουμε ότι η πλευρά ΑΒ είναι σύμμετρη προς τη διαγώνιο ΑΓ, τότε ο λόγος τους είναι λόγος ακεραίων αριθμών, δηλαδή, $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{α}{β}$, όπου οι α, β δεν είναι και οι δύο άρτιοι. Τότε, από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $ΑΓ^2 = 2ΑΒ^2$. Επομένως, $\frac{ΑΒ^2}{ΑΓ^2} = \frac{α^2}{β^2} = \frac{1}{2}$, ή $β^2 = 2α^2$.

### ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Αυτό σημαίνει ότι ο $β^2$ είναι άρτιος και επομένως και ο β είναι άρτιος (δηλαδή της μορφής β=2λ). Τότε ο α πρέπει να είναι περιττός (αφού οι α, β δεν είναι και οι δύο άρτιοι). Όμως τότε $(2λ)^2 = 2α^2$, ή $4λ^2=2α^2$, ή $2λ^2 = α^2$ κι επομένως ο $α^2$ είναι άρτιος, οπότε και ο α είναι άρτιος, που είναι άτοπο.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι η απόδειξη αυτή έχει καθαρά αριθμητικό χαρακτήρα και στηρίζεται στη θεωρία του άρτιου και του περιττού (δηλαδή τη θεωρία διαιρετότητας δια 2) που είχαν αναπτύξει οι Πυθαγόρειοι.

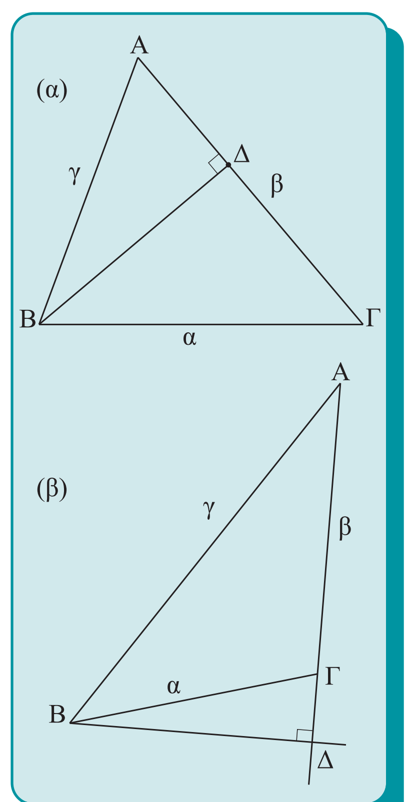
Γρήγορα βρέθηκαν και άλλα ασύμμετρα τμήματα. Ειδικότερα, ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος (τέλη του 5ου αι. π.Χ.) ανακάλυψε ότι οι πλευρές των τετραγώνων με εμβαδόν 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15 είναι ασύμμετρες με τη διαγώνιο του τετραγώνου με πλευρές τη μονάδα. Επίσης, ο Θεαίτητος απέδειξε ότι αν το εμβαδόν ενός τετραγώνου εκφράζεται με έναν αριθμό Ν που δεν είναι τετράγωνος, τότε η πλευρά του είναι ασύμμετρη με τη μονάδα. Με σύγχρονη ορολογία, αν $Ν \neq α^2$, τότε ο $\sqrt{Ν}$ δεν είναι ρητός αριθμός. Ο Θεαίτητος προχώρησε παραπέρα τις έρευνές του και απέδειξε ότι και όλοι οι αριθμοί της μορφής $\sqrt[3]{Ν}$, όπου Ν φυσικός αριθμός δεν είναι τέλειοι κύβοι. Επίσης εξέτασε άρρητους της μορφής $\sqrt{Μ + Ν}$, $\sqrt{Μ} + \sqrt{Ν}$, $\sqrt{\sqrt{Μ} + \sqrt{Ν}}$.

## 9.4 Γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος

Το Πυθαγόρειο θεώρημα εκφράζει το τετράγωνο μίας πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από ορθή γωνία, ως προς τις δύο άλλες πλευρές. Προκύπτει, λοιπόν, το ερώτημα: το τετράγωνο μίας πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι σε οξεία ή αμβλεία γωνία μπορεί να εκφρασθεί ως συνάρτηση των άλλων πλευρών; Απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνουν τα ακόλουθα δύο θεωρήματα.

**Θεώρημα Ι**

**Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.**



*Σχήμα 10*

Αν δηλαδή σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ (σχ.10) είναι π.χ. $\hat{Α} < 1∟$ και ΑΔ η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β, τότε ισχύει ότι

$$α^2 = β^2 + γ^2 - 2β \cdot ΑΔ .$$

**Απόδειξη**

Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΓ, ΔΒΑ έχουμε, με εφαρμογές του Πυθαγόρειου θεωρήματος αντίστοιχα :

$$\alpha^2 = \Delta B^2 + \Delta\Gamma^2 \text{ και } \Delta B^2 = \gamma^2 - A\Delta^2 .$$

Επειδή είναι $\hat{A} < 1∟$ τα Δ,Γ βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του Α και ειδικότερα:

- αν $\hat{\Gamma} < 1∟$ το Δ είναι μεταξύ των Α, Γ (σχ.10α), οπότε $\Delta\Gamma = \beta - A\Delta$.
- αν $\hat{\Gamma} > 1∟$ το Γ είναι μεταξύ των Α, Δ (σχ.10β), οπότε $\Delta\Gamma = A\Delta - \beta$ .

Από τις δύο τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι

$$\Delta\Gamma^2 = (\beta - A\Delta)^2 = \beta^2 + A\Delta^2 - 2\beta \cdot A\Delta .$$

Με αντικατάσταση αυτής της σχέσης και της $\Delta B^2 = \gamma^2 - A\Delta^2$ στην $\alpha^2 = \Delta B^2 + \Delta\Gamma^2$ προκύπτει ότι

$$\alpha^2 = \gamma^2 - A\Delta^2 + \beta^2 + A\Delta^2 - 2\beta \cdot A\Delta = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta ,$$

δηλαδή η ζητούμενη ισότητα.

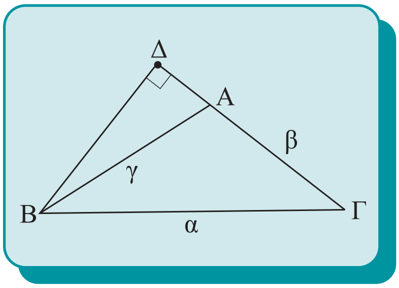
- αν τέλος $\hat{\Gamma} = 1∟$, το Δ συμπίπτει με το Γ και το ορθογώνιο

τρίγωνο ΓΑΒ δίνει $\alpha^2 = \gamma^2 - \beta^2$ που γράφεται

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta$ , αφού $A\Delta = \beta$ .

**Θεώρημα ΙΙ**

**Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.**




*Σχήμα 11*

Αν δηλαδή σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ (σχ.11) είναι π.χ. $\hat{A} > 1∟$ και ΑΔ η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β, τότε ισχύει

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta.$$

**Απόδειξη**

Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΓ και ΔΒΑ, παίρνουμε αντίστοιχα:

$$\alpha^2 = \Delta B^2 + \Delta\Gamma^2 \text{ και } \Delta B^2 = \gamma^2 - A\Delta^2 .$$

Επειδή $\hat{A} > 1∟$, το Δ βρίσκεται στην προέκταση της ΓΑ προς το Α και επομένως $\Delta\Gamma = \beta + A\Delta$ οπότε

$$\Delta\Gamma^2 = (\beta + A\Delta)^2 = \beta^2 + A\Delta^2 + 2\beta \cdot A\Delta.$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων $ΔΒ^2 = γ^2 - ΑΔ^2$ και

$$ΔΓ^2 = (β + ΑΔ)^2 = β^2 + ΑΔ^2 + 2β \cdot ΑΔ$$

στη σχέση $α^2 = ΔΒ^2 + ΔΓ^2$, προκύπτει η ζητούμενη ισότητα

$$α^2 = γ^2 - ΑΔ^2 + β^2 + ΑΔ^2 + 2β \cdot ΑΔ = β^2 + γ^2 + 2β \cdot ΑΔ.$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα και τα προηγούμενα θεωρήματα Ι και ΙΙ προκύπτει άμεσα ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε :

**(i) Αν $\hat{Α}<1∟$, τότε $α^2 < β^2 + γ^2$,**

**(ii) Αν $\hat{Α}=1∟$, τότε $α^2 = β^2 + γ^2$,**

**(iii) Αν $\hat{Α}>1∟$, τότε $α^2 > β^2 + γ^2$.**

Αποδεικνύεται όμως, με απαγωγή σε άτοπο ότι ισχύει και το αντίστροφο των (i), (ii), (iii). Πράγματι, αν π.χ. ισχύει $α^2 < β^2 + γ^2$ δεν μπορεί να ισχύει $\hat{Α}=1∟$ ή $\hat{Α}>1∟$, γιατί τότε από τις (ii) και (iii) θα είχαμε $α^2 = β^2 + γ^2$ ή $α^2 > β^2 + γ^2$ αντίστοιχα, που είναι άτοπο, αφού $α^2 < β^2 + γ^2$. Άρα $\hat{Α}<1∟$.

Όμοια αποδεικνύονται και οι άλλες περιπτώσεις.

Έτσι έχουμε το ακόλουθο πόρισμα:

### ΠΟΡΙΣΜΑ

**Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι ισοδυναμίες:**

**(i) $α^2 > β^2 + γ^2$, αν και μόνο αν $\hat{Α}>1∟$,**

**(ii) $α^2 = β^2 + γ^2$, αν και μόνο αν $\hat{Α}=1∟$,**

**(iii) $α^2 < β^2 + γ^2$, αν και μόνο αν $\hat{Α}<1∟$.**

Σύμφωνα με το πόρισμα αυτό και επειδή σε κάθε τρίγωνο η μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται απέναντι στη μεγαλύτερη γωνία, συγκρίνοντας το τετράγωνο της **μεγαλύτερης** πλευράς ενός τριγώνου με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων πλευρών του, διαπιστώνουμε αν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο, ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο.

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι α=8, β=10 και γ=7, θα έχουμε $β^2=100$, $α^2 + γ^2 = 64 + 49 = 113$ δηλαδή $β^2 < α^2 + γ^2$, οπότε $\hat{Β}<1∟$ και επειδή η $\hat{Β}$ είναι η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου, το τρίγωνο θα είναι οξυγώνιο.

### ΣΧΟΛΙΟ

*Είναι φανερό ότι τα παραπάνω θεωρήματα Ι και ΙΙ αποτελούν γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος, αφού στην περίπτωση που είναι $\hat{Α} = 1∟$, τα θεωρήματα αυτά δίνουν ως ειδική περίπτωση το Πυθαγόρειο θεώρημα.*

Τέλος από τα θεωρήματα Ι και ΙΙ εκφράζοντας την προβολή ΑΔ ως προς το συνΑ προκύπτει το επόμενο πόρισμα:

**ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ**

**Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση**

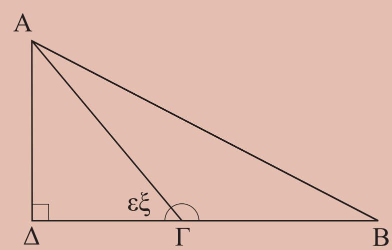
$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \text{συν}A.$$

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η**

**Αν μεταξύ των πλευρών α, β, γ ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{3}\alpha\beta}$, τότε :**

**(i) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο,**

**(ii) να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$.**



*Σχήμα 12*

**Λύση**

**(i)** Από τη δοσμένη ισότητα προκύπτει ότι η γ είναι η μεγαλύτερη πλευρά και επιπλέον ότι $\gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2$ , οπότε η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι αμβλεία.

**(ii)** Επειδή η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι αμβλεία, σύμφωνα με το θεώρημα αμβλείας γωνίας έχουμε:

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha \cdot \Gamma\Delta \quad (1).$$

Από την υπόθεση όμως έχουμε

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{3}\alpha\beta \quad (2).$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\Gamma\Delta = \frac{\sqrt{3}}{2}\beta$. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε $A\Delta^2 = \beta^2 - \Gamma\Delta^2 = \frac{\beta^2}{4}$, οπότε $A\Delta = \frac{\beta}{2} = \frac{A\Gamma}{2}$ που σημαίνει ότι $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 30°$ και επομένως $\hat{\Gamma} = 150°$.

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η**

**Το ύψος $\upsilon_\alpha$ ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο**

$$\upsilon_\alpha = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)},$$

**όπου $\tau = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$ η ημιπερίμετρος του τριγώνου. Ανάλογες εκφράσεις ισχύουν και για τα άλλα ύψη $\upsilon_\beta$ και $\upsilon_\gamma$.**

**Απόδειξη**

Εστω ένα τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ το ύψος του $υ_α$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΒ έχουμε $υ_α^2 = γ^2 - ΒΔ^2$ (1).

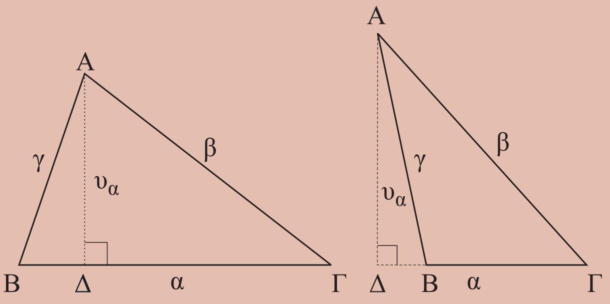
Πρέπει επομένως να υπολογίσουμε την προβολή ΒΔ της γ πάνω στην α.

• Αν $\hat{B} \leq 1∟$, από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$$β^2 = α^2 + γ^2 - 2α \cdot ΒΔ \quad ή$$

$$ΒΔ = \frac{1}{2α}\left(α^2 + γ^2 - β^2\right) \qquad (2)$$

• Αν $\hat{B} \geq 1∟$, από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε




*Σχήμα 13*

$$β^2 = α^2 + γ^2 + 2α \cdot ΒΔ \quad ή \quad ΒΔ = -\frac{1}{2α}\left(α^2 + γ^2 - β^2\right) \quad (3).$$

Από τις (2) και (3) προκύπτει ότι $ΒΔ^2 = \frac{1}{4α^2}\left(α^2 + γ^2 - β^2\right)^2$

με αντικατάσταση της οποίας στην (1) παίρνουμε:

$$υ_α^2 = γ^2 - \frac{1}{4α^2}\left(α^2 + γ^2 - β^2\right)^2 = \frac{1}{4α^2}\left[4α^2γ^2 - \left(α^2 + γ^2 - β^2\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4α^2}(2αγ + α^2 + γ^2 - β^2)(2αγ - α^2 - γ^2 + β^2) =$$

$$= \frac{1}{4α^2}\left[(α+γ)^2 - β^2\right]\left[β^2 - (α-γ)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4α^2}(α+β+γ)(α+γ-β)(β+α-γ)(β-α+γ) \qquad (4).$$

Επειδή $α+β+γ=2τ$, θα είναι

$α+γ-β=2τ-β-β=2(τ-β)$, $α+β-γ=2(τ-γ)$ και $β+γ-α=2(τ-α)$,

οπότε η (4) γίνεται:

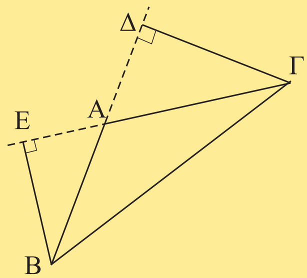
$$υ_α^2 = \frac{1}{4α^2}2τ \cdot 2(τ-β) \cdot 2(τ-γ) \cdot 2(τ-α) = \frac{4}{α^2}τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)$$

από την οποία προκύπτει το ζητούμενο.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

### Ερωτήσεις Κατανόησης

**1.** *Στο παρακάτω σχήμα να συμπληρώστε τα κενά:*




*i)* $ΒΓ^2 = \ldots + \ldots + 2ΑΒ \ldots$

*ii)* $ΒΓ^2 = \ldots + \ldots + 2ΑΓ \ldots$

**2.** *Να βρεθεί το είδος των γωνιών τριγώνου ΑΒΓ όταν:*

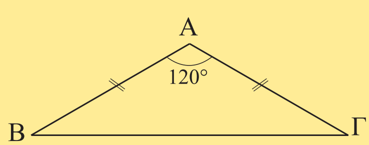
*i)* $β^2 = 3α^2 + γ^2$,

*ii)* $γ^2 = α^2 – β^2$,

*iii)* $α^2 – β^2 = 2γ^2$.

**3.** *Αν β η .................... πλευρά αμβλυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ τότε .... >* $α^2$ *+ .... (Να συμπληρώσετε τα κενά).*

**4.** *Αν στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΒ = ΑΓ και* $\hat{Α} = 120°$, *να δικαιολογήσετε γιατί* $α^2 = 3β^2$.

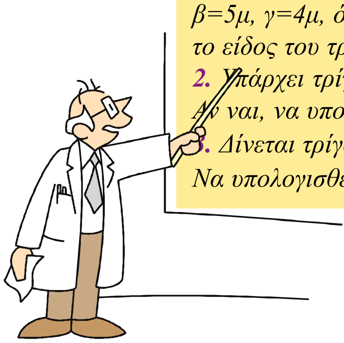



### Ασκήσεις Εμπέδωσης

**1.** *Να εξετάσετε αν υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ, με α=6μ, β=5μ, γ=4μ, όπου μ θετική παράμετρος. Να εξετασθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.*

**2.** *Υπάρχει τρίγωνο με μήκη πλευρών α=6, β=5, γ=4; Αν ναι, να υπολογισθούν τα ύψη του τριγώνου.*

**3.** *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με* $α = \sqrt{2}$, $β = 1+\sqrt{3}$, $γ = 2$. *Να υπολογισθεί η γωνία* $\hat{Α}$.



**4.** *Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 4cm, ΑΓ = 5cm και* $Α\hat{Β}Δ = 30°$, *όπου ΒΔ το ύψος του. Να υπολογισθεί η πλευρά του ΒΓ.*

### Αποδεικτικές Ασκήσεις

**1.** *Οι πλευρές ενός τριγώνου ΑΒΓ έχουν μήκη ΑΒ=9cm, ΒΓ=7cm και ΑΓ=12cm. Να υπολογισθεί το μήκος της προβολής της ΒΓ πάνω στην ΑΒ.*

**2.** *Να αποδείξετε ότι σε κάθε τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ, ΓΔ ισχύει ότι*

$$ΑΓ^2 + ΒΔ^2 = ΑΔ^2 + ΒΓ^2 + 2ΑΒ \cdot ΓΔ.$$

**3.** *Αν ΒΒ΄, ΓΓ΄είναι ύψη ενός οξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι* $α^2 = β \cdot ΓΒ' + γ \cdot ΒΓ'$.

**4.** *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (* $\hat{Α} = 1∟$*). Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΓ κατά ΓΔ=ΒΓ. Να αποδείξετε ότι* $ΒΔ^2=2ΒΓ \cdot ΑΔ$.

**5.** *Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) φέρουμε παράλληλο της ΒΓ, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι* $ΒΕ^2=ΕΓ^2+ΒΓ \cdot ΔΕ$.

**6.** *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (* $\hat{Α} = 1∟$*) με πλευρές α, β, γ. Υπάρχει τρίγωνο με πλευρές 5α, 4β, 3γ;*

### Σύνθετα Θέματα

**1.** *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και* $\hat{Α} = 30°$. *Να αποδείξετε ότι* $α = β\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

**2.** *Δίνεται κύκλος διαμέτρου ΑΒ και μία χορδή του ΓΔ//ΑΒ. Αν Μ είναι τυχαίο σημείο της ΑΒ, να αποδείξετε ότι* $ΜΓ^2+ΜΔ^2=ΜΑ^2+ΜΒ^2$.

**3.** *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με* $α^3=β^3+γ^3$. *Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.*

## 9.5 Θεωρήματα διαμέσων

Οι επόμενες μετρικές σχέσεις που θα μελετήσουμε αφορούν τον υπολογισμό των διαμέσων ενός τριγώνου και των προβολών τους στις πλευρές, ως συνάρτηση των πλευρών του τριγώνου.