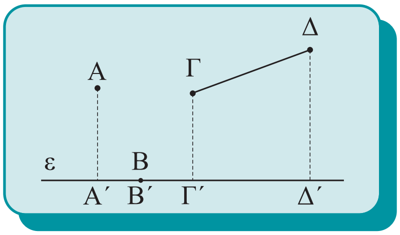
Μετρικές σχέσεις στο τρίγωνο

9.1 Ορθές προβολές

Ας θεωρήσουμε μία ευθεία ε και ένα σημείο Α που δεν ανήκει σε αυτή. Το ίχνος Α′ της καθέτου που φέρουμε από το Α προς την ε το λέμε ***ορθή προβολή*** ή απλώς ***προβολή*** του Α στην ευθεία ε. Αν το σημείο είναι σημείο της ευθείας, π.χ. το Β, τότε ως προβολή του Β′ πάνω στην ε θεωρούμε το ίδιο το Β. Τέλος ορθή προβολή του τμήματος ΓΔ πάνω στην ευθεία ε λέμε το τμήμα Γ′Δ′ που έχει ως άκρα τις ορθές προβολές Γ′, Δ′ των άκρων Γ, Δ, αντίστοιχα, του τμήματος ΓΔ πάνω στην ε .



Σχήμα 1

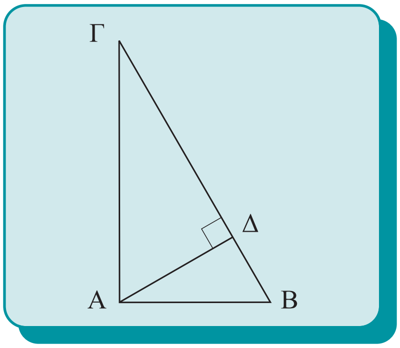
9.2 Το Πυθαγόρειο θεώρημα

Θεώρημα Ι

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

Απόδειξη

Έστω λοιπόν ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και Δ η προβολή της κορυφής Α στην υποτείνουσα ΒΓ. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\mathbf{AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta}$ **και** $\mathbf{A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta}$.



Σχήμα 2

Για την πρώτη σχέση αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{AB}{B\Delta} = \frac{B\Gamma}{AB}$, δηλαδή ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΑ είναι όμοια, το οποίο ισχύει αφού $\hat{A} = \hat{\Delta} = 1\llcorner$ και η $\hat{B}$ είναι κοινή. Όμοια αποδεικνύεται και η σχέση $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$.

Διαιρώντας τις $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$ και $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$ κατά μέλη προκύπτει το εξής πόρισμα:

Πόρισμα

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.

Θεώρημα ΙΙ (Πυθαγόρειο)

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

Απόδειξη

Θέλουμε δηλαδή (σχ.2) να αποδείξουμε ότι

$$AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2 \quad \text{ή} \quad \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα έχουμε:

$$AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta \qquad \text{και} \qquad A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta .$$

Με πρόσθεση των ισοτήτων κατά μέλη προκύπτει ότι :

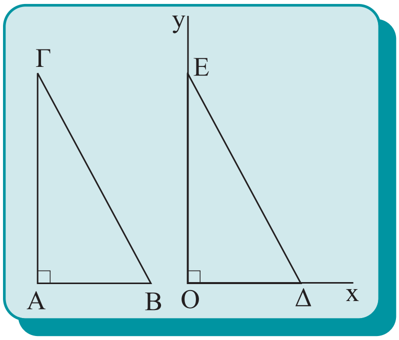
$$AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot B\Delta + B\Gamma \cdot \Gamma\Delta =$$

$$B\Gamma(B\Delta + \Gamma\Delta) = B\Gamma \cdot B\Gamma = B\Gamma^2 .$$

Θεώρημα ΙΙΙ (Αντίστροφο του Πυθαγορείου)

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$, τότε $\hat{A} = 1∟$.

Απόδειξη



Σχήμα 3

Πάνω στις πλευρές Οx, Oy ορθής γωνίας $x\hat{O}y$ θεωρούμε αντίστοιχα τμήματα ΟΔ=ΑΒ και ΟΕ=ΑΓ. Επειδή το τρίγωνο ΟΔΕ είναι ορθογώνιο σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα και την υπόθεση, έχουμε

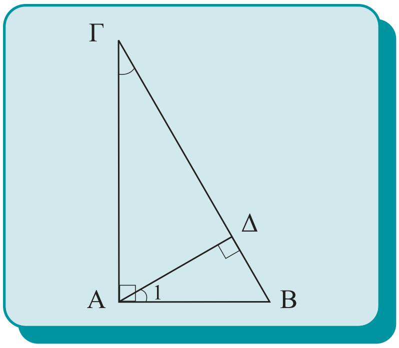
$$\Delta E^2 = O\Delta^2 + OE^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2 .$$

Άρα ΔΕ = ΒΓ. Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΟΔΕ είναι ίσα, γιατί έχουν και τις τρεις πλευρές ίσες, οπότε θα είναι $\hat{A} = \hat{O} = 1∟$, που είναι το ζητούμενο.

Θεώρημα IV

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

Απόδειξη



Σχήμα 4

Έστω ΑΔ το ύψος του ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ (σχ.4), που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Θα αποδείξουμε ότι

$$A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$$

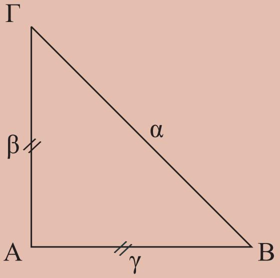
Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΑΔ είναι όμοια, αφού είναι ορθογώνια και $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ ως συμπληρωματικές της $\hat{B}$. Επομένως, οι πλευρές τους είναι ανάλογες, δηλαδή $\frac{A\Delta}{B\Delta} = \frac{\Delta\Gamma}{A\Delta}$, οπότε $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, τότε $\alpha = \sqrt{2}\,\beta$.

Απόδειξη

Πράγματι, με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ΑΒΓ παίρνουμε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 = 2\beta^2$ ή $\alpha = \sqrt{2}\beta$.



Σχήμα 5

ΣΧΟΛΙΟ

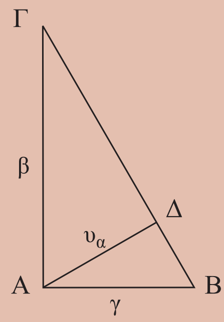
Η εφαρμογή αυτή αποδεικνύει την ύπαρξη τμημάτων με άρρητο λόγο. Είναι αξιοσημείωτο ότι ενώ είναι αδύνατη η μέτρηση με το υποδεκάμετρο τμημάτων άρρητου μήκους, ωστόσο είναι ακριβής ο προσδιορισμός τους με γεωμετρικές κατασκευές.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Αν ΑΔ είναι το ύψος ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, τότε ισχύει $\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{\upsilon_\alpha^2}$.

Απόδειξη

Επειδή $\alpha\upsilon_\alpha = \beta\gamma$, έχουμε ότι $\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{\beta^2+\gamma^2}{(\beta\gamma)^2} = \frac{\alpha^2}{(\alpha\upsilon_\alpha)^2} = \frac{1}{\upsilon_\alpha^2}$.



Σχήμα 6

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$=1∟) έχει ΑΒ=6 και ΑΓ=8. Ποιο το μήκος της διαμέσου ΑΜ;*

2. *Αν ο λόγος των κάθετων πλευρών ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι 4, τότε ο λόγος των προβολών τους στην υποτείνουσα είναι :*

α. 2 β. 4 γ. 16 δ. $\frac{1}{4}$

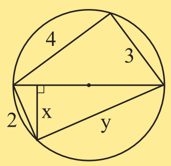
Κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. *Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές ίσες με 9 cm και 12 cm. Η πλευρά ισόπλευρου τριγώνου που έχει ίση περίμετρο με το ορθογώνιο τρίγωνο είναι:*

α. 10 cm β. 12 cm γ. 13 cm δ. 14 cm.

Κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

4. *Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τα x και y.*



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$=1∟) φέρουμε το ύψος ΑΔ. Αν είναι ΑΒ=3 και ΑΓ=4, να υπολογιστούν τα μήκη των τμημάτων ΒΓ, ΒΔ, ΔΓ και ΑΔ.*

2. *Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ* ($\hat{A} = 1\llcorner$) *είναι* $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ *τότε ο λόγος* $\frac{\beta}{\gamma}$ *είναι ίσος με:*

α. $\frac{1}{2}$ β. 1 γ. $\sqrt{3}$ δ. 2 ε. 3

Κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. *Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ* ($\hat{A} = 1\llcorner$) *φέρουμε το ύψος ΑΔ. Αν είναι* $AB=5$ *και* $B\Delta = \frac{25}{13}$, *να διατάξετε κατά αύξουσα σειρά μήκους τα τμήματα: ΑΓ, ΒΓ, ΓΔ και ΑΔ.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο, που έχει πλευρές* $\alpha = \kappa^2+\lambda^2$, $\beta = 2\kappa\lambda$ *και* $\gamma = \kappa^2 - \lambda^2$, *όπου κ, λ θετικοί ακέραιοι με* $\kappa>\lambda$, *είναι ορθογώνιο.*

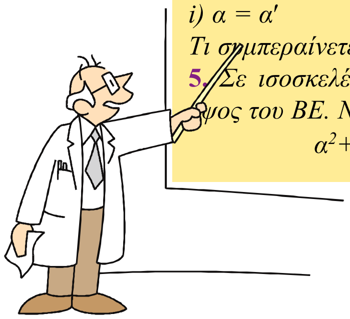
2. *Αν ΑΕ, ΑΖ είναι αντίστοιχα οι προβολές δύο χορδών ΑΓ και ΑΔ ενός κύκλου σε μία διάμετρό του ΑΒ, να αποδείξετε ότι* $AZ \cdot AE^2 = A\Gamma \cdot A\Delta^2$.

3. *Αν Δ είναι μέσο της κάθετης πλευράς ΑΓ ενός ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ* ($\hat{A} = 1\llcorner$) *και Ε η προβολή του στη ΒΓ, τότε να αποδείξετε ότι* $E\Gamma^2 + AB^2 = EB^2$. *Στη συνέχεια διατάξτε κατά αύξουσα σειρά μήκους τα τμήματα ΔΒ, ΕΒ, ΕΓ.*

4. *Δύο ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′* ($\hat{A} = \hat{A}' = 1\llcorner$) *έχουν* $\mu_\beta = \mu_{\beta'}$ *και* $\mu_\gamma = \mu_{\gamma'}$.
Να αποδείξετε ότι:
i) $\alpha = \alpha'$ ii) $\beta = \beta'$.
Τι συμπεραίνετε για τα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′;

5. *Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) φέρουμε το ύψος του ΒΕ. Να αποδείξετε ότι*

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2= 3BE^2 +2AE^2+\Gamma E^2.$$



Σύνθετα θέματα

1. *Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ* ($\hat{A} = 1\llcorner$) *και το ύψος του ΑΔ. Αν Ε, Ζ είναι οι προβολές του Δ πάνω στις ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :*

i) $\frac{AB^3}{A\Gamma^3} = \frac{BE}{\Gamma Z}$ ii) $A\Delta^3 = B\Gamma \cdot \Delta E \cdot \Delta Z$.

2. *Δίνονται δύο κύκλοι (Κ,R) και (Λ,ρ) που εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Αν ΒΓ είναι το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα τους και (Ο,σ) ο κύκλος που εφάπτεται στους (Κ,R), (Λ,ρ) και στη ΒΓ, να αποδείξετε ότι:*

i) $B\Gamma = 2\sqrt{R\rho}$ ii) $\frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$.

3. *Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ με* $\hat{A} = \hat{B} = 1\llcorner$. *Αν Μ, Ν τα μέσα των διαγωνίων ΒΔ, ΑΓ αντίστοιχα και Κ το σημείο τομής της ΑΜ με τη ΒΓ να αποδείξετε ότι :*
i) *το ΑΒΚΔ είναι ορθογώνιο,*
ii) $\Delta\Gamma^2 - AB^2 = 4MN^2$.

4. *Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο να αποδείξετε ότι* $2\mu_\alpha^2 \geq \beta\gamma$.

5. *Θεωρούμε κύκλο (Ο,R), διάμετρό του ΑΒ και μία χορδή του ΓΔ που τέμνει την ΑΒ στο Ε και σχηματίζει με αυτή γωνία 45°. Να αποδείξετε ότι*

$$E\Gamma^2 + E\Delta^2 = 2R^2.$$

6. *Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ* ($\hat{A} = 1\llcorner$) *και το ύψος του ΑΔ. Αν x, y και ω είναι αντίστοιχα τα μήκη οποιωνδήποτε ομόλογων γραμμικών στοιχείων των τριγώνων (π.χ. διαμέσων, υψών, ακτίνων εγγεγραμμένων κύκλων κτλ.) ΔΑΒ, ΔΑΓ και ΑΒΓ, τότε* $x^2 + y^2 = \omega^2$.

9.3 Γεωμετρικές κατασκευές

Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος και του θεωρήματος IV αντιμετωπίζουμε τα παρακάτω βασικά προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών ευθύγραμμων τμημάτων .