

8.1 Όμοια ευθύγραμμα σχήματα

Ας θεωρήσουμε ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και από τα μέσα B' και Δ' των πλευρών AB και $A\Delta$ αντίστοιχα, ας φέρουμε παράλληλες προς τις $A\Delta$ και AB , οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ' . Τότε το παραλληλόγραμμο $AB'\Gamma'\Delta'$ έχει τις γωνίες του ίσες με τις αντίστοιχες γωνίες του $AB\Gamma\Delta$, ενώ ισχύει ότι

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta} = \frac{A\Delta'}{A\Delta} = \frac{1}{2}.$$

Ας θεωρήσουμε κατόπιν ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ και ας προεκτείνουμε τις πλευρές του AB και $A\Gamma$ προς τα σημεία B και Γ αντίστοιχα. Θεωρούμε σημείο B' στην προέκταση της AB , έτσι, ώστε $AB' = 3AB$. Από το B' φέρουμε παράλληλη προς την τρίτη πλευρά $B\Gamma$, που τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$ στο σημείο Γ' .

Τότε παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB'\Gamma'$ έχουν όλες τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, ενώ επιπλέον ισχύει ότι

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{A\Gamma'}{A\Gamma} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = 3.$$

Τα δύο παραλληλόγραμμο, όπως και τα δύο τρίγωνα που κατασκευάστηκαν προηγουμένως λέγονται **όμοια**, ενώ ο λόγος των ομόλογων πλευρών τους (δηλαδή των πλευρών που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες) λέγεται **λόγος ομοιότητας**. Γενικότερα για τα όμοια ευθύγραμμα σχήματα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός

Δύο ευθύγραμμα σχήματα λέγονται όμοια, αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες που σχηματίζονται από ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

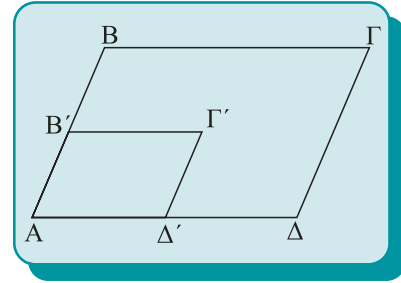
Ο λόγος των ομόλογων πλευρών δύο ευθύγραμμων σχημάτων, λέγεται λόγος ομοιότητας αυτών και συμβολίζεται με λ . Η ομοιότητα μεταξύ δύο ευθύγραμμων σχημάτων συμβολίζεται με \approx .

Θεώρημα

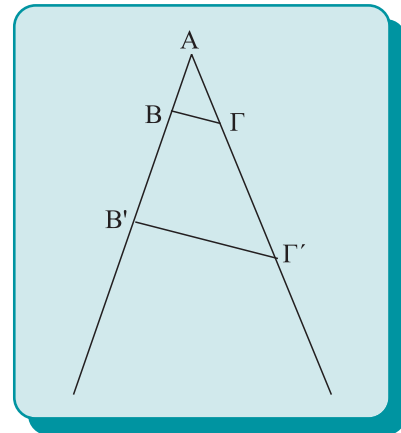
Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους.

Απόδειξη

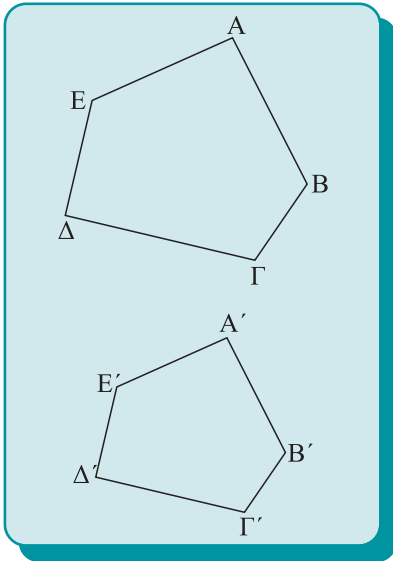
Ας θεωρήσουμε δύο όμοια ευθύγραμμα σχήματα $AB\Gamma\Delta E$ και $A'B'\Gamma'\Delta'E'$ (ανάλογα αποδεικνύεται για ευθύγραμμα σχήματα



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

με περισσότερες κορυφές). Λόγω της ομοιότητας θα έχουμε ότι

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{E'A'}{EA} = \lambda,$$

και από τις ιδιότητες των αναλογιών, το άθροισμα των αριθμητών προς το άθροισμα των παρανομαστών ισούται με λ , δηλαδή:

$$\frac{A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+E'A'}{AB+BC+CD+DE+EA} = \lambda.$$

8.2 Κριτήρια ομοιότητας

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με την ομοιότητα των τριγώνων, καθώς αποδεικνύεται (εφαρμογή 3) ότι δύο όμοια ευθύγραμμα σχήματα χωρίζονται σε ισάριθμα όμοια τρίγωνα.

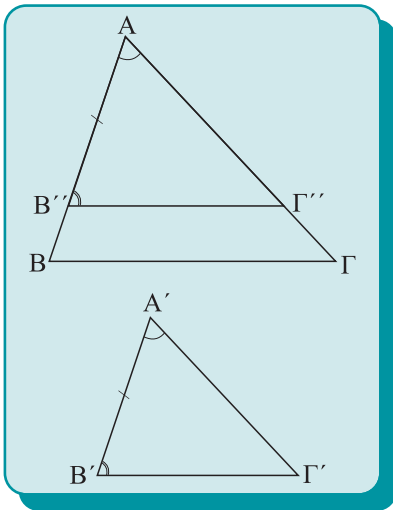
Θεώρημα I (1ο Κριτήριο Ομοιότητας)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ με $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, οπότε και $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι $A'B' < AB$, επομένως υπάρχει σημείο B'' στην AB τέτοιο, ώστε $AB'' = A'B'$. Από τη B'' φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο Γ'' . Τότε τα τρίγωνα $AB''\Gamma''$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια, αφού ισχύει ότι $B''\Gamma'' \parallel B\Gamma$, οπότε $\frac{AB''}{AB} = \frac{A\Gamma''}{A\Gamma} = \frac{B''\Gamma''}{B\Gamma}$ και η \hat{A} είναι κοινή, ενώ $\hat{B}'' = \hat{B}$ οπότε και $\hat{\Gamma}'' = \hat{\Gamma}$.

Όμως τα τρίγωνα $AB''\Gamma''$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα, καθώς έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες. Συνεπώς τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι όμοια.



Σχήμα 4

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

- (i) Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια, όταν έχουν μία οξεία γωνία τους ίση.
- (ii) Όλα τα ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια μεταξύ τους.
- (iii) Δύο ισοσκελή τρίγωνα, τα οποία έχουν μία αντίστοιχη γωνία ίση, είναι όμοια.

Θεώρημα II (2ο Κριτήριο Ομοιότητας)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι όμοια.

Απόδειξη

Θεωρούμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ (σχ.4) έτσι, ώστε $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $A'B' < AB$, επομένως θα υπάρχει σημείο B'' στην AB , με $AB'' = A'B'$. Από το B'' φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο Γ'' . Επομένως, τα τρίγωνα $AB''\Gamma''$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια. Επειδή $AB\Gamma \approx AB''\Gamma''$ είναι

$$\frac{AB''}{AB} = \frac{A\Gamma''}{A\Gamma} \quad \text{ή} \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{A\Gamma''}{A\Gamma}.$$

Όμως, από την υπόθεση ισχύει ότι $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma}$.

Επομένως καταλήγουμε ότι $\frac{A\Gamma''}{A\Gamma} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma}$ ή $A\Gamma'' = A'\Gamma'$.

Τελικά τα τρίγωνα $AB''\Gamma''$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα, καθώς έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες.

Θεώρημα III (3ο Κριτήριο Ομοιότητας)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

Απόδειξη

Θεωρούμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ (σχ. 4), ώστε

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma}.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $A'B' < AB$, επομένως θα υπάρχει σημείο B'' στην AB , με $AB'' = A'B'$. Από το B'' φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο Γ'' , οπότε τα τρίγωνα $AB''\Gamma''$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια.

Επειδή $AB\Gamma \approx AB''\Gamma''$ είναι

$$\frac{AB''}{AB} = \frac{A\Gamma''}{A\Gamma} = \frac{B''\Gamma''}{B\Gamma} \quad \text{ή} \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{A\Gamma''}{A\Gamma} = \frac{B''\Gamma''}{B\Gamma}.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Το θεώρημα που εκφράζει ότι δύο όμοια τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και το Πυθαγόρειο θεώρημα αποτελούν τους βασικούς συνδετικούς κρίκους της Γεωμετρίας με την Άλγεβρα. Η σύνδεση της Γεωμετρίας με την Άλγεβρα είναι ιδιαίτερα εποικοδομητική, καθώς μας επιτρέπει να χρησιμοποιούμε την εποπτεία της Γεωμετρίας σε αλγεβρικά προβλήματα και την ευχέρεια των πράξεων της Άλγεβρας σε γεωμετρικά προβλήματα. Τα όμοια τρίγωνα και το Πυθαγόρειο θεώρημα αποτέλεσαν τα θεμέλια της Τριγωνομετρίας. Χρησιμοποιώντας όμοια τρίγωνα μπορούμε να υπολογίσουμε τις διαστάσεις ενός αντικειμένου μετρώντας τις διαστάσεις ενός μικρότερου μοντέλου του. Το μοντέλο αυτό θα έχει τις ίδιες γωνίες με το αρχικό, επομένως οι διαστάσεις του αρχικού προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις αντίστοιχες διαστάσεις του μοντέλου με το λόγο ομοιότητας των δύο σχημάτων.

Όμως από την υπόθεση έχουμε ότι

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'G'}{AG} = \frac{B'G'}{BG}.$$

Επομένως προκύπτει ότι

$$\frac{AG''}{AG} = \frac{A'G'}{AG} \quad \text{και} \quad \frac{B''G''}{BG} = \frac{B'G'}{BG},$$

οπότε $AG'' = A'G'$ και $B''G'' = B'G'$.

Άρα τα τρίγωνα $AB''G''$ και $A'B'G'$ είναι ίσα γιατί έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Ας θεωρήσουμε δύο όμοια τρίγωνα ABG , $A'B'G'$ με λόγο ομοιότητας λ και σημεία M

της BG , M' της $B'G'$ τέτοια, ώστε $\frac{BM}{MG} = \frac{B'M'}{M'G'}$.

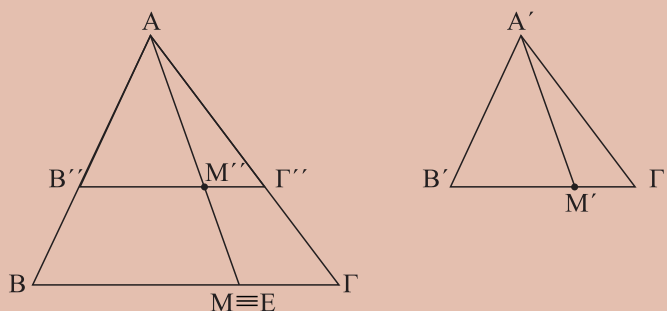
Τότε ισχύει ότι $\frac{AM}{A'M'} = \frac{BM}{B'M'} = \frac{GM}{G'M'} = \lambda$.

Απόδειξη

Έστω ότι $A'B' < AB$, οπότε θα υπάρχει σημείο B'' της AB τέτοιο, ώστε $AB'' = A'B'$ και σημείο G'' της AG τέτοιο, ώστε $AG'' = A'G'$, με $B''G'' \parallel BG$. Έστω σημείο M'' της $B''G''$ τέτοιο, ώστε $B''M'' = B'M'$.

Προεκτείνουμε την AM'' ώστε να τμήσει τη BG σε σημείο E . Τότε τα τρίγωνα $AB''M''$ και ABE είναι όμοια, οπότε

$$\frac{AB''}{AB} = \frac{B''M''}{BE} = \frac{AM''}{AE} \quad \text{ή} \quad \lambda = \frac{B'M'}{BE} = \frac{A'M'}{AE}.$$



Σχήμα 5

Όμοια έχουμε ότι $\lambda = \frac{M'G'}{EG} = \frac{A'M'}{AE}$.

Οπότε $\frac{B'M'}{M'G'} = \frac{BE}{EG} = \frac{BM}{MG}$, συνεπώς τα E και M ταυτίζονται.

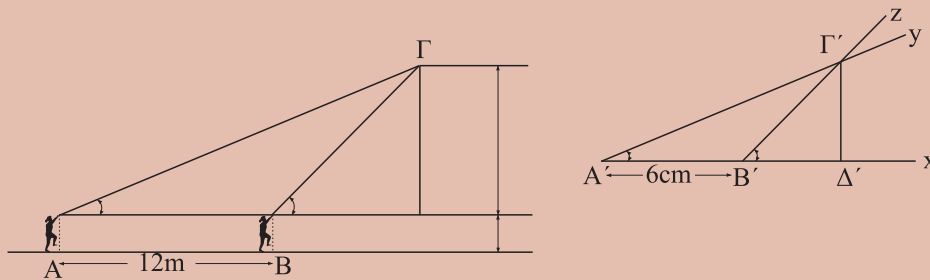
ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

- (i) Ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δύο ομόλογων υψών τους.
- (ii) Ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δύο ομόλογων διχοτόμων τους.
- (iii) Ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δύο ομόλογων διαμέσων τους.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Πόσο ύψος έχει το σχολείο σας;

Λύση



Σχήμα 6

Ένας μαθητής βλέπει την κορυφή Γ του σχολείου από δύο σημεία A και B στο έδαφος (σχ. 6). Χρησιμοποιώντας έναν εξάντα (βλ. επόμενη παράγραφο) μετράει τις γωνίες \hat{A} , \hat{B} με τις οποίες φαίνεται το σχολείο, π.χ. $\hat{A} = 19^\circ$ και $\hat{B} = 43^\circ$.

Κατόπιν μετράει την απόσταση από το σημείο A ως το B , π.χ. $AB=12$ μέτρα. Η μέτρηση των γωνιών έγινε από κάποια απόσταση από το έδαφος ίση με το ύψος του μαθητή, ας υποθέσουμε ότι έχει ύψος 1,8 μέτρα. Για να υπολογίσουμε το ύψος του σχολείου κατασκευάζουμε σε μία κόλλα χαρτί το αντίστοιχο μοντέλο. Θεωρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα $A'B'=6$ cm. Προεκτείνουμε την $A'B'$ προς το μέρος του B' και σχηματίζουμε στο ίδιο ημιεπίπεδο δύο γωνίες $\hat{x\hat{A}'y} = 19^\circ$ και $\hat{x\hat{B}'z} = 43^\circ$. Οι ημιευθείες $A'y$ και $B'z$ τέμνονται στο σημείο Γ' . Από το σημείο Γ' φέρουμε την κάθετη $\Gamma'\Delta'$ στην $A'B'$ και έχουμε κατασκευάσει το μοντέλο μας. Μετράμε ότι το $\Gamma'\Delta'$ ισούται με 3,3 cm.

Ο λόγος ομοιότητας είναι $\lambda = \frac{AB}{A'B'} = 200$.

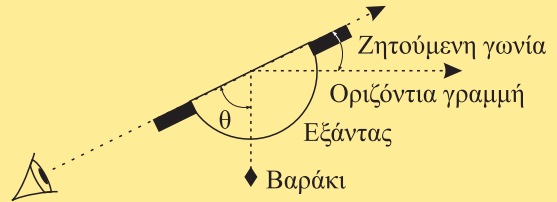
Επομένως το πραγματικό μήκος του $\Gamma\Delta$ είναι $\Gamma\Delta = \lambda\Gamma'\Delta' = 6,6$ μέτρα. Προσθέτοντας και το ύψος του μαθητή, έχουμε ότι το πραγματικό ύψος του σχολείου είναι 8,4 μέτρα.

ΣΧΟΛΙΟ

Με τη χρήση της ομοιότητας μπορούμε να μετρήσουμε μήκη ευθύγραμμων τμημάτων που είναι απρόσιτα.

Ο ΕΞΑΝΤΑΣ

Το διπλανό σχήμα εκφράζει τη λειτουργία του εξάντα, δηλαδή μας παρουσιάζει έναν απλό μηχανισμό για να μετράμε τις γωνίες υπό τις οποίες φαίνεται ένα σχήμα. Για να κατασκευασθεί χρειάζεται ένα ίσιο ξύλο, ένα μοιρογώνιο, μία χορδή (κιθάρας) ή πετονιά, ένα βαράκι (νήμα της στάθμης) και δύο ανθρώπους, έναν για να βλέπει το αντικείμενο και έναν για να διαβάσει τη μέτρηση.

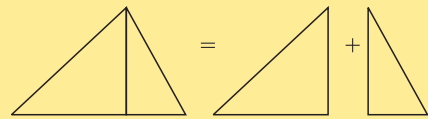


Σχήμα 7

ΣΧΟΛΙΟ

Παλιά οι μαθηματικοί συνειδητοποίησαν ότι για να επιλύουν τέτοιου είδους προβλήματα ήταν αρκετό να έχουν έναν πίνακα με τρίγωνα και τις διαστάσεις τους, οπότε θα αρκούσε να μελετούν τον πίνακα παρά να κατασκευάζουν μοντέλα των τριγώνων που προέκυπταν από φυσικά προβλήματα.

Παρατήρησαν ότι αρκεί ο πίνακας αυτός να έχει μόνο ορθογώνια τρίγωνα αφού κάθε τρίγωνο διαμερίζεται σε δύο ορθογώνια (σχ. 8). Ένας τέτοιος πίνακας είναι οι τιμές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων : τα ημίτονα και συνημίτονα των γωνιών ενός ορθογώνιου τριγώνου με υποτείνουσα 1. Πρακτικά τα αποτελέσματα από την τριγωνομετρία είναι ακριβέστερα από αυτά που προκύπτουν από μέτρηση και κατασκευή μοντέλου, όπως προηγουμένως. Ωστόσο οι τριγωνομετρικοί πίνακες δεν είναι τίποτε άλλο, παρά πίνακες όμοιων τριγώνων.



Σχήμα 8

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

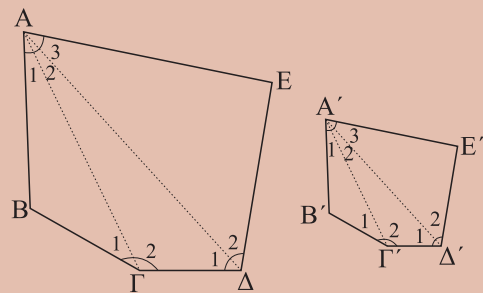
Να αποδείξετε ότι δύο όμοια ευθύγραμμα σχήματα χωρίζονται σε ισάριθμα όμοια τρίγωνα.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε την εφαρμογή για δύο πεντάγωνα ΑΒΓΔΕ και Α'Β'Γ'Δ'Ε', καθώς η απόδειξη είναι ανάλογη για κάθε πολύγωνο.

Ας υποθέσουμε ότι τα δύο πεντάγωνα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ. Από τις κορυφές

Α, Α' των πενταγώνων φέρουμε τις διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ και Α'Γ', Α'Δ' αντίστοιχα, οπότε καθένα πεντάγωνο χωρίστηκε σε τρία τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ και Α'Β'Γ', Α'Γ'Δ', Α'Δ'Ε' αντίστοιχα.



Σχήμα 9

Τότε έχουμε ότι $ΑΒΓ \approx Α'Β'Γ'$ και $ΑΔΕ \approx Α'Δ'Ε'$. Επομένως, θα είναι και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}'_1$ και

$$\frac{ΑΓ}{Α'Γ'} = \lambda. \text{ Τότε όμως θα έχουμε ότι } \hat{\Gamma}_2 = \hat{\Gamma}'_2 \text{ (αφού } \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}') \text{ και } \frac{ΓΔ}{Γ'Δ'} = \lambda.$$

Επομένως και τα τρίγωνα ΑΓΔ και Α'Γ'Δ' θα είναι όμοια.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4η

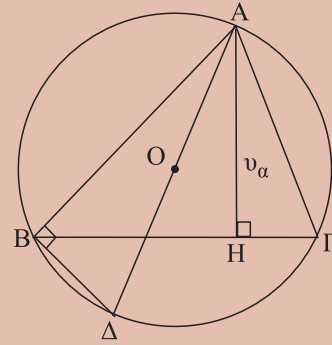
Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του $v_\alpha = AH$. Να αποδείξετε ότι $\beta\gamma = 2Rv_\alpha$, όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.

Απόδειξη

Θεωρούμε τη διάμετρο $A\Delta$. Τα τρίγωνα $AH\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι όμοια, αφού $\hat{B} = \hat{H} = 1\perp$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

Επομένως είναι

$$\frac{AH}{AB} = \frac{A\Gamma}{A\Delta} \quad \text{ή} \quad \beta\gamma = 2Rv_\alpha.$$



Σχήμα 10

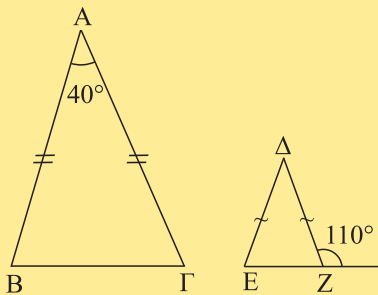
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 1\perp$, τότε είναι $\beta\gamma = av_\alpha = 2Rv_\alpha$.

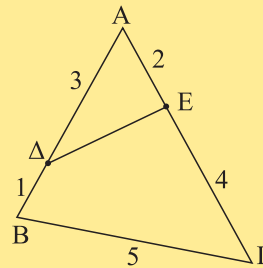
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

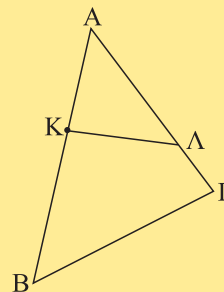
1. i) Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε είναι όμοια;
ii) Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια με ένα τρίτο τρίγωνο, τότε είναι και μεταξύ τους όμοια;
2. Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι πάντα όμοια;
3. Στο παρακάτω σχήμα είναι $AB = 3\Delta E$. Να βρεθεί ο λόγος $\frac{EZ}{B\Gamma}$.



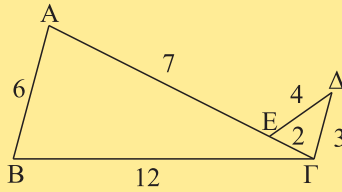
4. Στο παρακάτω σχήμα να βρεθεί το μήκος του ΔE .



5. Οι πλευρές ενός τριγώνου είναι 3cm , 4cm και 5cm . Ένα τρίγωνο όμοιο με αυτό έχει περίμετρο 24cm . Ποια είναι τα μήκη των πλευρών του;
6. Αν στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο $BK\Lambda\Gamma$ είναι εγγράμμιο, τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AK\Lambda$ είναι όμοια; Ποιες είναι οι ομόλογες πλευρές τους;



7. Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 1\perp$). Από τυχαίο σημείο Δ της AG φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- i) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta E\Gamma$ είναι όμοια,
- ii) $AG \cdot EA = AB \cdot E\Gamma$.

2. Στις πλευρές AB και AG τριγώνου $AB\Gamma$ θεωρούμε σημεία Δ και E αντίστοιχα, ώστε $A\Delta = \frac{1}{3} AB$ και

$GE = \frac{2}{3} AG$. Να αποδείξετε ότι:

- i) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι όμοια,
- ii) $B\Gamma = 3\Delta E$.

3. Μία μεταλλική πλάκα έχει σχήμα ορθογώνιου τριγώνου με πλευρές α, β, γ . Η πλάκα θερμαίνεται και από τη διαστολή αυξάνεται κάθε πλευρά της κατά το $\frac{1}{15}$ της. Θα παραμείνει ορθογώνιο τρίγωνο το σχήμα της πλάκας;

4. Ένα δέντρο ρίχνει κάποια στιγμή σε οριζόντιο έδαφος σκιά μήκους 24m. Στο ίδιο σημείο, την ίδια στιγμή, μια κατακόρυφη ράβδος μήκους 2m ρίχνει σκιά μήκους 3m. Να βρεθεί το ύψος του δέντρου.

5. Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του AD . Να αποδείξετε ότι :

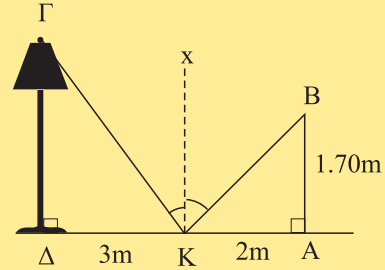
- i) $AD^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma$,
- ii) $AB^2 = B\Delta \cdot B\Gamma$,
- iii) $AB \cdot A\Gamma = AD \cdot B\Gamma$.

6. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και οι ευθείες Ax και Ay που σχηματίζουν ίσες γωνίες με τις AB και $A\Gamma$ και τέμνουν τη $B\Gamma$ και τον κύκλο αντίστοιχα στα Δ και E . Να αποδείξετε ότι $AD \cdot AE = AB \cdot A\Gamma$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Ο παρατηρητής AB βλέπει το φως του λαμπτήρα Γ μέσα από τον καθρέπτη K . Να υπολογίσετε το ύψος του φανοστάτη $\Delta\Gamma$, όταν είναι $\Delta K = 3m$, $AK = 2m$ και το

ύψος του παρατηρητή 1,70m. (Είναι γνωστό από τη Φυσική ότι η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης).



2. Να αποδείξετε ότι:

- i) δύο παραλληλόγραμμα είναι όμοια, αν δύο διαδοχικές πλευρές του ενός είναι ανάλογες προς δύο διαδοχικές πλευρές του άλλου και οι γωνίες των πλευρών αυτών είναι ίσες,
- ii) δύο ορθογώνια με ίση τη γωνία των διαγωνίων τους είναι όμοια.

3. Θεωρούμε τους κύκλους (O_1, R_1) και (O_2, R_2) που τέμνονται στα σημεία A και B . Αν οι εφαπτόμενες στο A τέμνουν τους κύκλους στα A_1 και A_2 αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $AB^2 = BA_1 \cdot BA_2$.

4. Αν AD , BE και ΓZ είναι τα ύψη και H το ορθόκεντρο τριγώνου $AB\Gamma$ να αποδείξετε ότι

$$HD \cdot HA = HB \cdot HE = H\Gamma \cdot HZ.$$

5. Από το μέσο M του τόξου \widehat{AB} φέρουμε τις χορδές $M\Delta$ και MZ , που τέμνουν τη χορδή AB στα Δ' και Z' αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι

$$M\Delta \cdot M\Delta' = MZ \cdot MZ'.$$

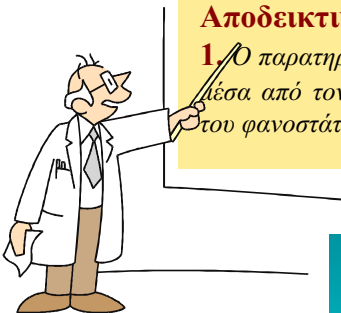
6. Σε ορθογώνιο τραπέζιο ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 1\perp$) οι διαγώνιοι είναι κάθετες. Να αποδείξετε ότι το ύψος του είναι μέσο ανάλογο των βάσεων.

Σύνθετα Θέματα

1. Να αποδείξετε ότι δύο τραπέζια με ανάλογες βάσεις και τις προσκείμενες σε δύο ομόλογες βάσεις τους γωνίες ίσες μία προς μία, είναι όμοια.

2. Έστω δοσμένη γωνία $x\hat{O}y$ και σημείο M . Ο τυχαίος κύκλος που διέρχεται από τα O και M τέμνει τις πλευρές Ox , Oy στα B και Γ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι $\frac{MB}{M\Gamma} = \frac{d}{d'}$, όπου d, d' είναι οι αποστάσεις του M από τις Ox, Oy , αντίστοιχα.

3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 1\perp$) και το ύψος του AD . Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει το AD



ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

στο Z και η διχοτόμος της \widehat{A} τέμνει τη $B\Gamma$ στο E . Να αποδείξετε ότι $ZE \parallel AB$.

4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{B} - \widehat{\Gamma} = 1\text{r}$ και το ύψος του AA . Να αποδείξετε ότι $AA^2 = AB \cdot A\Gamma$.

5. Η διχοτόμος AD ενός τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο E . Να αποδείξετε ότι :

i) $AB \cdot A\Gamma = AD \cdot AE$,

ii) $EB^2 = EA \cdot EA$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω δοσμένος κύκλος (O,R) και σημείο A στο εξωτερικό του κύκλου. Από το A φέρουμε την εφαπτομένη AT και την τέμνουσα $AB\Gamma$. Να αποδειχθεί ότι $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{TB^2}{T\Gamma^2}$.

2. Από σημείο A φέρουμε τις εφαπτόμενες AB και $A\Gamma$ κύκλου (O,R) και τυχαία τέμνουσα ADE . Να αποδειχθεί ότι $BA \cdot AE = BE \cdot A\Gamma$.

3. Αν E, Z είναι οι προβολές των κορυφών B, Γ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ (με $\beta \neq \gamma$) στη διχοτόμο του AD να αποδείξετε ότι τα E, Z είναι συζυγή αρμονικά των A, D .

4. Σε κάθε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ να αποδειχθεί ότι οι αποστάσεις τυχαίου σημείου της διαγωνίου $A\Gamma$ από τις πλευρές AB και $A\Delta$ είναι αντιστρόφως ανάλογες προς τις πλευρές αυτές.

5. Αν M τυχαίο σημείο κύκλου (O,R) , να αποδείξετε ότι :

i) η απόσταση d του M από χορδή AB του κύκλου είναι $d = \frac{MA \cdot MB}{2R}$,

ii) η απόσταση d' του M από την εφαπτομένη σε τυχαίο σημείο A του κύκλου είναι $d' = \frac{MA^2}{2R}$,

iii) αν d, d_1, d_2 οι αποστάσεις του M από μία χορδή $\Gamma\Delta$ του κύκλου και από τις εφαπτόμενες στα Γ, Δ αντίστοιχα, τότε $d^2 = d_1 \cdot d_2$.

6. **Θεώρημα Πτολεμαίου:** Σε κάθε εγγράφημο τετράπλευρο το άθροισμα των γινομένων των απέναντι πλευρών είναι ίσο με το γινόμενο των διαγωνίων του.



Δραστηριότητες

1. Να κατασκευασθούν δύο τετράπλευρα των οποίων οι πλευρές είναι παράλληλες μία προς μία, αλλά δεν είναι όμοια.
2. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$. Να κατασκευασθεί τετράπλευρο $A'B'\Gamma'\Delta'$ το οποίο να αποτελείται από τρίγωνα ίσα με τα τρίγωνα στα οποία χωρίζει η διαγώνιος $A\Gamma$ το ορθογώνιο έτσι, ώστε το $A'B'\Gamma'\Delta'$ να μην είναι όμοιο με το $AB\Gamma\Delta$.

Εργασία

Κατασκευάστε έναν εξάντα και υπολογίστε το ύψος μίας πολυκατοικίας στη γειτονιά σας ακολουθώντας τη διαδικασία της εφαρμογής 2.

